ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМЫХ РИСКОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА И НАДЕЖНОСТИ

Эрнест В. Дзиркал,
Виктор А. Нетес

Ключевые слова: статистический контроль качества и надежности, проверка гипотез, наблюдаемые риски, доверительные границы.

Резюме - В статье излагается концепция наблюдаемых рисков. Эти риски определяются после проведения испытаний для статистического контроля качества или надежности и зависят от результатов испытаний. Они позволяют оценивать вероятности ошибочных решений не перед экспериментом как традиционные (планируемые) риски поставщика и потребителя, а после эксперимента. Математически доказываются основные свойства наблюдаемых рисков. Числовые примеры иллюстрируют определяемые понятия и демонстрируют их полезность.

исследования

1. ВВЕДЕНИЕ

Обычно в естественных науках эксперимент планируется таким образом, чтобы его предполагаемая погрешность не превышала некоторого выбранного значения, а после окончания эксперимента оценивается его фактическая погрешность. Однако в задачах статистических проверок обычно используется другой подход. Вероятности ошибочных решений (риски) рассматриваются в качестве меры ошибочности решений, как до эксперимента, так и после него. Кажется странным, что после окончания эксперимента и принятия решения риски не уточняются.

Эта статья имеет цель восполнить этот пробел для задач контроля качества и надежности. Кроме того, решается проблема контроля с использованием доверительных границ и двух уровней контролируемого показателя.

Предлагаемый подход был официально принят в СССР в 1987 году и соответствующая методика была включена в стандарт [1]. Однако он не привлек внимание теоретиков и не упоминается в курсах лекций и руководствах. Поэтому авторы хотят привлечь внимание к этому подходу, описанному в их предыдущих статьях [2, 3] и справочнике [4].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Q показатель качества или надежности некоторого объекта
Q_0 приемочный уровень Q
Q_1 браковочный уровень Q

H_0 нулевая гипотеза: $H_0 = \{Q \ge Q_0\}$ для позитивного показателя (чем больше значение Q, тем выше качество или надежность); $H_0 = \{Q \le Q_0\}$ для негативного показателя (чем меньше значение Q, тем ниже качество или надежность)

H_1 альтернативная гипотеза: $H_1 = \{Q \le Q_1\}$ для позитивного показателя; $H_1 = \{Q \ge Q_1\}$ для негативного показателя
(Мы будем рассматривать далее позитивный показатель)

x данные испытаний

X_0 область принятия

X_1 область отклонения

α (планируемый) риск поставщика: $\alpha = \Pr\{x \in X_1 ; H_0\}$

β (планируемый) риск потребителя: $\beta = \Pr\{x \in X_0 ; H_1\}$

$Q_*(x,\gamma)$ нижняя доверительная граница для Q по данным испытаний x с доверительной вероятностью γ

$Q^*(x,\gamma)$ верхняя доверительная граница для Q по данным испытаний x с доверительной вероятностью γ

$\Pr(n,\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ функция распределения Пуассона

3. НАБЛЮДАЕМЫЕ РИСКИ В СЛУЧАЕ ОДНОСТУПЕНЧАТОГО КОНТРОЛЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОЦЕНОЧНОГО НОРМАТИВА

В этом случае мы используем некоторую тестовую статистику $S(x)$, являющуюся функцией наблюдений, и оценочный норматив C. Пусть тестовая статистика $S(x)$ является позитивной (чем больше ее значение, тем сильнее уверенность в более высоком качестве или надежности испытываемого объекта). Нулевая гипотеза H_0 принимается, т.е. мы приходим к решению, что объект соответствует требованиям к качеству или надежности, когда $S(x) \ge C$. Гипотеза H_0 отвергается, т.е. мы приходим к решению, что объект не соответствуем требованиям, когда $S(x) < C$. Таким образом,

$$X_0 = \{x : S(x) \ge C\}, \tag{1a}$$

$$X_1 = \{x : S(x) < C\}. \tag{1b}$$

Отсюда

$$\alpha = \Pr\{S(x) < C; H_0\}, \tag{2a}$$

$$\beta = \Pr\{S(x) \ge C; H_1\}. \tag{2b}$$

Наблюдаемый риск поставщика $\widehat{\alpha}(x^*)$ при данных испытаний x^* определяется как вероятность того, что результат испытаний для объекта, имеющего значение показателя не менее Q_0, будет не лучше, чем x^*.

Наблюдаемый риск потребителя $\widehat{\beta}(x^*)$ при данных испытаний x^* определяется как вероятность того, что результат испытаний для объекта, имеющего значение показателя не более Q_1, будет не хуже, чем x^*.

Поэтому

$$\widehat{\alpha}(x^*) = \Pr\left\{S(x) \le S(x^*); H_0\right\}, \quad (3a)$$

$$\widehat{\beta}(x^*) = \Pr\left\{S(x) \ge S(x^*); H_1\right\}. \quad (3b)$$

Таким образом, при определении наблюдаемых рисков мы используем само значение тестовой статистики, а не только тот факт, что оно больше или меньше оценочного норматива *C* [сравните (3a,b) с (2a,b)].

Теоретически наблюдаемый риск соответствует наблюдаемому уровню значимости в математической статистике [5].

Оба наблюдаемых риска могут быть определены при обоих исходах испытаний (приемка и браковка). Если мы хотим уравнять планируемые риски поставщика и потребителя (α = β), вышеупомянутое правило принятия решений [соответствующее (1a,b)] может быть сформулировано также без использования оценочного норматива *C* на основе сравнения наблюдаемых рисков:

$$\widehat{\alpha} > \widehat{\beta} \text{ – приемка, } \widehat{\alpha} < \widehat{\beta} \text{ – браковка}$$

(см. пример 1 и теоремы 3 и 4 ниже). Иными словами, мы принимаем решение, соответствующее меньшему из наблюдаемых рисков.

Пример 1

Рассмотрим приемочный контроль по альтернативному признаку и пусть приемочный и браковочный уровни дефектности составляют $q_0 = 0{,}05$ и $q_1 = 0{,}15$ соответственно. Предположим, что распределение числа дефектных изделий *d* является пуассоновским:

$$\Pr\left\{d = n; q\right\} = \exp(-Nq)(Nq)^n / n!,$$

где *N* – объем выборки, *q* – истинный уровень дефектности.

Если *N* = 40, приемочное число Ac = 3, браковочное число Re = Ac + 1 = 4, то α = 0,143 и β = 0,151.

Наблюдаемый риск поставщика $\widehat{\alpha}$ при наличии d^* дефектных изделий в выборке определяется, как вероятность получить при уровне дефектности q_0 не менее d^* дефектных изделий в выборке.

Наблюдаемый риск потребителя $\widehat{\beta}$ при наличии d^* дефектных изделий в выборке определяется, как вероятность получить при уровне дефектности q_1 не более d^* дефектных изделий в выборке.

Поэтому

$$\widehat{\alpha} = 1 - \Pr(d^* - 1, Nq_0), \ \widehat{\beta} = \Pr(d^*, Nq_1).$$

В табл. 1 показаны наблюдаемые риски для этого примера.

Таблица 1. Наблюдаемые риски для примера 1

d^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widehat{\alpha}$	1,000	0,865	0,594	0,323	0,143	0,053'	0,017	0,005	0,001
$\widehat{\beta}$	0,002	0,017	0,062	0,151	0,285	0,446	0,606	0,744	0,847

Наблюдаемый риск поставщика $\widehat{\alpha}$ равен планируемому риску поставщика α при d^* = Re = 4 (Re – минимальное число дефектных изделий, при котором партия бракуется); с ростом d^* величина $\widehat{\alpha}$ быстро убывает.

Наблюдаемый риск потребителя $\widehat{\beta}$ равен планируемому риску потребителя при d^* = Ac = 3 (Ac – максимальное число дефектных изделий, при котором партия принимается); $\widehat{\beta}$ быстро убывает с уменьшением d^*.

4. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НАБЛЮДАЕМЫХ РИСКОВ

Теорема 1. Если $x^* \in X_1$, то $\widehat{\alpha}(x^*) \le \alpha$; если $x^* \in X_0$, то $\widehat{\beta}(x^*) \le \beta$.

Доказательство (мы приводим доказательства только для одного из рисков, для другого они аналогичны):

Пусть $x^* \in X_1$. Из (1b) $S(x^*) < C$ и $\{x : S(x) \le S(x^*)\} \subset \{x : S(x) < C\}$, поэтому $\Pr\{S(x) \le S(x^*)\} \le \Pr\{S(x) < C\}$.

Отсюда с учетом (3a) и (2a) получим $\widehat{\alpha}(x^*) \le \alpha$.

Теорема 2. $\sup\limits_{x \in X_1} \widehat{\alpha}(x) = \alpha$, $\sup\limits_{x \in X_0} \widehat{\beta}(x) = \beta$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \sup\limits_{x \in X_1} S(x)$. Если существует $x^* \in X_1$ такое, что $S(x^*) = \alpha$, то $X_1 = \{x : S(x) \le S(x^*)\}$ и $\alpha = \Pr\{X_1; H_0\} = \Pr\{S(x) \le S(x^*); H_0\} = \widehat{\alpha}(x^*)$.

Если такого x^* не существует, то найдется последовательность $x_n \in X_1$ такая, что $S(x_n) \uparrow \alpha$. Тогда последовательность множеств $X'_n = \{x : S(x) \le S(x_n)\}$ возрастает и $\bigcup X'_n = X_1$, откуда $\Pr\{X'_n\} \to \Pr\{X_1\}$.

Поэтому $\widehat{\alpha}(x_n) = \Pr\{X'_n; H_0\} \to \Pr\{X_1; H_0\} = \alpha$.

Теорема 3. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда $\widehat{\beta}(x^*) < \widehat{\alpha}(x^*)$ для $x^* \in X_0$, $\widehat{\alpha}(x^*) \le \widehat{\beta}(x^*)$ для $x^* \in X_1$.

Доказательство. Если $x^* \in X_0$, то $S(x^*) \ge C$ и

$$\widehat{\beta}(x^*) \le \beta = \alpha = \Pr\{S(x) < C; H_0\} \le \Pr\{S(x) \le S(x^*); H_0\} = \widehat{\alpha}(x^*).$$

Теорема 4. Пусть $\alpha = \beta$. Если $\widehat{\beta}(x^*) < \widehat{\alpha}(x^*)$, то $x^* \in X_0$; если $\widehat{\alpha}(x^*) \le \widehat{\beta}(x^*)$, то $x^* \in X_1$.

Доказательство. Предположение о том, что $x^* \in X_1$, когда $\widehat{\beta}(x^*) < \widehat{\alpha}(x^*)$, влечет противоречие, потому что в этом случае $\widehat{\alpha}(x^*) \le \widehat{\beta}(x^*) < \widehat{\alpha}(x^*)$. Следовательно, $x^* \in X_0$.

5. КОНТРОЛЬ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ

Правило принятия решений в случае контроля с использованием доверительных границ таково [2, 4, 6]:

$$Q_*(x,1-\beta) \ge Q_1,\ Q^*(x,1-\alpha) > Q_0 \text{ – приемка;} \tag{4a}$$

$$Q_*(x,1-\beta) < Q_1,\ Q^*(x,1-\alpha) \le Q_0 \text{ – браковка.} \tag{4b}$$

При некоторых естественных ограничениях объем испытаний может быть выбран так, чтобы обеспечить выполнение одного из этих двух условий приемки или браковки [2, 4, 6].

Обычно доверительные границы строятся на основе некоторой статистики $\xi(x)$ [6] так, что

$$Q^*(x,\gamma) = A(\xi(x),\gamma),\ Q_*(x,\gamma) = B(\xi(x),\gamma),$$

где $A(.,.)$ и $B(.,.)$ – некоторые функции. В этой ситуации решающее правило (4a,b) эквивалентно решающему правилу, соответствующему (1a,b) с $S(x) = \xi(x)$ и некоторым оценочным нормативом C [6].

В случае контроля с использованием доверительных границ наблюдаемые риски $\widehat{\alpha}(x^*)$ и $\widehat{\beta}(x^*)$ определяются из уравнений

$$Q^*(x^*,1-\widehat{\alpha}) = Q_0, \tag{5a}$$

$$Q_*(x^*,1-\widehat{\beta}) = Q_1. \tag{5b}$$

В некоторых случаях объем испытаний зависит от внешних обстоятельств. Например, продолжительность эксплуатационных испытаний часто равна стандартному периоду времени: месяцу, кварталу, году. В этих случаях невозможно заранее спланировать испытания так, чтобы обеспечить требуемые риски α и β, поэтому контроль с помощью доверительных границ очень удобен.

После получения всех возможных данных x мы определяем доверительные границы $Q^*(x,\gamma_1)$ и $Q_*(x,\gamma_2)$ так, чтобы удовлетворить одному из следующих условий:

$$Q^*(x,\gamma_1) > Q_0,\ Q_*(x,\gamma_2) = Q_1; \tag{6a}$$

$$Q_*(x,\gamma_2) < Q_1,\ Q^*(x,\gamma_1) = Q_0. \tag{6b}$$

Это может быть достигнуто за счет соответствующего выбора значений γ_1 и γ_2 при некотором заранее заданном соотношении между ними (можно рекомендовать, чтобы $\gamma_1 = \gamma_2$).

В случае (6a) принимается решение о приемке с риском потребителя $\hat{\beta} = 1 - \gamma_2$, в случае (6b) принимается решение о браковке с риском поставщика $\hat{\alpha} = 1 - \gamma_1$.

Пример 2

Рассмотрим объект, для которого по данным эксплуатационных испытаний осуществляется контроль средней наработки на отказ. Ее приемочный и браковочный уровни равны T_0 и $T_1 = 0{,}5 \cdot T_0$ соответственно. Продолжительность испытаний ограничена и равна $t = 4T_0$. Пусть время безотказной работы имеет экспоненциальное распределение. В этом случае нельзя гарантировать планируемые риски α и β меньшие, чем 0,2. Такие риски не удовлетворяют ни поставщика, ни потребителя. Тем не менее, испытания были проведены и их данные собраны.

Доверительные границы для средней наработки на отказ равны [4]:

$$T_* = t \big/ \Delta_{1-\gamma_2}(r),\ T^* = t \big/ \Delta_{\gamma_1}(r-1),$$

где $t = 4T_0$ – продолжительность испытаний, r – число отказов за это время и $\Delta_\gamma(n)$ – квантиль пуассоновского распределения, т.е. корень уравнения $\Pr(n, \Delta_\gamma(n)) = \gamma$.

Выбирая γ_1 и γ_2 так, чтобы удовлетворить (6a) или (6b), получим результаты, приведенные в табл. 2.

Максимальные значения наблюдаемых рисков $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ равны 0,2, но они соответствуют только случаям $r = 5$ и $r = 6$. Для других результатов испытаний наблюдаемые риски меньше, чем 0,2. Поэтому, если, например, число отказов $r = 2$, то объект будет принят с наблюдаемым риском $\hat{\beta} = 0{,}015$, и потребитель может не опасаться, что его риск слишком велик.

Таблица 2. Решения и риски для примера 2

Число отказов	Решение	Наблюдаемый риск: $\hat{\alpha}$ для приемки, $\hat{\beta}$ для браковки
0	Приемка	< 0,001
1		0,005
2		0,015
3		0,05
4		0,10
5		0,20
6	Браковка	0,20
7		0,13
8		0,05
…		…

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторам представляется, что с теоретической точки зрения значение предложенного подхода состоит в следующем:

- Проблема оценки погрешности эксперимента при статистическом контроле решается естественным образом, т.е. после завершения испытаний с учетом их результатов. Это решение стоит включить в учебники, справочники, стандарты и т.п. с тем, чтобы дополнить традиционный подход, использующий только планируемые риски.
- Давно поставленный вопрос, как могут быть использованы доверительные границы при статистическом контроле (т.е. о связи между определительными и контрольными испытаниями), решен для случая контроля качества или надежности по двум уровням.

В практическом отношении значение предложенного подхода различается в случаях наличия или отсутствия предварительного планирования испытаний. В первом случае, когда объем наблюдений равен запланированному, этот подход позволяет:

- Определить наблюдаемые риски и уточнить фактическую уверенность в правильности принимаемых решений.
- Контролировать качество или надежность, непосредственно использую доверительные границы самого проверяемого показателя, а не косвенные характеристики, связанные с этим показателем (число отказов, дефектных изделий и т.п.). Это позволяет контролировать комплексные показатели, такие как коэффициент готовности и коэффициент сохранения эффективности.
- Ввести в результаты испытаний некоторую количественную оценку качества, например, разделяя принятые изделия по уровням качества в соответствии со значениями наблюдаемых рисков, зафиксированных при испытаниях соответствующих партий.

Во втором случае кроме отмеченных выше существует еще одно важное преимущество: несмотря на отсутствие предварительного планирования испытаний, возможно принять решение о соответствии или несоответствии объекта заданным требованиям, используя все полученные статистические данные и указывая наблюдаемые риски.

исследования

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 27.410-87. Надежность в технике. Методы контроля показателей надежности и планы контрольных испытаний на надежность.
2. Дзиркал Э.В. Статистический контроль с помощью доверительных границ при фиксированном объеме наблюдений // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1982. № 2.
3. Нетес В.А. Наблюдаемые риски при статистическом контроле // Надежность и контроль качества. 1991. № 10.
4. Надежность технических систем: Справочник / Под ред. И.А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1985.
5. Кокс Д.Р., Хинкли Д.В. Теоретическая статистика: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
6. Павлов И.В. Статистические методы оценки надежности сложных систем по результатам испытаний. М.: Радио и связь, 1982.