РЕЗЕРВИРОВАНИЕ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРИБОРОВ В ОТКРЫТЫХ СЕТЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Г.Ш. Цициашвили,
М.А. Осипова
Владивосток, Россия[4]

В работе рассматриваются открытые сети с ненадежными обслуживающими приборами. Вычисление стационарного распределения таких сетей требует решения достаточно сложной системы линейных алгебраических уравнений большой размерности. Задачу удалось существенно упростить за счет введения специального управления маршрутными матрицами сети.

Сначала были исследованы сети с меняющимся множеством приборов. Затем мы предположили, что каждый прибор сети может выходить из строя и ремонтироваться независимо и рассмотрели различные варианты их восстановления. Описанные в работе модели находятся на стыке теории массового обслуживания и теории надежности.

Открытые сети с меняющимся множеством приборов.

Рассмотрим открытую сеть G [1, §2] с пуассоновским входным потоком интенсивности λ и l узлами. Каждый узел состоит из одного прибора с экспоненциально распределенным временем обслуживания на нем с параметром μ_k, $k=1,...,l$. Входной поток заявок поступает в сеть из узла с номером 0 (внешний источник) и в этот же узел заявки уходят из сети.

Обозначим S множество всех подмножеств (с упорядоченными по возрастанию элементами) множества $\{1,...,l\}$. Зафиксируем $s\in S$ и предположим, что перемещение заявок происходит только между узлами множества $s\bigcup\{0\}$, а заявки, находящиеся в остальных узлах, никуда не двигаются. Динамика перемещения заявки в s-ом состоянии сети задается неразложимой маршрутной матрицей $\Theta(s)=\left\|\theta_{ij}(s)\right\|_{i,j\in s\bigcup\{0\}}$:

$$\forall i,j\in s\bigcup\{0\}\ \ \exists\, i_1,...,i_n\in s\bigcup\{0\}:\theta_{ii_1}>0,\theta_{i_1i_2}>0,...,\theta_{i_nj}>0.$$

Пусть при заданных $\lambda_1,...,\lambda_l$, $0<\lambda_i<\mu_i$, $1\le i\le l$, маршрутные матрицы $\Theta(s)$ удовлетворяют условиям

$$(\lambda,\lambda_i,i\in s)=(\lambda,\lambda_i,i\in s)\Theta(s),\ s\in S,\ s\ne\varnothing. \qquad (1)$$

При $s=\varnothing$ заявки входного потока в узлы сети не поступают, а заявки, находящиеся в узлах сети, никуда не двигаются и не обслуживаются.

[4] guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru 690041, Владивосток, ул. Радио 7, Институт прикладной математики ДВО РАН

Зафиксируем $A(s)>0$, $s\in S$, $\sum_{s\in S} A(s)=1$, и предположим, что матрица $\left\| \nu\left(s,s^*\right)\right\|_{s,s^*\in S}$ неразложима и выполняются соотношения

$$A(s)\sum_{s^*\in S}\nu\left(s,s^*\right)=\sum_{s^*\in S}A\left(s^*\right)\nu\left(s^*,s\right).$$

Обозначим $Y=\left\{\boldsymbol{n}=\left(n_1,...,n_l\right):n_1\geq 0,...,n_l\geq 0\right\}$, а $\boldsymbol{e}_j$ - l-мерный вектор, у которого j-ая компонента равна 1, а остальные 0.

Сеть G с меняющимся множеством узлов (приборов) опишем марковским процессом $x(t)=(s(t),y(t))$ (*s(t)* характеризует множество рабочих узлов, а *y(t)* –число заявок в узлах сети) с множеством состояний $X=S\times Y$ и переходными интенсивностями ($I(A)$ - индикаторная функция события A)

$$\Lambda\left(\left(s,\boldsymbol{n}\right),\left(s^*,\boldsymbol{n}^*\right)\right)=\gamma_s\left(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}^*\right)I\left(s=s^*\right)+\nu\left(s,s^*\right)I\left(\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}^*\right).$$

Здесь для $s\in S$, $s\neq\varnothing$,

$$\gamma_s\left(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}^*\right)=\begin{cases}\lambda\theta_{0k}(s),\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_k,k\in s,\\ \min\left(n_k,1\right)\mu_k\theta_{k0}(s),\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k,k\in s,\\ \min\left(n_k,1\right)\mu_k\theta_{kj}(s),\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{e}_j,k\neq j,k,j\in s,\end{cases}\tag{2}$$

и $\gamma_s\left(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}^*\right)\equiv 0, s=\varnothing$. Процесс $x(t)$ эргодический [2, §4] и его стационарное распределение имеет вид

$$\prod\left(s,\boldsymbol{n}\right)=A(s)\pi\left(\boldsymbol{n}\right),\left(s,\boldsymbol{n}\right)\in X,\tag{3}$$

$$\pi\left(\boldsymbol{n}\right)=C^{-1}\prod_{i=1}^{l}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i},\quad \boldsymbol{n}\in Y,\quad C=\prod_{i=1}^{l}\left(\frac{\mu_i}{\mu_i-\lambda_i}\right).$$

Замечание 1. *Если* $\lambda_i=\lambda<\mu_i$, $1\leq i\leq l$, *то тогда произвольные симметричные маршрутные матрицы* $\Theta(s), s\in S$, *удовлетворяют соотношениям (1).*

В качестве примера рассмотрим открытую сеть с двумя узлами, маршрутной матрицей Θ, в которой диагональные элементы нулевые, а остальные равны ½, интенсивностью входного потока λ и интенсивностями обслуживания μ_1, μ_2. Рассматриваемая сеть с двумя работающими приборами (s={1,2}) изображена на рис. 1.

исследования

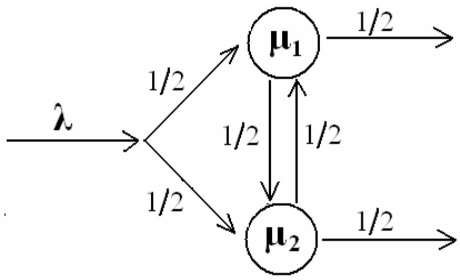

Рис. 1. Открытая сеть в случае s={1,2}.

Предположим теперь, что только первый прибор работает. Тогда s={1} и θ_{ij}=1 для i=0, j=1 и i=1, j=0, в остальных случаях θ_{ij}=0.

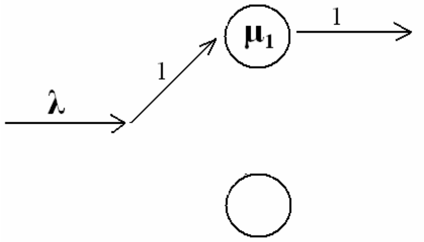

Рис. 2. Открытая сеть в случае s={1}.

Аналогично описывается случай s={2}, когда работает только второй прибор.

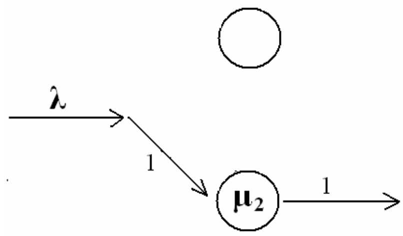

Рис. 3. Открытая сеть в случае s={2}.

Последний вариант – это когда оба прибора не работают и s= Ø.

Рис. 4. Открытая сеть в случае s= Ø.

Теперь определим отказы и восстановления приборов: открытая сеть с меняющимся множеством узлов *S={Ø, {1}, {2}, {1,2}}* и возможными переходами между состояниями сети *s*, $s \in S$ (стрелочками обозначены заданные переходные интенсивности $\nu\left(s,s^{*}\right)$, $s,s^{*} \in S$), изображена на рис. 5.

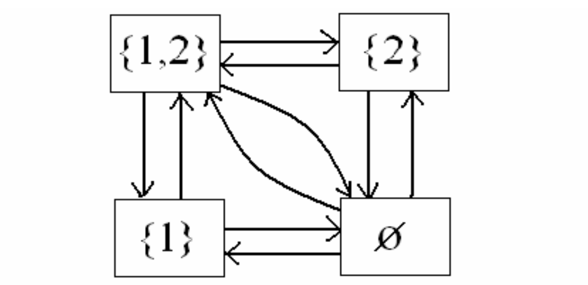

Рис. 5. Сеть с меняющимся множеством узлов.

Формула (3) дает предельное распределение рассмотренной сети с меняющейся структурой. Рисунки 1-5 показывают, что даже в простейшем случае описание сети с отказывающими и восстанавливающимися приборами достаточно громоздко. Чтобы рассмотреть резервирование приборов, необходимо исследовать более сложную схему. Следующий раздел посвящен решению этой задачи.

Открытая сеть с резервированием и восстановлением приборов.

Рассмотри замкнутую сеть $\tilde{G}_k$ с одним рабочим местом, одним ремонтным местом и m_k заявками. Заявки перемещаются по маршруту: рабочая часть – ремонтная часть и обратно. Рабочая (ремонтная) часть состоит из очереди перед рабочим (ремонтным) местом и из рабочего (ремонтного) места. Каждая заявка выходит из строя с интенсивностью α_k на рабочем месте и ремонтируется с интенсивностью β_k на ремонтном месте. Тогда время обслуживания на рабочем (ремонтном) месте можно интерпретировать как время работы (ремонта) заявки, а замкнутую сеть можно рассматривать как систему резервирования (если m_k>1) с восстановлением.

Опишем число заявок в рабочей части сети $\tilde{G}_k$ эргодическим дискретным марковским процессом $\tilde{y}_k(t)$ с множеством состояний $\tilde{Y}_k = \{\tilde{n}_k : 0 \le \tilde{n}_k \le m_k\}$, переходными интенсивностями

$$\tilde{\gamma}_k(\tilde{n}_k, \tilde{n}_k - 1) = \alpha_k \min(1, \tilde{n}_k),\ \tilde{\gamma}_k(\tilde{n}_k, \tilde{n}_k + 1) = \beta_k \min(1, m_k - \tilde{n}_k),\ \ \tilde{n}_k \in \tilde{Y}_k,$$

и предельным распределением

$$P_k(\tilde{n}_k) = C_k \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^{\tilde{n}_k},\ C_k^{-1} = \sum_{\tilde{n}_k=0}^{m_k} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^{\tilde{n}_k}.$$

Замечание 2. *Переходные интенсивности $\tilde{\gamma}_k$ описывают систему с ненагруженным резервом. Для системы с нагруженным резервом [3] процесс $\tilde{y}_k(t)$ имеет переходные интенсивности*

$$\tilde{\gamma}_k(\tilde{n}_k, \tilde{n}_k - 1) = \alpha_k \tilde{n}_k,\ \ \tilde{\gamma}_k(\tilde{n}_k, \tilde{n}_k + 1) = \beta_k(m_k - \tilde{n}_k),\ 0 \le \tilde{n}_k \le m_k,$$

и предельное распределение

$$P_k(\tilde{n}_k) = C_k \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^{\tilde{n}_k} \frac{1}{\tilde{n}_k!},\ C_k^{-1} = \sum_{\tilde{n}_k=0}^{m_k} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^{\tilde{n}_k} \frac{1}{\tilde{n}_k!}.$$

Рассмотрим l сетей $\tilde{G}_k$, $1 \le k \le l$, работающих независимо, и опишем их марковским процессом $\tilde{y}(t)$ с переходными интенсивностями

$$\tilde{\gamma}\left(\tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{n}}^*\right) = \sum_{k=1}^{l} \tilde{\gamma}_k\left(\tilde{n}_k, \tilde{n}_k^*\right), \tag{4}$$

множеством состояний $\tilde{Y} = \left\{\tilde{\boldsymbol{n}} = \left(\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_l\right) : \tilde{n}_k \in \tilde{Y}_k, 1 \le k \le l\right\}$ и предельным распределением

$$P\left(\tilde{\boldsymbol{n}}\right) = \prod_{k=1}^{l} P_k\left(\tilde{n}_k\right). \tag{5}$$

Предположим, что k–ый прибор сети G может выйти из строя и восстановиться как заявка в замкнутой сети $\tilde{G}_k$, $1 \le k \le l$. Тогда открытую сеть с независимым выходом из строя и восстановлением приборов в каждом узле можно описать дискретным марковским процессом $\left(\tilde{y}(t), y(t)\right)$ с множеством состояний $\tilde{Y} \times Y$ и переходными интенсивностями

$$\Lambda\left(\left(\tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n}\right), \left(\tilde{\boldsymbol{n}}^*, \boldsymbol{n}^*\right)\right) = \gamma_{s(\tilde{\boldsymbol{n}})}\left(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}^*\right) I\left(\tilde{\boldsymbol{n}} = \tilde{\boldsymbol{n}}^*\right) + \tilde{\gamma}\left(\tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{n}}^*\right) I\left(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^*\right). \tag{6}$$

Здесь $\tilde{\gamma}\left(\tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{n}}^*\right)$ вычисляются по формулам (4), а $\gamma_{s(\tilde{\boldsymbol{n}})}\left(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}^*\right)$ - по формулам (2), где

$$s\left(\tilde{\boldsymbol{n}}\right) = \left\{k : \tilde{n}_k > 0, 1 \le k \le l\right\}. \tag{7}$$

Если соотношения (1) выполняются, то процесс $\left(\tilde{y}(t), y(t)\right)$ эргодический и аналогично (3) его предельное распределение имеет вид $P\left(\tilde{\boldsymbol{n}}\right)\pi\left(\boldsymbol{n}\right)$, $\left(\tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n}\right) \in \tilde{Y} \times Y$.

Замечание 3. Формулы *(4), (5) описывают независимый выход из строя и восстановление в замкнутых сетях $\tilde{G}_k, 1 \le k \le l$, приборов сети G. Но замкнутые сети можно объединить в общую замкнутую сеть $\tilde{G}$ с l рабочими узлами (местами), фиксированным числом ремонтных узлов (мест) и произвольной неразложимой маршрутной матрицей. Пусть число заявок во всех узлах (не только в рабочих) так определенной сети $\tilde{G}$ описывается некоторым эргодическим марковским процессом $\tilde{y}(t)$ с множеством состояний $\tilde{Y}$, переходными интенсивностями $\tilde{\gamma}\left(\tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{n}}^*\right)$ и предельным распределением $P\left(\tilde{\boldsymbol{n}}\right)$. Тогда марковский процесс $\left(\tilde{y}(t), y(t)\right)$ с переходными интенсивностями (6), (7) имеет предельное распределение $P\left(\tilde{\boldsymbol{n}}\right)\pi\left(\boldsymbol{n}\right)$, $\left(\tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n}\right) \in \tilde{Y} \times Y$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 06-01-00063-а и Дальневосточного отделения РАН, проект 06-III-А-01-016.

Литература

[1] Башарин Г.П., Толмачев А.Л. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем. Итоги науки и техники, сер. Теория вероятностей. М.: ВИНИТИ, 1983. С.3-119.

[2] Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Новые мультипликативные теоремы для сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. Т.41, №2, 2005. С.171-181.

[3] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.