МЫ ВСЕ ЖИВЁМ НА ОДНОЙ ЖЁЛТОЙ ПОДВОДНОЙ ЛОДКЕ…

(научно-романтическая новелла)

Джон Д. Кеттель и Игорь А. Ушаков

Мы, Джон и Игорь, имели, вероятно, совершенно уникальный опыт научно-технического общения где-то в конце «холодной войны». Мы расскажем Вам о том, как развивались наше знакомство и переплетались наши научные интересы. И мы надеемся, что эта коротенькая новелла послужит сближению между нашими странами (и научно-техническими организациями).

Первоначально мы намеревались написать нечто сугубо научно-техническое. Но для того, что получилось, мы даже не сразу нашли название. Мы надеемся, что Вам хватит терпения прочитать эти очень личные воспоминания и размышления о нашем общем недавнем прошлом. Тот же, кто интересуется больше математической частью нашей работы, может сразу перейти к описанию алгоритма Кеттеля в Приложении 1 и его дальнейшему развитию в Приложении 2.

Часть I.

Джон.

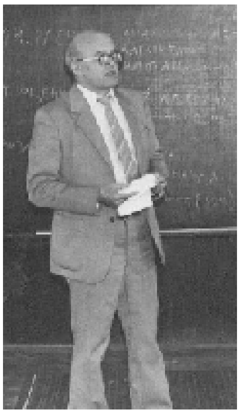
В 1958 Соединенные Штаты Америки в ответ на разработку в Советском Союзе программы МКБР (межконтинентальных баллистических ракет) начали работу над системой BMEWS, the Ballistic Missile Early Warning System, т.е. Системы раннего предупреждения. (BMEWS, надо заметить, является ужасно нелепым сокращением, поскольку произносится так же, как и английское слово “bemuse”, которое означает «увеселение», «забава».) Как и всякая большая система, BMEWS включала в свой состав огромное количество таких подсистем, как источники питания, собственно радар, некие вычислительные устройства, необходимые для обработки локационных сигналов (в те дни ЭВМ пребывали еще в младенческом возрасте). Моя компания Kettelle & Wagner[8] (K&W) получила контракт на разработку методологии оптимального распределения ресурсов между резервными элементами в системе.

Как раз незадолго до того я присутствовал на лекции Ричарда Беллмана, который рассказывал про свои, тогда еще совсем новые, концепции динамического программирования. Этот подход показался мне удачным для решения той проблемы, которая стояла перед нами. И хотя проект BMEWS был ужасно секретный, в 1962 году мне разрешили опубликовать статью по оптимальному резервированию [1]. Краткое изложение идеи моего алгоритма можно найти и в Приложении №1.

[8] Даниел Вагнер (1925-1997), известный американский специалист по исследованию операций. ORSA (Американское общество по исследованию операций) установило в его честь Приз за лучшее приложение методов исследования операций в практику.

Игорь.

В начале 60-х я работал в Советском Союзе в одном из закрытых НИИ, который разрабатывал систему дистанционного управления МКБР, то бишь теми самыми баллистическими ракетами с ядерными боеголовками. Это было горячее время «холодной войны», когда во время Карибского кризиса обоим – и Джону Кеннеди, и Никите Хрущеву хватило разума избежать Третьей Мировой Войны...



К слову, советские баллистические ракеты были нацелены не только на Америку и Западную Европу: Китай («лучший друг Советского Союза») был также не забыт вниманием…

Одна из моих задач состояла в обеспечении системы запасными элементами, что было для меня совершенно новой тематикой. Пришлось перерыть гору литературы, и, наконец в американском журнале “Operations Research” («Исследование операций») я нашел статью Дж. Д. Кеттеля «Оптимальное распределение средств для повышения надежности» [1].

Я увидел, что в статье дается точное решение очень сложной задачи распределения ресурсов и предлагается понятный и даже, можно сказать, элегантный вычислительный алгоритм. Сознаюсь, что наши попытки использовать напрямую динамическое программирование Ричарда Беллмана [2] оказались безуспешными. Напомню, что у нас в те времена компьютеры практически не использовались в повседневной инженерной практике, а метод Беллмана был совершенно непригоден для «ручного счета». Найденный алгоритм было бы слишком долго называть «модифицированный алгоритм динамического программирования», поэтому я пустил в научно-технический обиход новое название – «Алгоритм Кеттеля».

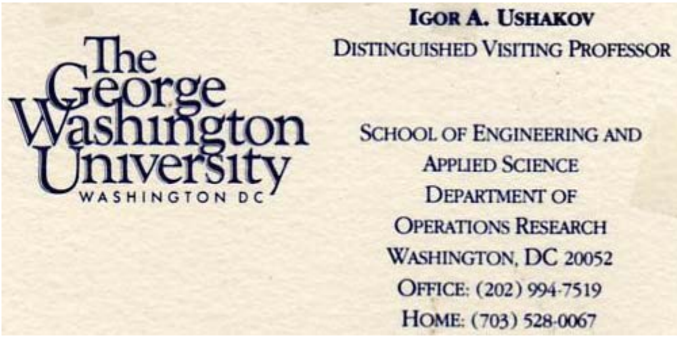
Я перевел статью и поместил ее в сборник переводов под названием «Оптимальные задачи надежности» [3]. Название сборника выглядит немного глуповато: я имел в виду «оптимизационные проблемы», но редактор издательства изменил название на «более благозвучное»: «Оптимальные задачи»! Конечно же, это была моя ошибка, проверяя гранки книги, не обратить внимания на титульный лист!

С тех пор в русской литературе по надежности все использовали для алгоритма название «Алгоритм Кеттеля». (Как я обнаружил впоследствии, алгоритм не носил такого имени в стране, где он был разработан!)

Со временем, компьютеры, наконец, стали рабочим инструментом инженеров, и я решил модифицировать Алгоритм Кеттеля. Это была очень простенькая, и честно говоря, незначительная доработка [3], хотя процедура и оказалась удобной: я назвал ее «Универсальная производящая функция» [4, 5]. Оказалось, что эта методология привела к ряду интенсивных исследований и практических приложений: мои коллеги и друзья из Израиля Григорий Левитин и Анатолий Лиснянский со своими коллегами проделали гигантскую работу [6, 7, 8]. Исчерпывающая библиография по развитию Универсальной производящей функции может быть найдена в [9].

Краткое описание модифицированного Алгоритма Кеттеля (Универсальной производящей функции) представлено в Приложении 2.

Часть II.



<u>Игорь</u>

В 1989 меня пригласили на один семестр почитать лекции в Университет Джорджа Вашингтона. Университет прислал мне приглашение и просил дать официальное формальное согласие, после получения которого они пришлют мне официальный контракт, который я должен подписать и послать им, на что они должны прислать мне официальное подтверждение о заключении контракта... Я понимал, что подобная «туда-сюда» бюрократическая переписка будет длиться до второго пришествия (учитывая медленную почту и непременную проверку каждого письма из-за границы). Поэтому я решил поехать в Вашингтон сам и подписать все бумаги прямо там. Мой друг, который служил Научным секретарем у Академика-секретаря Академии наук, помог оформить мне срочную загранкомандировку: он организовал мне трехдневную поездку в Америку, но за билеты и проживание я должен был платить сам …

Я прилетел в Вашингтон, где мой старинный друг Роберт Макол (которого многие знают по его прекрасной книге [10]) встретил меня в аэропорту и предложил остановиться у него дома. Это было очень кстати, поскольку у меня не было и ломаного американского гроша!

На следующий день я пошел в университет пешком через весь город, в 30-градусную жару и при почти 100% влажности (отсутствие денег – действительно, зло!). Кстати, когда Боб вечером увидел мой мокрый пиджак, когда я вернулся, то, узнав в чем дело, был страшно обижен на меня, что я ему ничего не сказал, выдал мне сотню долларов со словами, что не истраченные деньги я могу вернуть ему перед отъездом...

Можете себе представить, как долго я объяснял своим американским коллегам в университете, что я хотел бы получить приглашение на год с оплатой за семестр, потому что в противном случае у меня нет шансов взять с собой жену... Оно не могли понять, почему советский специалист, если он едет заграницу меньше, чем на 9 месяцев, он не может взять свою жену с собой! Пришлось рассказать им о некоторых физиологических особенностях женского организма …

Наконец, я подписал все бумаги, вернулся в Москву, и через два месяца мы с женой уже летели в Америку! Кстати, поскольку не было билета Москва-Нью-Йорк - Вашингтон, нам пришлось лететь прелюбопытнейшим маршрутом (и за неплохие деньги!): Москва – Шеннон – Гавана – Мехико – Сан-Франциско – Нью-Йорк - Вашингтон! (К счастью, в агентстве аэрофлота у меня была знакомая...) Во всяком случае, до начала учебного года мы оказались в Вашингтоне …

После первого семестра, мне предложили продлить контракт еще на полгода. Сами понимаете, отказаться я был не в силах. А затем к моему удивлению меня попросили остаться еще на год ….

Когда уже подходил к концу второй год моего пребывания в Вашингтоне, я вдруг «почувствовал сердце» – трудно было без двух-трех остановок подняться на второй этаж.

Хирург-кардиолог Университетского госпиталя, к которому я пришел на консультацию, сказал, что надо делать операцию на сердце... Операция прошла удачно, как вы видите, иначе не писать бы мне этой статьи. После операции тот же хирург сказал, что мне неплохо бы было побыть под его наблюдением... Я был просто в панике: как я могу остаться в стране без денег и без работы? И тут опять мой друг Боб Макол помог мне.

Так вышло, что во время моего первого визита в Вашингтон, когда я остановился у Маколов, после собеседования в Университете, я оставил в комнате, где я жил, все свои препринты, которые я приволок для подтверждения своей профессиональной пригодности (но никто их и не смотрел!). В одном из них была ссылка на статью Кеттеля! Боб сохранил этот препринт и подарил его своему старинному другу Джону Кеттелю, демонстрируя, насколько тот популярен в Советском Союзе.

Когда Боб понял, в каком я нахожусь положении, он позвонил своему другу и …

Джон.

Я помню, как однажды Боб Макол позвонил мне и рассказал, что его русский друг, Игорь Ушаков, улетая на родину, оставил несколько препринтов со ссылками на мою статью. Это меня заинтриговало ….

Я обнаружил, что в России алгоритм, который я изобрел, носит мое имя!

Потом года через два Боб опять позвонил мне и спросил, не хочу ли я встретиться с автором статьи, где упоминался мой алгоритм. Я, конечно, был этому рад: так мы встретились с Игорем. Его контракт с Университетом Джорджа Вашингтона заканчивался, и я предложил ему работу в моей компании Ketron, Inc...

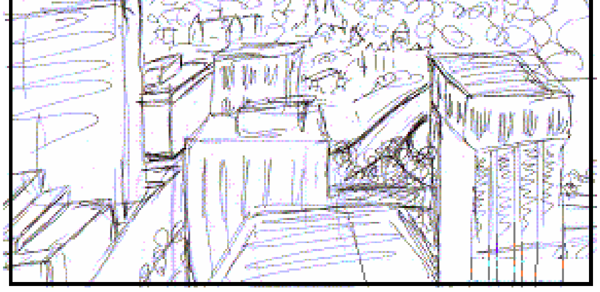
Часть III.

Джон.

Вскоре мы пришли к идее о создании Института «Кетрон-Москва», который Игорь возглавил в качестве директора. Моя цель была привлечь талантливых русских математиков и программистов, чтобы помочь своей компании, а целью Игоря – насколько я понимал – была помощь своим друзьям и бывшим коллегам выжить в той экстремально тяжелой обстановке, которая сложилась в Советском Союзе.

Игорь.

Я хорошо помню свой самый первый день в Кетроне … Мой офис был по соседству с офисом президента – Джона Кеттеля. Он представил меня всем сотрудникам своей компании. Секретарша Джона стала по совместительству и моей. Офис был прекрасный – особенно вид из окна, где на



горизонте возвышался Вашингтонский Кафедральный Собор...
Я начал работу. У Джона были грандиозные планы: как привлечь русских программистов и прикладных математиков для работы здесь, в Америке... Я был полон энтузиазма!

Секретарша Джона, Дженис принесла мне кипу бумаг, которые я представил в фирму при оформлении. Среди них я обнаружил... несколько ее отчетов в ФБР о моих разговорах с моими русскими коллегами, копии моих емейлов и т.п. Конечно, для меня это не было чем-то новым: КГБ или ФБР – велика ли разница?

Дженис была очень милая девушка, поэтому я потихонечку принес ей все эти бумаги со словами, что в Советском Союзе за такой «прокол» ее бы сурово наказали. Но мы сохраним секрет об этой ошибке между нами. С того момента Дженис стала моим хорошим другом и помощником (а с моим английским мне это было очень нужно)…

К несчастью, эта работа длилась недолго. Компания обанкротилась (хороший пример случайных событий при капитализме), но с помощью Джона мне удалось найти новую работу. Он рекомендовал меня своему бывшему сотруднику, который стал Вице-президентом по науке гигантской американской телефонной компании MCI.

Так с помощью Джона Кеттеля я выжил в США…

исследования

Часть IV.

Игорь.

Наша совместная работа завершилась. Но наша дружба еще больше окрепла. Мы ездили в гости к Кеттелям, они навещали нас.

Однажды в День Независимости 4-го июля мы навестили Кеттелей и даже приняли участие в импровизированном «военном параде». Джон раздал всем «деревянные ружья». (На фото: мой сын Слава, гостивший тогда у нас, Джон и его друг, советник Британского посольства, живший по соседству.)

А однажды мы с Джоном случайно встретились на приеме «бывших выпускников» хирургического отделения кардиологического госпиталя при Университете Джорджа Вашингтона.

Так случилось, что один и тот же хирург делал операции и мне, и Джону. И фамилия у этого японского парня была по-русски ласковая: звали его Алиона...

Часть V.

Джон.

Недавно Игорь позвонил мне и пригласил участвовать Форуме Гнеденко. Борис Гнеденко очень хорошо известен в научных кругах Америки, кроме того, я встречал профессора Гнеденко, когда он навещал Игоря в США и посетил нашу фирму. Поэтому я решил принять участие в работе Форума настолько, насколько мне позволит мое бренное тело.

Вскоре Игорь предложил мне написать совместную статью о развитии Алгоритма Кеттеля, что, я надеюсь, будет осуществлено.

Игорь также предложил написать совместно эту историю как пример замечательного научного сотрудничества, убедив меня, что она может оказаться интересной не только специалистам по надежности. Я думаю, что он прав. В самом конце «холодной войны» мы с ним думали, что нам удастся вовлечь российские таланты в работу над интереснейшими прикладными математическими проектами, которые встали перед «западными корпорациями» (а на самом деле и перед всем миром). К сожалению, наши планы не осуществились...

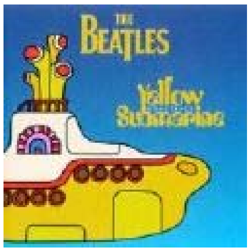
С «надеждой, что весна вечно жива в груди человека[9]", я бы с радостью вернулся к тому проекту сейчас. Версия такого проекта в новом звучании такова:

- Составление перечня правительственных и корпоративных проблем в США, России и других странах. Я готов поработать над американской частью перечня и представлю результаты на Форум, чтобы и другие «покачали» свои соображения.
- Соответствующая подборка идей из области прикладной математики (и исследования операций) включает и проблемы, интересующие меня лично:
  - Новый путь переговоров с использованием «компьютерной третьей партии». Это может быть использовано, например, при межправительственных переговорах или при покупке недвижимости.
  - Эффективность производства. Большая часть прикладных математических проектов – в частности, в области исследования операций – финансируется частными компаниями, поскольку это помогает им выжить в конкурентной борьбе и «сделать деньги». При этом в США действует антимонопольный закон. В результате удручающе мало делается для повышения эффективности производства в целом. Логично рассуждая, возникают идеи «коммунистического толка», либо заимствование опыта других стран.

Я бы с радостью принял участие в работе над такими проектами.

Игорь.

Несколько дней назад я позвонил Джону Кеттелю и предложил ему присоединиться к Форуму Гнеденко. Он принял предложение, и, более того, мы решили написать совместную статью об Алгоритме Кеттеля.



И неожиданно, мне пришла мысль, что живу я в том самом Сан-Диего, где более 50 лет назад Джон служил в ВМФ США офицером на подводной лодке!.. Почему я об этом подумал? Кто знает... Может быть, потому что я, сидя в уютной квартирке, слушаю мою любимую песню Биттлов «Желтая подводная лодка»?

[9]Строка из классической поэмы Эрнста Лоуренса Тэйера "Casey at the Bat".

И еще я подумал: как нам всем повезло, что никакой сумасшедший в то ужасное время конфронтации между нашими странами не нажал кнопки пуска баллистической ракеты с ядерной боеголовкой!..

Приложение 1: Описание алгоритма Кеттеля

Допустим, мы рассматриваем подводную лодку, которая должна выполнить определенную операцию длительности t, не заходя на базу. Электронное оборудование на борту подлодки представляет собой последовательное соединение n различных функциональных блоков. При отказе основного блока осуществляется замена его запасным, при этом считается, что система функционирует без нарушения работоспособности. Поскольку объем склада для хранения ограничен, требуется найти оптимальное число запасных блоков, суммарный объем которых не превышал бы этот заданный объём, обеспечивая при этом максимальную надежность оборудования. Ради простоты, допустим, что суммарный объем, занимаемый блоками равен сумме объемов отдельных блоков. (Это допущение делается во избежание необходимости параллельного решения задачи об оптимальной упаковке. В конце концов, можно предположить, что блоки имеют различную стоимость, а ограничение наложено на суммарную стоимость всех запасных блоков.)

Прежде чем сформулировать задачу в общих чертах, введем следующие обозначения:

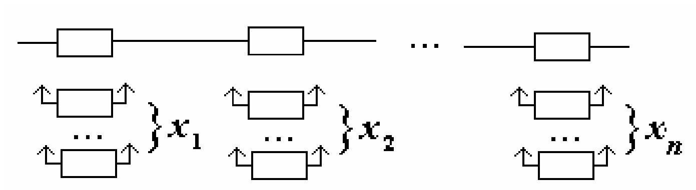
n – число функциональных блоков различных типов в составе системы,

x_k – число запасных блоков типа k,

$R_k(x_k)$ – вероятность безотказной работы основного блока типа k в течение заданного периода времени t при условии наличия x_k запасных блоков,

v_k – объем одного блока типа k. (При сделанных предположениях, суммарный объем x_k запасных блоков равен $x_k\ v_k$).

Необходимо найти такой вектор $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, который максимизировал бы вероятность безотказной работы электронного оборудования подводной лодки за время выполнения операции длительности t.



В математических обозначениях эта задача может быть сформулирована следующим образом:

$$\max_X \left\{ \prod_{1\le k\le n} R_k(x_k) \mid \sum_{1\le k\le n} v_k x_k \le C_{LIMIT} \right\}$$

где C_{LIMIT} – ограничение на суммарный объём запасных блоков (объем складского помещения).

Продемонстрируем работу алгоритма на простом примере системы из четырех последовательно соединенных блоков.

Шаг 1. Для каждого основного блока системы для каждого числа запасных блоков x_k, запишем вероятность $R_k(x_k)$ и суммарный объем $v_k\,x_k$.

Таблица 1.

	Число запасных блоков	0	1	2	3	…
	Вероятность безотказной работы	$R_1(0)$	$R_1(1)$	$R_1(2)$	$R_1(3)$	…
Блок 1	Суммарный объем запасных блоков	0	v_1	$2v_1$	$3v_1$	…
	Вероятность безотказной работы	$R_2(0)$	$R_1(1)$	$R_2(2)$	$R_2(3)$	…
Блок 2	Суммарный объем запасных блоков	0	v_2	$2v_2$	$3v_2$	…
	Вероятность безотказной работы	$R_3(0)$	$R_3(1)$	$R_3(2)$	$R_3(3)$	…
Блок 3	Суммарный объем запасных блоков	0	v_3	$2v_3$	$3v_3$	…
	Вероятность безотказной работы	$R_4(0)$	$R_4(1)$	$R_4(2)$	$R_4(3)$	…
Блок 4	Суммарный объем запасных блоков	0	v_4	$2v_4$	$3v_4$	…

Шаг 2a. “Объединим” блоки 1 и 2 следующим образом

Таблица 2.

	Блок 1					
Блок 2		0	1	2	3	…
	0	$R_1(0)R_2(0)$	$R_1(1)R_2(0)$	$R_1(2)R_2(0)$	$R_1(3)R_2(0)$	…
		0	v_1	$2\ v_1$	$3\ v_1$	
	1	$R_1(0)R_2(1)$	$R_1(1)R_2(1)$	$R_1(2)R_2(1)$	$R_1(3)R_2(1)$	…
		v_2	v_1+v_2	$2\ v_1+v_2$	$3\ v_1+v_2$	
	2	$R_1(0)R_2(2)$	$R_1(1)R_2(2)$	$R_1(2)R_2(2)$	$R_1(3)R_2(2)$	…
		$2v_2$	v_1+2v_2	$2\ v_1+2v_2$	$3\ v_1+2v_2$	
	3	$R_1(0)R_2(3)$	$R_1(1)R_2(3)$	$R_1(2)R_2(3)$	$R_1(3)R_2(3)$	…
		$3\ v_2$	$v_1+3\ v_2$	$2\ v_1+3\ v_2$	$3\ v_1+3\ v_2$	
	…	…	…	…	…	…

Шаг 2b. “Объединим” блоки 3 и 4 следующим образом

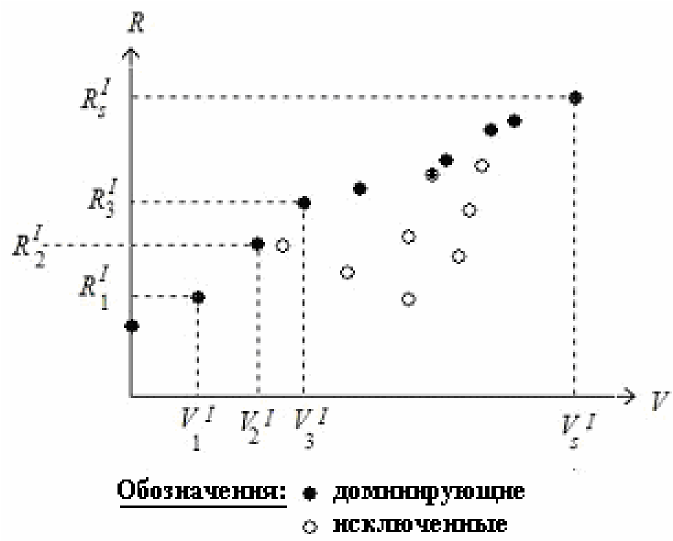
Таблица 3.

	Блок 3					
Блок 4		0	1	2	3	…
	0	$R_3(0)R_4(0)$	$R_3(1)R_4(0)$	$R_3(2)R_4(0)$	$R_3(3)R_4(0)$	…
		0	v_3	$2\ v_3$	$3\ v_3$	
	1	$R_3(0)R_4(1)$	$R_3(1)R_4(1)$	$R_3(2)R_4(1)$	$R_3(3)R_4(1)$	…
		v_4	v_3+v_4	$2\ v_3+v_4$	$3\ v_3+v_4$	
	2	$R_3(0)R_4(2)$	$R_3(1)R_4(2)$	$R_3(2)R_4(2)$	$R_3(3)R_4(2)$	…
		$2v_4$	v_3+2v_4	$2\ v_3+2v_4$	$3\ v_3+2v_4$	
	3	$R_3(0)R_4(3)$	$R_3(1)R_4(3)$	$R_3(2)R_4(3)$	$R_3(3)R_4(3)$	…
		$3\ v_4$	$v_3+3\ v_4$	$2\ v_3+3v_4$	$3\ v_3+3\ v_4$	
	…	…	…	…	…	…

Шаг 3a. Все пары $\{R_1(x_1)*R_2(x_2);\ v_1x_1+\ v_2x_2\}$ упорядочим по возрастанию суммарного объема запасных блоков и затем исключим все пары, которые при одинаковой или меньшей

вероятности имеют большие объёмы. В результате получим последовательность вида: $\{R_1^I, V_1^I\}, \{R_2^I, V_2^I\}, ..., \{R_j^I, V_j^I\}...$

Эта последовательность называется *доминирующей последовательностью*. По сути дела, это множество Парето. Конечно, для каждого члена такой доминирующей последовательности из Таблицы 2 легко находится, какое число запасных блоков x_1 и x_2 должно быть выбрано, чтобы образовать пару $\{R_j^I, V_j^I\}$. Результат такого “объединения”, позволяющего построить доминирующую последовательность, может быть представлен в виде следующего графика:



Шаг 3b. Аналогичная процедура повторяется для Таблицы 3. Все пары $\{R_3(x_3)*R_4(x_4);\ v_3x_3+ v_4x_4\}$ упорядочиваются, как и ранее, затем производятся аналогичные исключения, и в результате получается доминирующая последовательность вида: $\{R_1^{II}, V_1^{II}\}, \{R_2^{II}, V_2^{II}\}, ..., \{R_j^{II}, V_j^{II}\}...$

Шаг 4. Построим заключительную Таблицу 4.

Таблица 4.

		Первая доминирующая последовательность			
		1	2	3	…
Вторая доминирующая последовательность	1	$R_1^I R_1^{II}$ $V_1^I + V_1^{II}$	$R_2^I R_1^{II}$ $V_2^I + V_1^{II}$	$R_3^I R_1^{II}$ $V_3^I + V_1^{II}$	…
	2	$R_1^I R_2^{II}$ $V_1^I + V_2^{II}$	$R_2^I R_2^{II}$ $V_2^I + V_2^{II}$	$R_3^I R_2^{II}$ $V_3^I + V_2^{II}$	…
	3	$R_1^I R_3^{II}$ $V_1^I + V_3^{II}$	$R_2^I R_3^{II}$ $V_2^I + V_3^{II}$	$R_3^I R_3^{II}$ $V_3^I + V_3^{II}$	…
	…	…	…	…	…

Шаг 5.

Теперь с заключительной Таблицей 4 осуществим процедуру, аналогичную предыдущей. Берём все пары

$$\{R_1^I \cdot R_1^{II}, V_1^I + V_1^{II}\}, \{R_1^I \cdot R_2^{II}, V_1^I + V_2^{II}\}, \{R_2^I \cdot R_1^{II}, V_2^I + V_1^{II}\}, ..., \{R_j^I \cdot R_k^{II}, V_j^I + V_k^{II}\}, ...$$

упорядочиваем их по величине суммарного объема запасных блоков, исключим соответствующие пары, как и ранее, и сформируем финальную доминирующую последовательность: $\{R^*_1, V^*_1\}, \{R^*_2, V^*_2\}, ..., \{R^*_j, V^*_j\}...$

Решение. Находится такой номер k, для которого $V^*_k \le V_{LIMIT} < V^*_{k+1}$. По паре $\{R^*_k, V^*_k\}$, являющейся решением, находятся составляющие ее пары $\{R_i^I, V_i^I\}$ и $\{R_j^{II}, V_j^{II}\}$. В свою очередь, на основании $\{R_i^I, V_i^I\}$ находим сформировавшую эту пару два исходных варианта $\{R_1(x_1), v_1 x_1\}$ и $\{R_2(x_2), v_2 x_2\}$, т.е. оказываются найденными x_1 и x_2, а на основании $\{R_j^{II}, V_j^{II}\}$ находим исходные $\{R_3(x_3), v_3 x_3\}$ и $\{R_4(x_4), v_4 x_4\}$, т.е. оказываются найденными и величины x_3 и x_4.

Приложение 2: Модификация алгоритма Кеттеля с помощью использования Универсальной Производящей Функции (УПФ)

Если внимательно посмотреть на алгоритм Кеттеля, можно обнаружить, что мы имеем дело с парами чисел, над которыми выполняются следующие простые операции: величины R умножаются, а величины V складываются. Это наблюдение неизбежно наталкивает на мысль: не использовать ли для подобной процедуры производящую функцию? В самом деле, Таблицы 2 и 3 очень удобны для вычислений вручную, однако для компьютера приводимая ниже процедура “более понятна” и, кроме того, более удобна для программирования.

Итак, выражение

$$f^I(x) = (R_1(0)z^0 + R_1(1)z^{v_1} + R_1(2)z^{2v_1} + ...) \cdot (R_2(0)z^0 + R_2(1)z^{v_2} + R_2(2)z^{2v_2} + ...).$$

по сути дела, эквивалентно Таблице 2. Однако, используя УПФ можно записать сразу же выражение для финального полинома для последовательной системы, состоящей из n различных блоков:

$$f_{FINAL}(x) = \prod_{1 \le j \le n} (R_j(0)z^0 + R_j(1)z^{v_j} + R_j(2)z^{2v_j} + ...)$$

В отличие от стандартной процедуры умножения полиномов, мы избежим приведения подобных членов, иначе говоря, все члены $f_{FINAL}(x)$ с равными степенями x сохраняются в их первозданном виде. Для решения задачи нахождения максимального значения вероятности при ограничении на суммарный объем, $R(V_{\text{LIMIT}})$, нам необходимо произвести “фильтрацию” полученных членов многочлена $f_{FINAL}(x)$, как это делалось и в Алгоритме Кеттеля. Каждый член неприведенного полинома $f_{FINAL}(x)$ преобразуем в пары того же вида, что и в Алгоритме Кеттеля. Если кого-нибудь все же коробит от линейного сложения объемов, давайте впредь рассматривать стоимости блоков (сохранив прежние обозначения v и V), а уж стоимости-то складывать вполне естественно.

Упорядочим полученные «Кеттелевы пары» по возрастанию суммарной стоимости запасных блоков, V:

$$\left[R_1^{FIN}, V_1^{FIN}\right], \left[R_2^{FIN}, V_2^{FIN}\right], \left[R_3^{FIN}, V_3^{FIN}\right], \ldots, \left[R_j^{FIN}, V_j^{FIN}\right], \ldots$$

т.е. $V_j^{FIN} \le V_{j+1}^{FIN}$ для каждого j. Теперь, в этом упорядоченном наборе, исключим те пары, для которых выполняется условие $R_j^{FIN} \le R_{j-1}^{FIN}$.

Таким образом, доминирующая последовательность легко построена. Однако, алгоритм Кеттеля предоставляет также и способ, как найти соответствующий вектор $X^{OPT} = \{x_1^{OPT}, x_2^{OPT}, \ldots, x_n^{OPT}\}$. А при использовании УПФ, мы полностью потеряли ход решения: оно «обезличено»!

Чтобы избежать этого, модифицируем немного предложенный алгоритм, введя следующие, возможно, и искусственные, но очень полезные соотношения и обозначения.

Используем военную терминологию античных римлян: *легион* – некое соединение высшего уровня, *когорта* – унифицированная составная часть легиона все когорты имеют одинаковую структуры), наконец, *манипула* – основная боевая единица. Используем эти военные понятия «в мирных целях». Манипулой (М) назовем любой исходный «атомарный» параметр блока системы, например, вероятность безотказного функционирования (надежность) блока, его стоимость, число запасных блоков данного типа, и т.д. Когортой (С) назовем полный набор таких различных параметров блока, т.е. когорта – это совокупная характеристика элемента. В нашем случае, когорта представлена триплетом $C_j(k)$= [M_{j1}, M_{j2}, M_{j3}], где M_{j1} – надёжность j-го блока при условии, что имеется k запасных, т.е. $R_j(k)$, M_{j2} – суммарная стоимость k запасных частей, т.е. kv_j, и M_{j3} – число запасных блоков для данного случая, т.е. $x_j(k)$]. Заметим, что фактически каждый $x_j(k)=k$, однако, мы используем такое специальное обозначение, чтобы отслеживать принадлежность данного параметра к исходной к начальной когорте.

Легион в нашем случае – это совокупность когорт, т.е. совокупность параметров, характеризующих рассматриваемую последовательную систему. (Конечно, структура системы не обязана быть последовательной, просто сохранены прежние допущения.) Итак, легион в формальных терминах записывается как:

$L_j = (C_{j1}, C_{j2}, C_{j3}, \ldots, C_{jk}, \ldots\}=$

$=\{[R_j(0), 0, x_j(0)], [R_j(1), v_j, x_j(1)], [R_j(2), 2v_j, x_j(2)], \ldots, [R_j(k), kv_j, x_j(k)]\ldots\}.$

Теперь введем понятие «*взаимодействия*» легионов (обозначим эту операцию $\otimes^{LEG}$), рассмотрев сначала взаимодействие всего двух легионов. Под «взаимодействием» легионов будем понимать операцию, аналогичную Декартову произведению: каждая когорта первого

исследования

легиона «взаимодействует» с каждой из когорт второго легиона. Операцию «взаимодействия» когорт обозначим $\otimes^{COH}$.)
Иначе говоря, «взаимодействие» двух легионов порождает новый легион:

$$L^* = L_1 \otimes^{LEG} L_2 = \begin{Bmatrix} C_{11} \otimes^{COH} C_{21}, & C_{12} \otimes^{COH} C_{21}, & C_{13} \otimes^{COH} C_{21}, & \dots \\ C_{11} \otimes^{COH} C_{22}, & C_{12} \otimes^{COH} C_{22}, & C_{13} \otimes^{COH} C_{22}, & \dots \\ C_{11} \otimes^{COH} C_{23}, & C_{12} \otimes^{COH} C_{23}, & C_{13} \otimes^{COH} C_{23}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Легко заметить, что это просто иная форма Таблицы 4, приведённой Джоном Кеттелем в Приложении 1. Новые обозначения, новые слова, но, конечно, самая идея та же.

В результате такого «взаимодействия» двух легионов, мы получили новый легион, включающий взаимодействующие когорты.

Как же «взаимодействуют» когорты?

«Взаимодействие» когорт C_{jk} и C_{il} можно записать, как

$$C_{jk} \otimes^{COH} C_{il} = [R_j(k), kv_j, x_j(k)] \otimes^{COH} [R_i(l), lv_i, x_i(l)] =$$

$$[R_j(k) \otimes^{(R)} R_i(l),\ kv_j \otimes^{(V)} lv_i,\ x_j(k) \otimes^{(X)} x_i(l)] = [R_{ji}^*, V_{ji}^*, x_{ji}^*],$$

т.е. в результате «взаимодействия» двух когорт получается новая когорта с «взаимодействующими» одноименными манипулами.

Каждая из манипул «взаимодействует» с одноименной манипулой другой когорты по своим индивидуальным правилам. В данном случае $\otimes^R$ - «взаимодействие» вероятностей (простое умножение), $\otimes^V$ - «взаимодействие» стоимостей (простое сложение), но «взаимодействие» $\otimes^X$ позволяет накапливать информацию об использовании запасных блоков того или иного типа. (Вот здесь-то и понадобилось обозначение $x_j(k)$ вместо просто k, так как индекс j указывает, к какой когорте, т.е. к какому типу блока, относится данное число запасных блоков.)

В результате получаем:

$$R_{ji}^* = R_j(k) \otimes^R R_i(l) = R_j(k) \times R_i(l),$$

$$V_{ji}^* = kv_j \otimes^V lv_i = kv_j + lv_i,$$

$$x_{ji}^* = x_j(k) \otimes^X x_i(l) = \{x_j(k), x_i(l)\}.$$

Очевидно, такая манипуляция может быть выполнена с произвольным числом одновременно «взаимодействующих» легионов. При этом в сформированной на базе результирующего легиона доминирующей последовательности, одним из атрибутов будет именно значение вектора $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, соответствующего данному решению.

УПФ удобна не только для решения задач оптимального резервирования, она позволяет упростить анализ и других аналогичных задач. Например, для последовательно соединенных участков трубопровода при анализе пропускной способности, может быть введено «взаимодействие манипул» типа

$$Z^* = z_1 \otimes^Z z_2 \otimes^Z \dots \otimes^Z z_n = \min \{ z_1, z_{2, \dots,} z_n \},$$

в то время, как для параллельных участков трубопровода

$$Y^* = y_1 \otimes^y y_2 \otimes^y \dots \otimes^y y_n = z_1 + z_2 + _{\dots} + z_n,$$

т.е. возникает возможность анализировать и системы с сетевой структурой.

Для определения суммарной ошибки, возможно иногда учитывать «взаимодействие» вида

$$W^* = w_1 \otimes^w w_2 \otimes^w \dots \otimes^w w_n = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2},$$

и так далее.

<u>Список литературы:</u>

1. **J.D. Kettele, Jr.** Least-coast allocation of reliability investment. *Operations Research*, vol. 10, 1962.
2. **R.E. Bellman, S.E. Dreyfus**. Dynamic programming and reliability of multicomponent devices. *Operations Research*, vol. 6, 1958.
3. **И.А. Ушаков** (ред.) Оптимальные задачи надежности (сб. переводов). Москва, *Стандарты*, 1968.
4. **И.А. Ушаков**. Универсальная производящая функция. *Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика*, 1986, №3.
5. **И.А. Ушаков**. Производящий оператор. Сообщения по прикладной математике. *Вычислительный центр АН СССР*, Москва, 1986.
6. **G. Levitin, A. Lisnianski**. A new approach to solving problems of multistate system reliability optimization. *Quality and Reliability Engineering International*, vol.47, 2001
7. **G. Levitin, A. Lisnianski, H.Ben-Haim, D.Elmakis**. Redundancy optimization for series-parallel multi-state systems. *IEEE Transactions on Reliability* vol. 47, 1998
8. **G. Levitin**. A universal generating function approach for analysis of multi-state systems with dependent elements. *Reliability Engineering & System Safety,* vol. 84, 2004.
9. **G. Levitin**. *The Universal Generating Function in Reliability Analysis and Optimization*. Springer, 2005.
10. Г.Х. Гуд, Р.Э. Макол. Системотехника: Введение в проектирование больших систем. Пер. с англ. Москва, *Советское радио*, 1962.