АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕНАДЕЖНЫМИ РЕБРАМИ

Г.Ш. Цициашвили

•

e-mail: guram@iam.dvo.ru ,

690041, Владивосток, ул. Радио 7,

Институт прикладной математики ДВО РАН

В настоящей работе исследованы модели систем с ненадежными ребрами. Получены асимптотические соотношения для вероятности работы и распределения времени жизни в моделях. Непосредственное вычисление указанных вероятностных характеристик [1], [2] требует геометрически растущего по числу ребер сети количества арифметических операций. Основными параметрами сетей, на основе которых получены асимптотические формулы, являются длина кратчайшего пути и минимальная пропускная способность разреза. Разработана серия новых алгоритмов и формул для вычисления параметров полученных асимптотических соотношений.

Основные характеристики. Определим ориентированный граф Γ с конечным множеством вершин U и множеством W ребер (u,v). В этом графе есть единственная вершина u_*, в которую не входит ни одного ребра и единственная вершина u^*, из которой не выходит ни одного ребра, и в нем отсутствуют ребра вида (u,u).

Пусть $n(s)$ число ребер у s, $s\subseteq W$. Для $S\subseteq\{s:s\subseteq W\}$ положим

$$n(S)=\min_{s\in S} n(s),\ D(S)=\sum_{s:n(s)=n(S)}\ \prod_{(u,v)\in s} c(u,v),$$

$$C(S)=\min_{s\in S} C(s),\ C(s)=\sum_{(u,v)\in s} c(u,v),$$

$$C_1(S)=\min_{s\in S} C_1(s),\ C_1(s)=\max_{(u,v)\in s} c(u,v),$$

$$T_h(S)=\sum_{s:C_1(s)=C_1(S)}\ \prod_{(u,v)\in s} \exp\left(-h^{-c(u,v)}\right),$$

$c(u,v)$ - положительная целочисленная функция. Обозначим $N(S)$, $N_1(S)$, $N_*(S)$ - число $s\in S: C(s)=C(S)$, $C_1(s)=C_1(S)$, $n(s)=n(S)$ соответственно.

Пусть $\mathfrak{R}$ множество всех путей R без самопересечения из вершины u_* в u^*. Введем в рассмотрение множества $\mathcal{A}=\left\{A\subset U:\ u_*\in A,\ u^*\notin A\right\}$, $L=L(A)=\left\{(u,v):\ u\in A,\ v\notin A\right\}$ и $\mathcal{L}=\{L(A), A\in \mathcal{A}\}$ - множество всех разрезов в графе Γ.

Графы с ненадежными ребрами. Сопоставим каждому ребру графа Γ число $\alpha(u,v)=I($ребро (u,v) работает$)$, где $I(G)$ - индикаторная функция события G. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\bigvee_{R\in R}\ \bigwedge_{(u,v)\in R}\alpha(u,v)=\bigvee_{L\in L}\ \bigwedge_{(u,v)\in L}\alpha(u,v). \qquad (1)$$

Обозначим $\alpha(\Gamma)$ величину, входящую в обе стороны равенства (1) и характеризующую работу графа Γ.

Предположим, что $\alpha(u,v),(u,v)\in W$ независимые случайные величины, $P(\alpha(u,v)=1)=p_{u,v}(h)$, $q_{u,v}(h)=1-p_{u,v}(h)$, где h - некоторый малый параметр: $h\to 0$. Тогда имеют место следующие асимптотические соотношения при $h\to 0$.

7. Пусть $p_{u,v}(h)\sim c(u,v)h$, тогда $P(\alpha(\Gamma)=1)\sim h^{n(R)}\quad D(R)$.
8. Пусть $p_{u,v}(h)\sim h^{c(u,v)}$, тогда $P(\alpha(\Gamma)=1)\sim N(R)\quad h^{C(R)}$.
9. Пусть $p_{u,v}(h)\sim \exp\left(-h^{-c(u,v)}\right)$, тогда $P(\alpha(\Gamma)=1)\sim T_h(R)$.
10. Пусть $q_{u,v}(h)\sim c(u,v)h$, тогда $P(\alpha(\Gamma)=0)\sim h^{n(L)}\quad D(L)$.
11. Пусть $q_{u,v}(h)\sim h^{c(u,v)}$, тогда $P(\alpha(\Gamma)=0)\sim N(L)h^{C(L)}$.
12. Пусть $q_{u,v}(h)\sim \exp\left(-h^{-c(u,v)}\right)$, тогда $P(\alpha(\Gamma)=0)\sim T_h(L)$.

Приложение к моделям времени жизни. Пусть $\tau(u,v)$- независимые случайные величины, имеющие смысл времен жизни ребер $(u,v)\in W$. Обозначим $P(\tau(u,v)>t)=p_{u,v}(h)$ и положим время жизни графа Γ равным $\tau(\Gamma)=\min_{R\in R}\max_{(u,v)\in R}\tau(u,v)$.

Если $h=h(t)$ монотонно убывающая и непрерывная функция и $h\to 0$, $t\to\infty$, то асимптотические соотношения 1, 2, 3 остаются верными при замене $P(\alpha(\Gamma)=1)$ на $P(\tau(\Gamma)>t)$. Если hмонотонно возрастающая и непрерывная функция и $h\to 0$, $t\to 0$, то соотношения 4, 5, 6 верны при замене $P(\alpha(\Gamma)=0)$ на $P(\tau(\Gamma)\le t)$.

Вычисление характеристик графа. Для $A\in A$ определим $Q(A)=\{v\notin A:\exists u\in A,(u,v)\in W\}$ и построим множества $A_1=Q(A_0)=\{u_*\}$, $A_{k+1}=A_k\ \mathrm{r}\ Q(A_k)$, $k=1,2,...$ Положим $n=n(R)=\min\left(k:u^*\in A_k\right)$.

Обозначим $\varphi(u,v)$, $(u,v)\in W$ целочисленную неотрицательную функцию: $\sum_{(u,v)\in W}\varphi(u,v)=\sum_{(v,u)\in W}\varphi(v,u)$, $\varphi(v,u)\le c(u,v)$, $(u,v)\in W$, и назовем ее потоком. Величина потока – сумма $\sum_{(u_*,v)\in W}\varphi(u_*,v)$.

Обозначим $\Gamma_1\ \ \Gamma_2$ граф, полученный из графов Γ_1, Γ_2 соединением их начальных и конечных вершин, соответственно, а $\Gamma_1\to\Gamma_2$ граф, полученный склеиванием конечной вершины графа Γ_1 с начальной вершиной графа Γ_2. Будем понимать множества R_1, L_1, R_2, L_2 для графов Γ_1, Γ_2 в том же смысле, что и множества R, L для графа Γ. Всюду далее $u_i\in Q(A_{i-1})$, $i=1,...,n$.

Процедура для $D(R)$: $D(u_1)=1,\ u_1\in A_1,\ D(u_{k+1})=\sum\limits_{u_k\in Q(A_{k-1})} D(u_k)\ c(u_k,u_{k+1}),\ 1\le k<n,$ $D(R)=D(u^*)$.

Процедура для $N_*(R)$: $N_*(u_{n-1})=1,\quad u_{n-1}\in Q(A_{n-2}),$ $N_*(u_{n-k-1})=\sum\limits_{u_{n-k}\in Q(A_{n-k-1})} N_*(u_{n-k})\ \ I((u_{n-k-1},u_{n-k})\in W),\ 1\le k<n-1,$

$N_*(R)=N_*(u_*)$.

Алгоритмы для $C(R),N(R)$: каждое ребро (u,v) графа разбивается на ребра единичной длины (т.к. функция $c(u,v)$ целочисленна), преобразовав граф Γ в граф Γ_1 с ребрами единичной длины, далее, используя процедуры нахождения $n=n(R)$, $N_*(R)$ для графа Γ_1, вычисляются $C(R)$, $N(R)$ для графа Γ.

Алгоритмы для $C(L),n(L)$: пользуясь теоремой [3] о совпадении максимальной величины потока с минимальной пропускной способностью разрезов $C(L)$ и алгоритмом Форда-Фалкерсона (Ford-Falkerson), определяется $C(L)$, а $n(L)$ совпадает с вычисленной величиной $C(L)$ при $c(u,v)\equiv 1$.

Полагаем $W=\{(u_k,u_{k+1}),u_i\in Q(A_{i-1}),i=1,...,n\}$ в последующих пяти пунктах.

Процедура для $C_1(R)$: $C_1(u_1)=0,\ u_1\in A_1,\quad C_1(u_{k+1})=\min\limits_{u_k\in Q(A_{k-1})}\max(C_1(u_k),c(u_k,u_{k+1})),$ $1\le k<n,\ C_1(R)=C_1(u^*)$.

Процедура для $N_1(R)$: $N_1(u_1)=1,\ u_1\in A_1,\quad N_1(u_{k+1})=\sum\limits_{u_k:\ C_1(u_{k+1})=\max(C_1(u_k),c(u_k,u_{k+1}))} N_1(u_k),$ $1\le k<n,\ N_1(R)=N_1(u^*)$.

Процедура для $C_1(L)$: так как из соотношения (1) следует, что $C_1(L)=\max\limits_{R\in R}\min\limits_{(u,v)\in R} c(u,v)$, то $C_1(L)$ определяется из формул $C_1(u_{k+1})=\max\limits_{u_k\in Q(A_{k-1})}\min(C_1(u_k),c(u_k,u_{k+1})),\quad 1\le k<n,$ $C_1(u_1)=\infty,\quad u_1\in A_1,\ \ C_1(L)=C_1(u^*)$.

Явные формулы для $C(L)$, $N(L)$: если

$c(u_k,u_{k+1})\equiv c_k,\ 1\le k<n-1,\ c(u_{n-1},u^*)=c_n,\ \ N_k$ - число вершин в множестве $Q(A_{k-1})$, $1\le k<n-1,\ \ N_n=1$, то $C(L)=\min\limits_{1\le k<n} c_kN_kN_{k+1}$, а $N(L)$- число элементов множества $\{k:M=c_kN_kN_{k+1},1\le k<n\}$.

Узкие звенья в графе Γ. Предположим, что для любых пар ребер $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in W$, таких, что $(u_1,v_1)\ne(u_2,v_2)$, выполняется неравенство $c(u_1,v_1)\ne c(u_2,v_2)$, тогда существует единственное ребро $(u(S),v(S))\in s:C_1(s)=c(u(S),v(S))$, причем $-\ln T_h(S)\sim h^{-c(u(S),v(S))}$, $h\to 0$.

Назовем ребро $(u(S),v(S))$ узким звеном для пары (Γ,S).

3′. Пусть $p_{u,v}(h)\sim\exp\left(-h^{-c(u,v)}\right)$, $h\to 0$, тогда $-\ln P(\alpha(\Gamma)=1)\sim -h^{-c(u(R),v(R))}$.

6′. Пусть $q_{u,v}(h)\sim\exp\left(-h^{-c(u,v)}\right)$, $h\to 0$, тогда $-\ln P(\alpha(\Gamma)=0)\sim -h^{-c(u(L),v(L))}$.

В условиях утверждения $\mathbf{3'}$ или утверждения $\mathbf{6'}$ определение узкого звена $(u(S),v(S))$ производится с помощью *процедуры для* $C_1(S)$ при $S=R$ или $S=L$, соответственно. Определение узкого звена и соответствующие ему асимптотические формулы могут быть перенесены с сети на произвольную логическую функцию, представленную в дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной форме.

Рекурсивные формулы для графа $\Gamma_1 \quad \Gamma_2$:

$$C(R) = \min(C(R_1), C(R_2)), \tag{2}$$

$$N(R) = \begin{cases} N(R_1), C(R_1) < C(R_2), \\ N(R_2), C(R_2) > C(R_1), \\ N(R_1) + N(R_2), C(R_1) = C(R_2), \end{cases} \tag{3}$$

$$C(L) = C(L_1) + C(L_2), \tag{4}$$

$$N(L) = N(L_1)N(L_2), \tag{5}$$

$$C_1(L) = \max(C(L_1), C(L_2)), \tag{6}$$

$C_1(R)$, $n(R)$ определяются аналогично (2), $N_1(R), n(L)$ определяются аналогично (3), (4), соответственно.

Рекурсивные формулы для графа $\Gamma_1 \to \Gamma_2$. $C(R)$, $n(R)$ вычисляются аналогично (4), $N(R)$, $N_1(R)$ вычисляются аналогично (5), $C_1(R)$ вычисляются аналогично (6), $C(L), C_1(L), n(L)$ определяются аналогично (2), $N(L), N_1(L)$ определяются аналогично (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рябинин И.А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем. Автоматика и телемеханика, 2003, № 7, с. 178-186.
2. Соложенцев Е.Д. Особенности логико-вероятностной теории риска с группами несовместных событий. Автоматика и телемеханика, 2003, №7, с. 187-203.
3. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. Учебное пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1976.