УЗКИЕ МЕСТА В СИСТЕМЕ С НЕНАДЕЖНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Гурами Цициашвили

●

e-mail: guram@iam.dvo.ru

690041, Владивосток, ул. Радио 7,

Институт прикладной математики ДВО РАН

В работе рассматриваются модели логических систем со случайными элементами [1], [2], для которых дается формальное определение узких мест и строятся алгоритмы их нахождения. Проведен асимптотический анализ вероятности работы (или отказа) этих систем при соответствующих асимптотических условиях на вероятности работы (или отказа) их элементов. Все основные определения и алгоритмы основаны на идее рекурсивного построения модели логической системы со случайными элементами.

Предварительные сведения и обозначения

Пусть Z - множество, содержащее $|Z|$ логических переменных z. Определим рекурсивно класс $\mathcal{G}$ логических выражений от логических переменных $z \in Z$:

$$z \in Z \Rightarrow z \in \mathcal{G},\ A_1 \in \mathcal{G},\ A_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow (A_1 \wedge A_2) \in \mathcal{G},\ (A_1 \vee A_2) \in \mathcal{G}. \qquad (1)$$

Обозначим $2^Z = \left\{Z_i,\, i \in I = \left\{1,...,2^Z\right\}\right\}$ совокупность всех подмножеств множества Z.

Определим дизъюнктивную нормальную форму $D(A)$ логического выражения $A \in \mathcal{G}$: для $z \in Z$, $A_1 \in \mathcal{G}$, $A_2 \in \mathcal{G}$, $I_1, I_2 \subseteq I$

$$\begin{gathered} D(z) = z,\, D(A_1) = \bigvee_{i \in I_1}\left(\bigwedge_{z \in Z_i} z\right),\, D(A_2) = \bigvee_{i \in I_2}\left(\bigwedge_{z \in Z_i} z\right) \Rightarrow \\ D(A_1 \vee A_2) = \bigvee_{i \in I_1 \cup I_2}\left(\bigwedge_{z \in Z_i} z\right),\, D(A_1 \wedge A_2) = \bigvee_{i \in I_1, j \in I_2}\left(\bigwedge_{z \in Z_i \cup Z_j} z\right) \end{gathered} \qquad (2)$$

Аналогичным образом определим конъюнктивную нормальную форму $K(A)$, $A \in \mathcal{G}$: для $z \in Z$, $A_1 \in \mathcal{G}$, $A_2 \in \mathcal{G}$, $I_1, I_2 \subseteq I$

$$K(z)=z, K(A_1)=\bigwedge_{i\in I_1}\left(\bigvee_{z\in Z_i} z\right), K(A_2)=\bigwedge_{i\in I_2}\left(\bigvee_{z\in Z_i} z\right)\Rightarrow$$
$$K(A_1\vee A_2)=\bigwedge_{i\in I_1, j\in I_2}\left(\bigvee_{z\in Z_i\cup Z_j} z\right), K(A_1\wedge A_2)=\bigwedge_{i\in I_1\cup I_2}\left(\bigvee_{z\in Z_i} z\right) \tag{3}$$

Для совокупностей множеств $\mathcal{X}=\{X\}\subseteq 2^Z$, $\mathcal{Y}=\{Y\}\subseteq 2^Z$ положим

$$\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}=\{X\cup Y : X\in\mathcal{X}, Y\in\mathcal{Y}\},\ Z(\mathcal{X})=\bigcup_{X\in\mathcal{X}} X,\ N(\mathcal{X})=\min\left(|X| : X\in\mathcal{X}\right).$$

Если $Z(\mathcal{X})\cap Z(\mathcal{Y})=\emptyset$, то

$$N(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})=N(\mathcal{X})+N(\mathcal{Y}),\ N(\mathcal{X}\cup\mathcal{Y})=\min\left(N(\mathcal{X}),N(\mathcal{Y})\right). \tag{4}$$

Предположим, что $p_z=P(z=1)$, $q_z=P(z=0)$, $p_z+q_z=1$, и случайные величины $z\in Z$ независимы в совокупности. Логическую функцию A со случайными z, принимающими значения 0,1, назовем логической системой $\mathcal{A}$.

Низконадежные элементы

Пусть $\exists$ положительное число d такое, что для $\forall z\in Z$ $\exists$ натуральное число $c(z)$:

$$p_z=p_z(h)\sim\exp\left(-h^{-dc(z)}\right),\ h\to 0. \tag{5}$$

Обозначим $\tau(z)$ независимые случайные величины, имеющие смысл времен жизни логических элементов $z\in Z$, и $P(\tau(z)>t)=p_z(h)$. Если $h=h(t)$ монотонно убывающая и непрерывная функция и $h\to 0$, $t\to\infty$, то соотношение (5) можно преобразовать к виду

$$P(\tau(z)>t)\sim\exp\left(-h(t)^{-dc(z)}\right),\ t\to\infty,$$

характерному для Вейбулловской асимптотики, используемой в моделях времени жизни систем, состоящих из старых и потому низконадежных элементов [3], [4].

По заданному $D(A)=\bigvee_{i\in I_1}\left(\bigwedge_{z\in Z_i} z\right)$ определим $C(A)=\min_{i\in I}\max_{z\in Z_i} c(z)$. Тогда из (2) имеем

$$C(A_1\wedge A_2)=\max\left(C(A_1),C(A_2)\right),\ C(A_1\vee A_2)=\min\left(C(A_1),C(A_2)\right). \tag{6}$$

Сопоставим каждой логической функции A семейства множеств $\mathcal{S}(A)\subseteq 2^Z$, $\mathcal{T}(A)\subseteq 2^Z$ с помощью рекурсивных соотношений: $\mathcal{S}(z)=\{z\},\mathcal{T}(z)=\{z\}$,

$$\mathcal{S}(A_1 \wedge A_2) = \begin{cases} \mathcal{S}(A_1), C(A_1) > C(A_2), \\ \mathcal{S}(A_2), C(A_1) < C(A_2), \\ \mathcal{S}(A_1) \otimes \mathcal{S}(A_2), C(A_1) = C(A_2), \end{cases} \quad \mathcal{T}(A_1 \wedge A_2) = \begin{cases} \mathcal{T}(A_1), C(A_1) > C(A_2), \\ \mathcal{T}(A_2), C(A_1) < C(A_2), \\ \mathcal{T}(A_1) \cup \mathcal{T}(A_2), C(A_1) = C(A_2), \end{cases}$$

$$\mathcal{S}(A_1 \vee A_2) = \begin{cases} \mathcal{S}(A_1), C(A_1) < C(A_2), \\ \mathcal{S}(A_2), C(A_1) > C(A_2), \\ \mathcal{S}(A_1) \cup \mathcal{S}(A_2), C(A_1) = C(A_2), \end{cases} \quad \mathcal{T}(A_1 \vee A_2) = \begin{cases} \mathcal{T}(A_1), C(A_1) < C(A_2), \\ \mathcal{T}(A_2), C(A_1) > C(A_2), \\ \mathcal{T}(A_1) \otimes \mathcal{T}(A_2), C(A_1) = C(A_2). \end{cases}$$

Пусть $I' = \left\{ i \in I : \max\limits_{z \in Z_i} c(z) = C(A) \right\}$, тогда из соотношений (2), (6) следует, что

$$\mathcal{S}(A) = \left\{ \left\{ z \in Z_i : c(z) = C(A) \right\} : i \in I' \right\}, \qquad (7)$$

а из формул (1), (2), (6), (7) вытекают следующие утверждения.

Теорема 1. *Из условия (5) следует, что* $-\ln P(A=1) \sim N(\mathcal{S}(A)) h^{-C(A)}, h \to 0$.

Теорема 2. *Из условия (5) следует справедливость утверждений:*

1. для любого $S \in \mathcal{S}(A)$ *справедливо соотношение*

$$\left(c(z) \to c(z) - \varepsilon, z \in S\right) \Rightarrow \left(C(A) \to C(A) - \varepsilon\right), 0 < \varepsilon < 1; \qquad (8)$$

2. если $S \subseteq Z$ *и удовлетворяет соотношению (8), то* $\exists S_* \in \mathcal{S}(A)$: $S_* \subseteq S$;

3. для любого $T \in \mathcal{T}(A)$ *справедливо соотношение*

$$\left(c(z) \to c(z) + \varepsilon, z \in T\right) \Rightarrow \left(C(A) \to C(A) + \varepsilon\right), 0 < \varepsilon < 1; \qquad (9)$$

4. если $T \subseteq Z$ *и удовлетворяет соотношению (9), то* $\exists T_* \in \mathcal{T}(A) : T_* \subseteq T$.

Теорема 2 позволяет назвать множества из семейств $\mathcal{S}(A), \mathcal{T}(A)$ узкими местами в логической системе $\mathcal{A}$ с низконадежными элементами. Причем в силу пункта 1 (пункта 3) теоремы 2 увеличение (уменьшение) надежности элементов z из любого множества $S \in \mathcal{S}(A)$ (множества $T \in \mathcal{T}(A)$) позволяет увеличить (уменьшить) надежность всей логической системы $\mathcal{A}$. С помощью (6) и утверждения теоремы 2 можно рекурсивно вычислять числа $C(A)$, $N(\mathcal{S}(A))$ семейств множеств $\mathcal{S}(A), \mathcal{T}(A)$ и по ним строить более узкие семейств множеств

$$\mathcal{S}'(A) = \left\{ S \in \mathcal{S}(A) : |S| = N(\mathcal{S}(A)) \right\}, \ \mathcal{T}'(A) = \left\{ T \in \mathcal{T}(A) : |T| = N(\mathcal{T}(A)) \right\}.$$

Высоконадежные ребра

Пусть $\exists$ положительное число d такое, что для $\forall$ элемента $z \in Z$ $\exists$ натуральное число $c(z)$:

$$q_z = q_z(h) \sim \exp\left(-h^{-dc(z)}\right),\ h \to 0. \qquad (10)$$

Обозначим $P\left(\tau(z) \le t\right) = q_z(h)$. Если h монотонно возрастающая и непрерывная функция и $h \to 0$, $t \to 0$, то соотношение (10) можно преобразовать к виду

$$P\left(\tau(z) \le t\right) \sim \exp\left(-h(t)^{-dc(z)}\right),\ t \to 0,$$

характерному для Вейбулловской асимптотики и применяемому в моделях времени жизни систем, состоящих из новых и потому высоконадежных элементов.

По заданному $K(A) = \bigwedge_{i \in I_1}\left(\bigvee_{z \in Z_i} z\right)$ переопределим $C(A) = \min_{i \in I} \max_{z \in Z_i} c(z)$. В силу (3) имеем

$$C(A_1 \wedge A_2) = \min\left(C(A_1), C(A_2)\right),\ C(A_1 \vee A_2) = \max\left(C(A_1), C(A_2)\right). \qquad (11)$$

Пусть $I' = \left\{ i \in I : \min_{z \in Z_i} c(z) = C(A) \right\}$, тогда из соотношений (3), (11) следует, что и в случае высоконадежных элементов справедливо соотношение (7). Из формул (3), (7), (11) вытекают утверждения.

Теорема 3. *При выполнении условия (10)* $-\ln P(A=0) \sim N\left(\mathcal{S}(A)\right) h^{-C(A)},\ h \to 0$.

Теорема 4. *Из условия (10) следует справедливость утверждений:*

1. для любого $S \in \mathcal{S}(A)$ *справедливо соотношение*

$$\left(c(z) \to c(z) + \varepsilon,\ z \in S\right) \Rightarrow \left(C(A) \to C(A) + \varepsilon\right),\ 0 < \varepsilon < 1; \qquad (12)$$

2. если множество $S \subseteq Z$ *и удовлетворяет соотношению (12), то*

$$\exists S_* \in \mathcal{S}(A) : S_* \subseteq S;$$

3. для любого $T \in \mathcal{T}(A)$ *справедливо соотношение*

$$\left(c(z) \to c(z) - \varepsilon,\ z \in T\right) \Rightarrow \left(C(A) \to C(A) - \varepsilon\right),\ 0 < \varepsilon < 1; \qquad (13)$$

4. если множество $T \subseteq Z$ *и удовлетворяет соотношению (13), то*

$$\exists T_* \in \mathcal{T}(A) : T_* \subseteq T.$$

Теорема 4 позволяет назвать множества из семейств $\mathcal{S}(A),\mathcal{T}(A)$ узкими местами в логической системе $\mathcal{A}$ с высоконадежными элементами. В силу пункта 1 (пункта 3) теоремы 4 увеличение (уменьшение) надежности элементов z из любого $S \in \mathcal{S}(A)$ $(T \in \mathcal{T}(A)$ позволяет увеличить (уменьшить) надежность всей логической системы $\mathcal{A}$. С помощью формулы (12) и утверждения теоремы 4 можно рекурсивно вычислять числа $C(A), N(\mathcal{S}(A))$ семейства множеств $\mathcal{S}(A),\mathcal{T}(A)$ и по ним строить более узкие семейства множеств $\mathcal{S}'(A),\mathcal{T}'(A)$.

Замечание 1. *Обозначим* $\mathcal{X}_1 = \{Z_i, i \in I_1\}$, $\mathcal{X}_2 = \{Z_i, i \in I_2\}$ *и предположим, что* $Z(\mathcal{X}_1) \cap Z(\mathcal{X}_2) = \varnothing$. *Тогда формула (4) может существенно упростить вычисление значений* $N(\mathcal{S}(A_1) \otimes \mathcal{S}(A_2))$, $N(\mathcal{S}(A_1) \cup \mathcal{S}(A_2))$, *которые необходимы при рекурсивном определении величины* $N(\mathcal{S}(A))$, *входящей в асимптотические формулы теорем 1, 3.*

Литература

1. Рябинин И.А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем// Автоматика и телемеханика, 2003, № 7, с. 178-186.
2. Соложенцев Е.Д. Особенности логико-вероятностной теории риска с группами несовместных событий// Автоматика и телемеханика, 2003, № 7, с. 187-203.
3. Rocchi P. Boltzmann-like Entropy in Reliability Theory// Entropy, 2002, vol. 4, p. 142-150.
4. Rocchi P. The Notion of Reversibility and Irreversibility at the Base of the Reliability Theory// Proceedings of the International Symposium on Stochastic Models in Reliability, Safety, Security and Logistics. Sami Shamoon College of Engineering. Beer Sheva, February 15-17, 2005, p. 287-291.