

# RELIABILITY:

## Theory & Applications

Vol.2 No.2, June, 2007

Electronic Journal  
Of International Group On Reliability



ISSN 1932-2321

© "Reliability: Theory & Applications", 2007

© I.A.Ushakov, 2007

© A.V.Bochkov, 2007

<http://www.gnedenko-forum.org/Journal/index.htm>

**All rights are reserved**

The reference to the magazine "Reliability: Theory & Applications"  
at partial use of materials is obligatory.

RELIABILITY:  
THEORY  
& APPLICATIONS

No. 2 (Vol. 2)  
June 2007

ISSN 1932-2321

San Diego  
2007

## Editorial Board



### Editor-in-Chief

Igor Ushakov  
[igorushakov@gmail.com](mailto:igorushakov@gmail.com)



### Scientific Secretary

Alexander Bochkov  
[a\\_bochkov@yahoo.com](mailto:a_bochkov@yahoo.com)



### Associate Editor

Yu.K. Belyaev  
[yuri.belyaev@matstat.umu.se](mailto:yuri.belyaev@matstat.umu.se)



### Associate Editor

I.B. Gertsbakh  
[elyager@bezeqint.net](mailto:elyager@bezeqint.net)



### Associate Editor

I.N. Kovalenko  
[kovigo@yandex.ru](mailto:kovigo@yandex.ru)



### Associate Editor

M. Nikulin  
[M.S.Nikouline@sm.u-bordeaux2.fr](mailto:M.S.Nikouline@sm.u-bordeaux2.fr)



### English Technical Editor

Kristina Ushakov  
[kudesigns@yahoo.com](mailto:kudesigns@yahoo.com)

## Send your paper

e-Journal *Reliability: Theory & Applications* publishes papers, reviews, memoirs, and bibliographical materials on Reliability, Quality Control, Safety, Survivability and Maintenance.

Theoretical papers have to contain new problems, finger practical applications and should not be overloaded with clumsy formal solutions.

Priority is given to descriptions of case studies.

General requirements: papers have to be presented in English in MSWord format; desirably to be supplied with Russian version, since (at least now) most of readers are Russians.

The total volume of the paper (with illustrations) has to be not more than 15 pages (Times New Roman TTF - 12 pt - 1,5 intervals).

Publication in this e-Journal is equal to publication in other International scientific journals.

Papers directed by Members of the Editorial Boards are accepted without referring.

The Editor has the right to change the paper title and make editorial corrections.

The authors keep all rights and after the publication can use their materials (re-publish it or present at conferences).

Send your papers to

the Editor-in-Chief,  
Igor Ushakov

[iushakov2000@yahoo.com](mailto:iushakov2000@yahoo.com)

or

the Scientific Secretary,  
Alexander Bochkov

[a.bochkov@gmail.com](mailto:a.bochkov@gmail.com)

# List of contents

We apologies that some papers from Russian version of the Journal are not translated into English.

## English

---

WORKSHOP ON ASYMPTOTIC STATISTICS AND ITS APPLICATIONS TO SURVIVAL ANALYSIS AND RELIABILITY IN HONOR OF ILDAR IBRAGIMOV .....	7
<b>IEEE 2007</b>	
INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRIAL ENGINEERING AND ENGINEERING MANAGEMENT, SINGAPORE, DECEMBER 2-5, 2007.....	8
THE 7TH INTERNATIONAL CONFERENCE RELIABILITY AND STATISTICS IN TRANSPORTATION AND COMMUNICATION (RELSTAT'07) 24-27 OCTOBER 2007. RIGA, LATVIA.....	9
<b>B. Dimitrov, G. Hayrapetyan, and P. Stanchev</b> AGING AND LONGEVITY CONTROL OF BIOLOGICAL SYSTEMS VIA DRUGS – A RELIABILITY MODEL.....	10
<b>A. Krishnamorthy, Vishwanath C. Narayanan, T. G. Deepak</b> MAXIMIZATION OF RELIABILITY OF A K-OUT-OF-N SYSTEM WITH REPAIR BY A FACILITY ATTENDING EXTERNAL CUSTOMERS IN A RETRIAL QUEUE .....	21
<b>V.M. Abramov</b> CONFIDENCE INTERVALS ASSOCIATED WITH PERFORMANCE ANALYSIS OF SYMMETRIC LARGE CLOSED CLIENT/SERVER COMPUTER NETWORKS.....	32
<b>G.Sh. Tsitsiashvili</b> NARROW PLACES IN LOGICAL SYSTEMS WITH ANRELIABLE ELEMENTS .....	43
<b>V.Gh. VODĀ</b> A NEW GENERALIZATION OF RAYLEIGH DISTRIBUTION .....	47
<b>G.A. Fedotova, N.I. Voropai</b> OPTIMISATION OF RELIABILITY OF POWER SUPPLY TO CONSUMERS.....	57
<b>A.V. Bochkov, I.A. Ushakov</b> SENSITIVITY ANALYSIS OF OPTIMAL COUNTER-TERRORISM RESOURCES ALLOCATION UNDER SUBJECTIVE EXPERT ESTIMATES .....	69
<b>J. Kettelle</b> WHEN THREE'S NOT A CROWD.....	77
<b>I.B. Gertsbakh</b> MORE ABOUT RIGA'S RELIABILITY SCHOOL .....	86

**Russian**

---

<b>В.М. Абрамов</b> ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С АНАЛИЗОМ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИММЕТРИЧНЫХ БОЛЬШИХ ЗАМКНУТЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ.....	96
<b>Ю.К.Беляев</b> ВОСПОМИНАНИЯ О БОРИСЕ ВЛАДИМИРОВИЧЕ ГНЕДЕНКО.....	105
<b>Г.Ш. Цициашвили</b> УЗКИЕ МЕСТА В СИСТЕМЕ С НЕНАДЕЖНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ .....	112
<b>Г.А. Федотова, Н.И. Воропай</b> ОПТИМИЗАЦИЯ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ.....	117
<b>Г.А. Федотова</b> ОТЗЫВ НА ПУБЛИКАЦИЮ В ЖУРНАЛЕ «RELIABILITY: THEORY & APPLICATIONS» РЕФЕРАТИВНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ОБЗОРА В. ШЕРА.....	131
<b>Г. Ф. Ковалев</b> О ФЕДЕРАЛЬНОМ ЗАКОНЕ «О ТЕХНИЧЕСКОМ РЕГУЛИРОВАНИИ» И ПРОБЛЕМЕ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	132
<b>Журнал рекомендует:</b> КРУИЗНО-ПРОГУЛОЧНЫЙ КАТЕР «МИРАЖ» (BOAT "MIRAGE").....	134

WORKSHOP  
on  
**Asymptotic Statistics and Its Applications  
to Survival Analysis and Reliability**  
in Honor of Ildar Ibragimov

6-7 SEPTEMBRE 2007

Université Victor Segalen Bordeaux 2

IFR-99 « SANTE PUBLIQUE », ISPED,  
UFR « SCIENCES ET MODELISATION »,  
INSTITUT de MATHEMATIQUES de BORDEAUX

Organized by :

Mikhail Nikulin and Daniel Commenges

Joint Session of the Seminar *Biostatistics*, IFR-99 « Santé Publique », the European Seminar *Mathematical Methods for Survival Analysis, Reliability and Quality of Life* and the Seminar of "Applied Mathematics of Bordeaux" (IMB)

**Topics of the Workshop**

Statistical Experiments, Empirical Processes, Nonparametric and Semiparametric Statistics, Model selection, Statistics of random processes, Minimax approach, Survival analysis, Accelerated life trials, Degradation models, Reliability, Quality of Life

**Frais d'inscription/Registration fee: 50 Euros.**

**Diner de Gala/Gala dinner: 50 euros.**

In order to be registered, participants are asked to send an E-mail to:  
Mme Elisabeth Cure (Elisabeth.Cure@sm.u-bordeaux2.fr).

**Accommodation:** There are many nice hotels in Bordeaux not far from the University.

Hotel *La Pelouse* \*\*, Tel: 33 (0) 5 56 93 17 33; Fax: 33 (0) 5 56 24 66 71;

[www.hotel-lapelouse.com](http://www.hotel-lapelouse.com)

Hotel *Alton* \*\*, Tel: 33 (0) 5 56 99 55 55; Fax: 33 (0) 5 56 99 55 99;

Hotel *Continental* \*\*, Tel: 33 (0) 5 56 52 66 00 ; Fax: 33 (0) 5 56 52 77 97,

Hotel *Chez Philip* \*\*, Tel : 33 (0) 5 56 80 46 46, Fax : 33 (0) 5 57 96 90 41,

Hotel *Bristol* \*\*, Tel : 33 (0) 5 56 81 85 01 ; Fax : 33 (0) 5 56 51 24 06

Hotel *Clemenceau* \*\*, Tel: 33 (0) 5 56 52 98 98; Fax: 33 (0) 5 56 81 24 91

To get the full list of hotels, please visit, the Web site [www.hotel-bordeaux.com](http://www.hotel-bordeaux.com)

**More information** about the Workshop will be given on the WEB page of the Workshop: <http://www.sm.u-bordeaux2.fr/stat/>



[www.IEEM2007.ORG](http://www.ieem2007.org)

Organized by  
IEEE EMS  
Singapore Chapter

General Chairs  
Say Wei FOO  
Thong Ngee GOH

#### Organizing Committee Chairs

Roger JIAO  
Kay Chuan TAN

#### Program Chairs

Martin HELANDER  
Min XIE

#### Subcommittee Chairs

Finance: Zhang WU  
Publicity: Szu Hui NG  
Logistics: Siong Lin HO  
Publication: Anil VERMA  
Local Arrangement: Kah Hin CHAI  
Social Event: Hung Kei TANG  
Sponsorship: Arun KUMAR  
Tutorial: Maode MA

#### Advisory Committee

Mitchell M. Tseng (chair)  
Daniel Berg  
E.A. Elsayed  
Boaz Golany  
Robert Grubbstrom  
Larry Y.C. Ho  
Tinus Pretorius  
Ralf Reichwald  
Gavriel Salvendy  
Ue-Pyng Wen

#### Program Committee

Participations of leading scholars are welcome. Please contact any of the chairs with your resume.

#### Conference Secretariat

Meeting Matters International  
73 Tras Street #04-01  
Singapore 079012  
Tel: +65 6221 2310  
Fax: +65 6221 2760  
Email: [info@ieem2007.org](mailto:info@ieem2007.org)



## International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management

Singapore, December 2-5, 2007



### CALL FOR PAPERS AND PARTICIPATION

The International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM) aims to provide a forum to disseminate, to all branches industries, information on the most recent and relevant innovations, theories and practices in Industrial Engineering and Engineering Management. Founded by the Industrial Engineering and Engineering Management Department of the Hong Kong University of Science and Technology in 1994, the conference has been hosted by leading universities in Asia and has grown over the years in tandem with the rising importance of industrial engineering in Asia.

This year, the IEEE Engineering Management Society Singapore Chapter is proud to be the host to link researchers and practitioners in different branches of industrial engineering and engineering management from around the world.

We invite papers and proposals for special sessions/tracks or tutorials/workshops related to all areas in industrial engineering and engineering management.

#### Important Dates

Full paper submission: 16 June 2007  
Notification of acceptance: 16 August 2007  
Early bird registration: 16 September 2007  
Final camera-ready paper due: 16 September 2007

#### Publication

All submissions will be peer reviewed by an International Program Committee. Accepted papers will be published in the conference proceedings, which will appear in the IEEEExplore database and indexed by Engineering Index (EI). Extended papers may be considered for special issues of selected international journals, subject to further review.

#### About Singapore

Singapore - an inspiring city-state at the heart of Asia - one of the world's most exciting and dynamic regions, where East blends harmoniously with West, tradition with modernity and sophistication with nature, creating a unique and stimulating urban experience. For more info: <http://www.visitsingapore.com/>







The K. Kordonsky  
Charitable Foundation

The 7<sup>th</sup> International Conference  
**RELIABILITY and STATISTICS**  
 in **TRANSPORTATION and COMMUNICATION (RelStat'07)**  
 24-27 October 2007. Riga, Latvia

#### PURPOSE

The purpose of the conference is to bring together academics and professionals from all over the world to discuss the themes of the conference:

- Theory and Applications of Reliability and Statistics
- Reliability and Safety of Transport Systems
- Rare Events and Risk Management
- Modelling and Simulation
- Intelligent Transport Systems
- Transport Logistics
- Education Programmes and Academic Research in Reliability and Statistics

#### DEDICATION

The Conference is devoted to the memory of Prof. Kh.Kordonsky.

#### OFFICIAL LANGUAGES

English and Russian will be the official languages of the Conference.

#### SUPPORTED BY:

Transport and Telecommunication Institute (Latvia) and  
 The K. Kordonsky Charitable Foundation (USA) in co-operation  
 with:  
 Latvian Transport Development and Education Association (Latvia)  
 Telecommunication Association of Latvia (Latvia)  
 Latvian Academy of Science (Latvia)  
 Baltic Operations Research Society

#### SPONSORED BY

Transport and Telecommunication Institute (Latvia)  
 The K. Kordonsky Charitable Foundation (USA)  
 Latvian Operations Research Society  
 PAREX bank (Latvia)

#### HOSTED BY

Transport and Telecommunication Institute (Latvia)

#### SECRETARIAT

Prof. Igor Kabashkin, Latvia - Chairman  
 Ms. Inna Kordonsky-Frankel, USA - Co-Chairman  
 Prof. Irina Yatskiv, Latvia - Co-Chairman  
 Ms. Elena Rutkovska, Latvia - Secretary

#### DEADLINES AND REQUIREMENTS

Submission of abstracts:	<b>15 May</b>	<b>2007</b>
Acceptance of abstracts:	<b>29 May</b>	<b>2007</b>
Submission of final papers:	<b>3 July</b>	<b>2007</b>
Acceptance of final papers:	<b>4 September</b>	<b>2007</b>

Abstracts (about 600 words in length) and papers submitted for review should be in English and, should present a clear and concise view of the motivation of the subject, give an outline, and include

information on all authors (the full name, affiliation, address, telephone number, fax number, and e-mail address of the corresponding author).

Submitted abstracts and papers will be reviewed. Accepted and invited papers will be published in the proceedings of the conference and in the journal "Transport and Telecommunication" (ISSN 1407-6160).

Instruction for papers preparing can be found on the conference WWW page: <http://RelStat.tsi.lv>.

#### INVITED SESSIONS (workshops)

Proposals for invited sessions (workshops) within the technical scope of the conference are accepted. Each proposal should describe the theme and scope of the proposed session. The proposal must contain the title and theme of the session and a list of paper titles, names and email addresses of the corresponding authors. Session proposals and paper must be submitted by **21 May 2007**.

#### REGISTRATION FEE

The registration fees will be **Euro 100** before 10 September 2006, and **Euro 150** after this date. This fee will cover the participation in the sessions, coffee breaks, daily launch, hard copy of the conference proceedings.

#### VENUE

Riga is the capital of the Republic of Latvia. Thanks to its geographical location, Riga has wonderful trade, cultural and tourist facilities. Whilst able to offer all the benefits of a modern city, Riga has preserved its historical charm. It's especially famous for its medieval part – Old Riga.

Old Riga still preserves many mute witnesses of bygone times. Its old narrow streets, historical monuments, organ music at one of the oldest organ halls in Europe attract guests of our city. In 1998 Old Riga was included into the UNESCO list of world cultural heritage.

#### ACCOMMODATION

A wide range of hotels will be at the disposal of participants of the conference and accompanying persons ([http://eng.meeting.lv/hotels/latvia\\_hotels.php](http://eng.meeting.lv/hotels/latvia_hotels.php)).

#### FURTHER INFORMATION

##### Contact:

Elena Rutkovska, Secretary, RelStat'07  
 Transport and Telecommunication Institute  
 Lomonosova 1, Riga, LV-1019, Latvia  
 Telephone: +(371)-7100619  
 Fax: +(371)-7100535  
 E-mail: [RelStat@tsi.lv](mailto:RelStat@tsi.lv)  
<http://RelStat.tsi.lv>

# AGING AND LONGEVITY CONTROL OF BIOLOGICAL SYSTEMS VIA DRUGS – A RELIABILITY MODEL

---

**Boyan Dimitrov, George Hayrapetyan, and Peter Stanchev**

Dept. of Science and Mathematics,  
Kettering University, 1700 West Third Ave., Flint, Mi 48504, USA  
e-mail: {bdimitro, pstanche}@kettering.edu

And Zohel Khalil, Concordia University, Montreal, Canada  
e-mail: [khalilz@vax2.Concordia.ca](mailto:khalilz@vax2.Concordia.ca)

The treatments in bio-systems correspond to respective repairs known in reliability. Some treatments may make the biological objects younger; others may make them older, or not deteriorate their current age. Such kind of "maintenance" has some analogous failure/repair models in reliability. We use it to incorporate some results of reliability and bio modeling for the quantitative studies of the aging and resistance of bio-systems to environmental stress factors. We call "calendar age" the age of a bio-object which does not use treatments, or uses it without age improvement, or deterioration. All bio-objects, which are using treatments of same strength and direction of effect, have "virtual age". We explain here what the virtual age is, and how is it related to age correcting factors. We illustrate our common results about the virtual ages on the example of the Gompertz-Makenham law of mortality, and discuss the relations of the longevity, mechanism of aging and age affecting control. As a consequence, a concept of age determination is proposed. Numeric and graphical examples are provided.

## 1. Introduction

This study has been induced by the number of presentations and articles presented at the First French-Russian Conference on Longevity, Aging and Degradation Models in Reliability, Public Health, Medicine and Biology (LAD'2004), hosted by the Saint Petersburg State Polytechnic University, Russia in June 5-11, 2004 [1], [5], [6]. It has been a demonstration that probability and statistical methods cover an enormous ground of research and can successfully handle most of situations involving uncertainty in any area of human activity. One of these is the study of biological systems, particular case of which is every kind of live organisms.

### 1.1 Bio-Systems as Devices

Bio-systems can be considered as a specifically organized devices constructed to perform some preset functions, according to their genetic programs. These functions are performed in the presence of a great number of random factors (environmental conditions). Following Koltover [5], we may schematically consider any operation bio-system as a multi-dimensional time-dependent random vector  $\mathbf{Y}(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots)$  each component of which corresponds to a relevant functional parameter of the device. There exists a relevant subset  $\mathcal{S}$  of points in the space where  $\mathbf{Y}(t)$  belongs which corresponds to the feasible (admissible) values (limits) of the functional parameters. If  $\mathbf{Y}(t) \in \mathcal{S}$ , then the device (bio-system) is defined as having normal operation at the time  $t$ . Whenever  $\mathbf{Y}(t)$  passes beyond the limits of  $\mathcal{S}$ , then the device gets a failure. Sometimes  $\mathcal{S}$  may also depend on time, or may be a random set. It is assumed  $\mathbf{Y}(0) \in \mathcal{S}$ . Life time of the device as a whole is defined by the random variable

$$\tau = \max\{t : t \geq 0, \mathbf{Y}(t) \in \mathcal{S}\}. \quad (1)$$

It represents the time of non-failure operation of the bio-system. The life time distribution is presented by the function

$$F(t) = P(\tau \leq t). \quad (2)$$

### 1.2 Reliability of Bio-Systems

Reliability of the bio-system is the probability of non-failure operation within the interval of time  $(0, t)$ , i.e.

$$R(t) = P(\tau > t). \quad (3)$$

For bio-systems it is known as *survival function*, and denoted by  $S(t)$

Consequently, all the statistical procedures used in reliability theory can be used in evaluation of the reliability function  $R(t)$  from many independent copies,  $N$ , of independently operating bio-systems as the ratio  $N(t)/N$ . Here  $N(t)$  is the number of those bio-systems which are alive (do normally operate) at the instant  $t$ . Also, the mortality rate function

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt} \ln R(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)} \quad (4)$$

appears as an analogue to the failure rate function, used in technical reliability. The  $f(t)$  here is probability density function of the life time distribution. The time  $t$  just survived by a bio-system is called its calendar age. Therefore, the same mathematical theory of reliability is essentially applicable to the mathematics of mortality. Our article is a step in this direction.

## 2. Main Models and Results

The specification of components of the random vector  $Y(t)$  for bio-systems, the use of random modeling and analysis helps to understand how the improvement of its reliability can be attained, and how to keep a better control on the survival of such systems. There are lots of analogies as well a number of specific differences in modeling and studies of reliability of technical devices and for the bio-systems. For instance, bio-systems are obviously subject of wearing and aging. Bio-systems have a proven life-span (something like a maximal value of the life time  $\tau$  beyond which no copy of the bio-system can pass). Life span for people is, for instance, 120 years. Life spans have also most of the functional components of the bio-systems. Life span for people's brain is 250 years. For technical devices the exponential, the Weibull, the Gamma, and even the Norman distributions frequently fit for modeling the life times. For the bio-systems, despite of their complexity, there exists some "universal kinetics of the growth of mortality with the age", expressed by the Gompertz-Makenham law of mortality

$$\lambda(t) = \beta + \alpha e^{\gamma t}. \quad (5)$$

Here the parameters  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma > 0$  are independent on time. The Gompertz – Makenham mortality law has been confirmed for people and for other mammals, flies, mollusks [5] with specific values of its parameters. From [5] we find that for people parameter  $\beta \neq 0$  if the age is less than 35 years, and  $\beta = 0$  if the age is greater than 35. We treat this parameter  $\beta$  as a collaterals mortality rate (e.g. accidentals, casualties), and guess that its numerical value may vary for different countries and species. For our numeric and graphic examples later we take the value of  $\beta = .0025$ . Values of parameters  $\alpha \approx 42.827 \pm 8.85$  years, and  $\gamma \approx .094 \pm .0014$  years<sup>-1</sup> are assumed (evaluated) for ages above 35 and less than 95, according to [5].

We consider here the effects of drug use that may slow down, or accelerate the aging for people in a proportional fashion as it is modeled and used for technical items in [2] and [3]. Then we study graphically the effects on mortality rates and the life span on people as functions of the age reducing, or age accelerating effects depending on the dosage of medication or treatment. Numerical examples are using values seeming reasonable for the people.

### 3. The drug use effects

The most convenient description should be given in terms of the mortality rate function  $\lambda(t)$  and the related to it hazard function  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$ . There is a convenient relationship between the probability characteristics of the original lifetime  $X$  of an individual and these functions.

Let the initial life time,  $X$ , be a continuous random variable (r.v.) with c.d.f.

$F(x) = P(X \leq x)$ , and have a p.d.f.  $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$ . Then its hazard function is

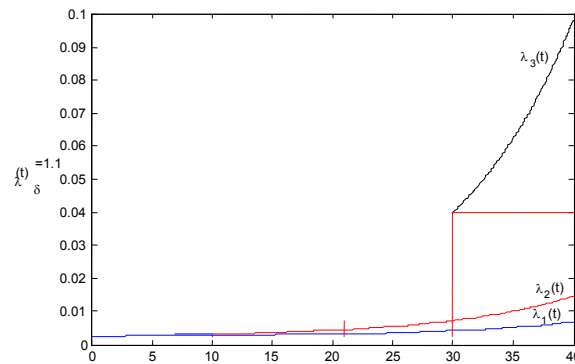
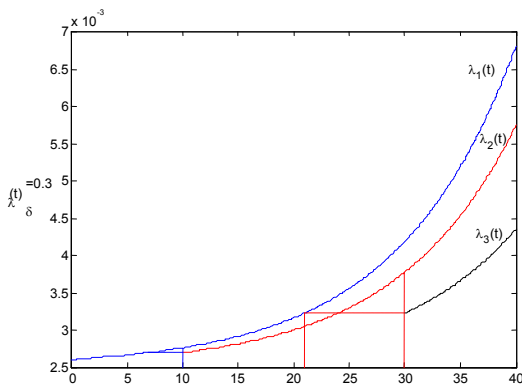
$$\Lambda(t) = -\ln[1 - F(t)] \text{ for } t \geq 0, \tag{6}$$

and its mortality rate function is

$$\lambda(t) = \frac{d}{dt} \Lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \tag{7}$$

In reliability works is shown that the temporary failures which do not affect the failure rate after recovery (known as minimal repairs), have Poisson distribution with mean  $\Lambda(u + v) - \Lambda(u)$  for their total number within any time interval  $[u, u + v)$ ,  $u, v > 0$ .

Drug use activities may improve the performance of the individuals and give them a "new life". The specifics of the drugs, its intake amount of labor, recovery time, or money invested in the health care may have significant impact on the health improvement, which directly affects the longevity of life. If assume that health improvement prolongs the life of such individuals by certain percentage  $\delta$ , we call it an age-reducing factor. Fig. 1 a) and the model (8) below explain how it happens with actions made on the individual mortality rate.



**Fig.1 a)** Individual mortality rate under age-reducing factor      **Fig.1 b)** Individual mortality rate under age-accelerating factor

**Fig. 1.** Changes in the individual mortality rates in time with an age affecting factor

We consider also drug abuses (analogous to the reliability maintenance under imperfect repairs) that may shorten the life. Such actions affect the future performance of the individual, and are related to an age-accelerating factor  $\delta$ , which is equivalent to reducing the overall life of such individuals by certain percentage  $\delta$ . Fig. 1 b) and the model and the theorem below explain how it happens changes in the individual mortality rate.

Let  $X_i$  denote time intervals between successive epochs of drugs intake that affect the individual. Assume that  $\delta_i$  denote the lack of perfection the life system of an individual may get as a result of the  $i$ -th action. The values

$$T_0, T_i = T_{i-1} + X_i \delta_i, \quad I = 1, 2, 3, \dots \tag{8}$$

are understood as *virtual ages* of the individual right after the  $i$ -th action. When  $\delta_i = 1$ , then no improvement or deterioration of the virtual age of the individual occurs at the  $i$ -th epoch of action. When  $\delta_i < 1$  (or if  $\delta_i > 1$ ), then an improvement (or a deterioration) of the virtual age of the individual occurs at that epoch.

The model described here is also known in Reliability as Kijima's model II [4].

We consider this model with the assumption that  $\delta_i = \delta \neq 0$ , and call this  $\delta$  an *age-correcting factor*. If  $\delta < 1$ , we call it *age-reducing factor*, and if  $\delta > 1$ , we call *age-accelerating factor*.

Assume instantaneous effects, continuous non-decreasing virtual hazard function

$\Lambda^*(t)$  as a function of the time parameter  $t$ , and having right derivative  $\lambda^*(t) = \frac{d}{dt} \Lambda^*(t)|_{t+0}$ . The subscript here indicates that the value of  $\Lambda^*(t)$  is considered immediately after an occasional age-reducing action is completed.

Consider the sequence  $T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots$  of times representing the virtual product age after the  $n$ -th coincident action. Assume that  $X$  has a c.d.f.  $F(x)$  with  $F(0)=0$  and  $F(x)<1$  for all  $x > 0$ . Denote the survival function by  $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = P\{X>t\}$ .

We derive the following expressions.

The  $n$ -th step transition probability function is

$$P\{T_{n+1} > t \mid T_1, \dots, T_n\} = P\{X > \frac{t}{\delta} \mid X > \frac{T_n}{\delta}\} = \frac{\bar{F}(\max[\frac{T_n}{\delta}, \frac{t}{\delta}])}{F(\frac{T_n}{\delta})}, \tag{9}$$

for  $n = 1, 2, \dots$ . The initial distribution is

$$P\{T_1 > t\} = P\{X_1 > \frac{t}{\delta}\} = \bar{F}(\frac{t}{\delta}). \tag{10}$$

From (9) and (10), by induction, we get that for any non-negative measurable function  $g(t_1, \dots, t_n)$  and for any  $n$  it is true that:

$$E[g(T_1, \dots, T_n)] = \int_0^\infty (\bar{F}(\frac{t_1}{\delta}))^{-1} \int_{t_1}^\infty (\bar{F}(\frac{t_2}{\delta}))^{-1} \int_{t_2}^\infty (\bar{F}(\frac{t_3}{\delta}))^{-1} \dots \int_{t_{n-2}}^\infty (\bar{F}(\frac{t_{n-1}}{\delta}))^{-1} \int_{t_{n-1}}^\infty g(t_1, \dots, t_n) dF(\frac{t_n}{\delta}) \dots dF(\frac{t_1}{\delta}). \tag{11}$$

Let  $\{N_t^v, t \geq 0\}$  be the counting process corresponding to the point process  $\{T_n\}_{n=0}^\infty$  defined by

$$N_t^v = \sum_{n=0}^\infty I_{[0,t)}(T_n),$$

where  $I_B(\cdot)$  is the indicator function of the set  $B$ .

**Theorem 1:** The random process  $\{N_t^v, t \geq 0\}$  is a non-homogeneous Poisson process with a leading function

$$\Lambda^v(t) = -\log[1 - F(\frac{t}{\delta})] = \Lambda(\frac{t}{\delta}), \tag{12}$$

where  $\Lambda(t) = -\ln[1 - F(t)]$  is the leading function of the NPP associated to the life time  $X$  of this individual.

The proof can be found in [3].

Equation (12) shows that the transformation between the calendar and the virtual time scales is  $t \rightarrow \frac{t^v}{\delta}$ , i.e., if the virtual age of the individual is  $t^v$  its corresponding calendar age  $t$  is  $t^v / \delta$ .

Therefore, we may expect that when the calendar age of an individual acting under age correcting factor  $\delta$  is  $t$ , then its virtual (we would say, actual) age is  $\delta t$ .

Denote by  $T$  the r.v. representing the virtual lifetime of the individual. The c.d.f. of  $T$  is  $F_T(t) = 1 - e^{-\Lambda^v(t)}$ . Equation (12) also shows that  $P(T \leq t) = F_T(t) = F_X(\frac{t}{\delta}) = P(X \leq \frac{t}{\delta})$ . Therefore,  $P(T \leq t) = P(\delta X \leq t)$ , and this means that **the virtual lifetime  $T$  and the multiplied by  $\delta$  calendar lifetime  $X$  are equal in distribution**, i.e.

$$T \stackrel{d}{=} \delta X. \quad (13)$$

When the individual is at calendar age  $x$  its virtual age measured at the calendar age scale is  $\delta x$ . At calendar age  $x$  an individual maintaining himself under age-correcting medication of factor  $\delta$ , lives as a new individual at age  $\delta x$ . Thus

$$\lambda^*(x)dx = \lambda(\delta x)dx$$

i.e., the probability to have a failure of the individual from the original population within the interval  $[x, x + dx)$  is the same as the probability to have a failure from the population of individuals, maintained by age-affecting actions of factor  $\delta$ , within the interval  $[x, x + \delta dx)$ .

The relation

$$\Lambda^*(x) = \int_0^x \lambda^*(u)du, \text{ and } \Lambda(x) = \int_0^x \lambda(u)du,$$

leads to

$$\Lambda^*(x) = \frac{1}{\delta} \Lambda(\delta x). \quad (14)$$

**Theorem 2:** The virtual failure rate  $\lambda^*(x)$  at calendar age  $x$ , and the original failure rate are related by the equality

$$\lambda^*(x) = \lambda(\delta x), \quad x \geq 0, \delta \neq 0; \quad (15)$$

The virtual hazard rate  $\Lambda^*(x)$  and the original hazard rate  $\Lambda(x)$  are related by equation (14).

An age-reducing factor  $\delta$  slows down the aging process of the individual by  $100(1-\delta) \%$ .

**Example 1** The *Gompertz-Makenham life-time distribution with an age-affecting factor*.

Consider the Gompertz-Makenham life-time distribution,  $X \in \text{Gompertz}(\lambda(t, \beta, \alpha, \gamma))$ , which is proven to fit the cells and most mammal's life [5]. From relationships (10) – (12) we get

$$F(t) = P\{T_1 \leq t\} = 1 - e^{-\int_0^t (\beta + \alpha e^{\gamma u}) du} = 1 - e^{-\beta t - (\alpha/\gamma)(1 - e^{\gamma t})}, \quad (16)$$

and

$$f(t) = (\beta + \alpha e^{\gamma t}) e^{-\beta t - (\alpha/\gamma)(1 - e^{\gamma t})},$$

with  $\lambda(t)$  given by equation (10), and

$$\Lambda(t) = \beta t + \frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{\gamma t}), \quad t \geq 0.$$

Here  $\beta$  is a constant rate parameter,  $\alpha$  is a secondary time-scaling parameter, and  $\gamma$  is an aging rate parameter.

If the individual has the Gompertz-Makenham life-time distribution with parameters  $\beta$ ,  $\alpha$ , and  $\gamma$ , and is maintained under age-affecting factor  $\delta > 0$ , then its virtual failure rate and virtual hazard rates are given by the equations (14), (15), namely

$$\lambda^*(t) = \beta + \alpha e^{\gamma \delta t}, \quad t > 0, \delta \neq 0, \tag{17}$$

and

$$\Lambda^*(t) = \beta t + \frac{\alpha}{\delta \gamma} (1 - e^{\gamma \delta t}), \quad t \geq 0. \tag{18}$$

Figure 2 illustrates the behavior of the two functions  $\lambda^*(t)$  and  $\Lambda^*(t)$  under various values of the age-affecting parameter  $\delta$ . For values of the parameters  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  are taken the numbers:  $\beta = .0025$  when  $t \leq 35$ , and  $\beta = 0$  for  $t \geq 35$ . For both cases  $\alpha = 42.827$ , and  $\gamma = .094$  as proven to be valid for the human beings with an age between 35 years and 94 years, according to [5]. And respective graphs also are for the ages between 35 and 120 years. For ages between 0 and 35 we assume  $\beta = .0025$

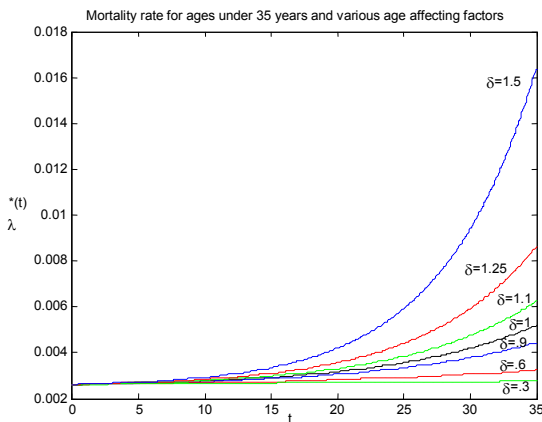


Fig. 2.a.1. Age below 35 years

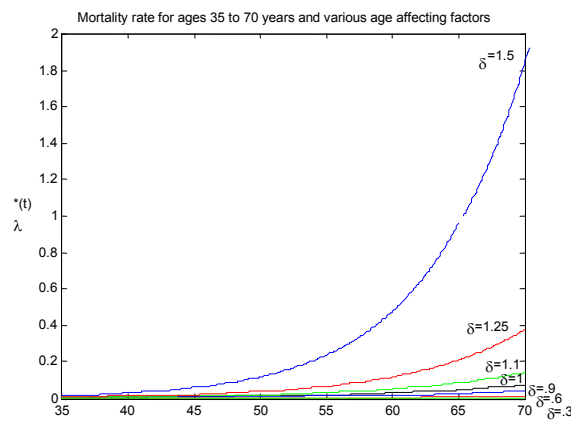


Fig. 2.a. 2. Age above 35 years

Fig. 2 a. Mortality rates  $\lambda^*(t)$  for various  $\delta$ .

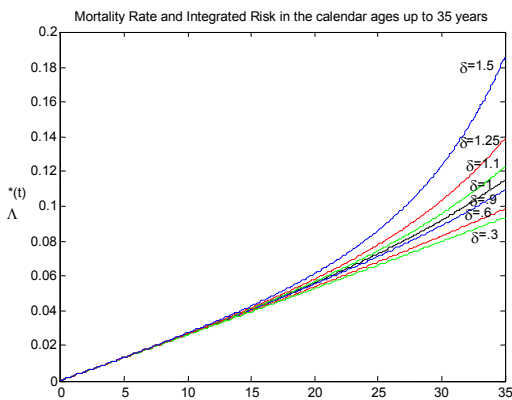


Fig. 2.b.1. Age below 35 years

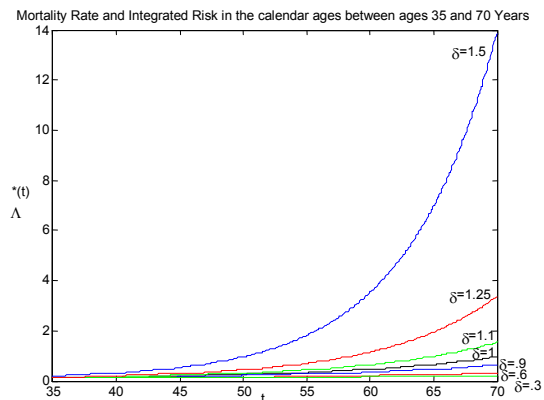


Fig. 2.b.2. Age above 35 years

Fig. 2.b. Integrated mortality rate (hazard rate, integrated risk)  $\Lambda^*(t)$  various  $\delta$ .

Fig. 2. Mortality Rates and Integrated Risks in the calendar ages

#### 4. Comparative ages between different groups

Now we illustrate one possible use of the results obtained in Section 3 by considering again the Gompertz-Makeham life-time distribution. We will think in terms of the human beings as belonging to various groups (or populations) determined by the values of the age-correcting factor  $\delta$ . As we noticed before, even being at a same calendar age  $t$  the individuals from different populations would have different virtual (or as we say, actual) age. Since the only convenient time scale is the calendar age, it makes sense to speak about comparable or equivalent ages between the individuals from different groups. Using the relationships (6), (16) and (18) we find the life-time distribution function for each population determined by the value  $\delta$  of its age-correcting factor:

$$F_{\delta}(t) = 1 - e^{-\beta t - \frac{\alpha}{\delta^{\gamma}}(1 - e^{-\delta t})} \quad (19)$$

Equation (19) represents the probability that an arbitrary selected individual from the population with age-correcting factor  $\delta$  will not survive the calendar age  $t$ . The function

$$S_{\delta}(t) = 1 - F_{\delta}(t) = e^{-\beta t - \frac{\alpha}{\delta^{\gamma}}(1 - e^{-\delta t})} \quad (20)$$

is known as the survival function for the individuals in this population. Its meaning is the same as for reliability expressed by equations (1)-(3). We abandon the notation  $R(t)$  and leave it for cases of technical issues.

**Definition:** We say, the age  $T_{\delta_1}$  of the individual from the population with age-correcting factor  $\delta_1$  is equivalent to the age  $T_{\delta_2}$  of the individual from the population with age-correcting factor  $\delta_2$ , if it is fulfilled

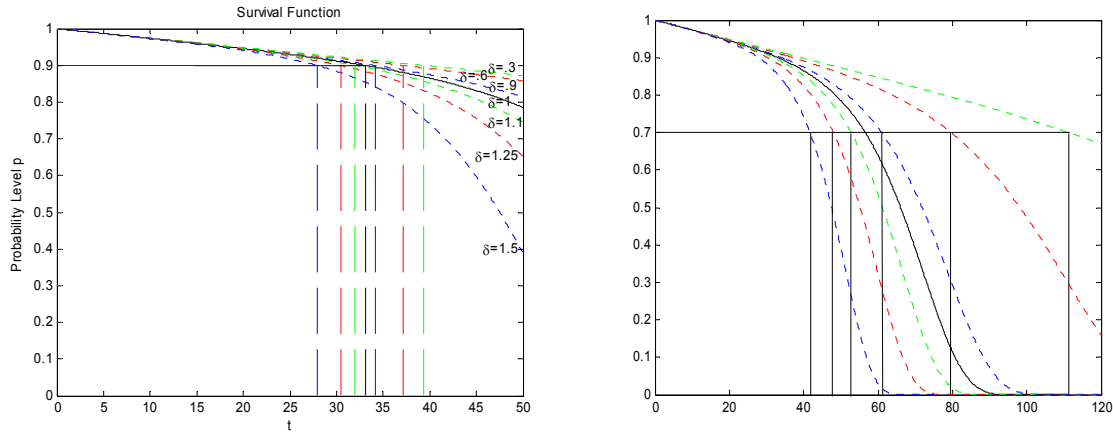
$$S_{\delta_1}(T_{\delta_1}) = S_{\delta_2}(T_{\delta_2}). \quad (21)$$

In the sense of this Definition, every age of one of the two populations has equivalent comparable age to the other population. Ages are equivalent when the probabilities to survive these respective values  $T_{\delta_1}$  and  $T_{\delta_2}$  are equal. When we pick  $\delta = 1$ , we see to what calendar age of the normal human population and individual from the population with age-correcting factor  $\delta$  will be equivalent. Since this is the only available age information, when we know  $\delta$  we may see what the true age of an individual from the respective population.

However, we notice that equations (21) may be quantified, since these are probabilities. If we select any probability level  $p \in (0, 1)$ , we will get all the equivalent ages  $T_{\delta}(p)$  at this level for all the populations just as solutions of the equations

$$S_{\delta}(T_{\delta}) = p.$$





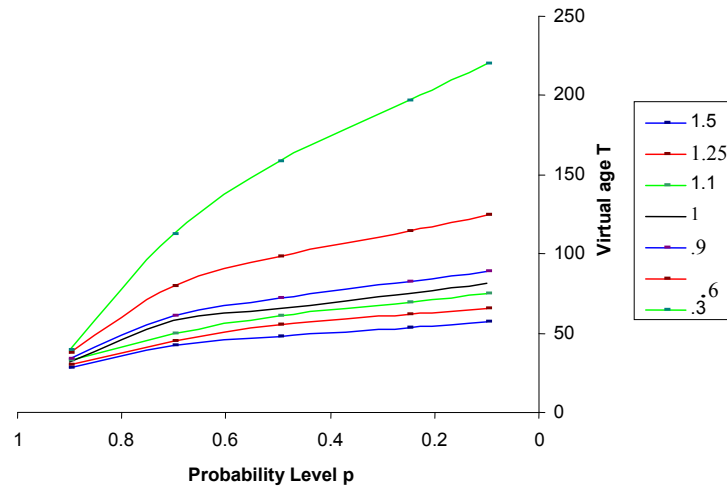
**Fig. 3.** The survival functions and equivalent ages for the individuals from the population with age-correcting factor  $\delta$ .

Fig. 3 illustrates the equivalency between the ages of several  $\delta$ -populations at the survival probability levels  $p = .9$  and  $p = .7$ . The continuous black line traces the “normal population” where  $\delta = 1$ . The meaning of the numbers is following: At level .9 the age of the normal population is, say, 33. The age-accelerated population with  $\delta = 1.5$  will look like this 33 years old people already being at age 28. Similarly, looking on the graph for the equivalent ages at probability level .7, we notice that the end of life for average individual from the normal population is about 95 years, while for these from the age-accelerated population with  $\delta = 1.5$  it will be about 64.

We evaluated the equivalent ages for several probability levels, and the results are shown on next table. In bold black digits are shown the respective ages for the normal population at the corresponding level of survival. In the same line of the level are shown the ages in the other populations, at which an average individual would look (have the age) like this in the normal population. One may see some unreal numbers which we also need to comment. For instance, at level .25 individuals in the normal population have properties as 75 years old, while same properties would be in possession by the average individuals at 82 years age if they reduce their ages regularly by a factor  $\delta = .9$  (an improvement by 10 % compare to the normal). In the same line we see that the same properties would have the 114 year old people in the population who got 40 % improvements regularly. Finally, we see that as a 75 year old normal individual would have be an individual at age 197 if it was possible to reduce the age regularly by 70 %. Numbers in the last column are somewhat unreal, because they represent a mystic dream for such high level of age reduction.

**Table 4.1.** Equivalent ages under various age correcting factors at different levels of survival.

$p \backslash \delta$	1.5	1.25	1.1	<b>1</b>	.9	.6	.3
.9	28	30	31	<b>33</b>	34	37	39
.7	42	45	50	<b>58</b>	61	80	112
.5	48	55	61	<b>66</b>	72	98	158
.25	53	62	69	<b>75</b>	82	114	197
.1	57	66	75	<b>81</b>	89	125	220



**Fig. 4.** Equivalent ages for various values of age correcting factor and various values of the age-correcting factor.

On Fig. 4 we show the same numbers in the table as a graph of the equivalent ages that can be approximate to get equivalent ages at any survival level. This graph could be used as a chart for a number of useful comparisons. The black middle line shows the calendar age of the normal population. If one chooses an age, let say, 50 within his population, and draws a vertical line at the heights of the points of intersection with the other graphs one may find at what calendar age the individuals from other populations are, which is equivalent to his. Taking an individual from the normal population at any age in the same way it can be shown to what age he would have been if he was using age corrections as do the individuals from the other populations.

We believe that there is a fresh idea about how to treat age related questions, how to compare ages among different populations, and even, how to work out an approach towards the accelerated life testing based on the above considerations. And this discussion we postpone for another article.

**5. Life supporting (insurance) costs associated with an individual during some assigned time**

Certainly, there are some costs associated with any improvement or deterioration. Denote by  $C_r(u, \delta)$  the cost of an age-affecting action of factor  $\delta$  at calendar age  $u$  of the individual. A natural assumption is that  $C_r(u, \delta)$  satisfies the inequalities

$$C_m(u) \leq C_r(u, \delta) \leq C_c(u),$$

where  $C_m(u)$  is the cost for the minimal support of the individual at calendar age  $u$ , and  $C_c(u)$  is the cost of the complete (radical) loss of the individual at age  $u$ . In the sequel we develop a radical modeling for comparing of the expected expenses associated with the life support of individuals under regular life-supporting "maintenance", and these with age-affecting factors. As a matter of fact, the comparison of the virtual ages of individuals at the same calendar age  $T$  indicates that those who have used an age affecting action of factor  $\delta$  differ from the what this calendar age is. These are based on

comparing the values of the survival functions given by equations (20), Table 4.1 and Fig. 4 shown in the previous section. Struggle to keeping a constant age-correcting factor we call *maintenance policy* for the life style. Hence, the life supporting costs depend on the insurance agreement and the maintenance policy.

We assume that an individual is covered by insurance for some calendar time of duration  $T$ , according to a certain policy agreement.

Consider cost modeling from insurer's point of view. The insurer covers all, or a portion of the expenses associated with the needs and supports of the individual starting at age  $t_0$ , until the expiration of the insurance coverage, or until the death of this individual. In occasion of a death at age  $u$  the insurer pays the amount  $C(u, \delta)$ , if the case is within the time of the action of the insurance agreement.

### 5.1. Expected insurance costs for a policy with limited validity

Consider an insurance policy, which starts at age  $t_0$  of an individual, and will last time of duration  $W$ , i.e. the insurance policy is valid during the calendar age  $[t_0, t_0 + W]$  of that individual. On the other hand this individual has been maintained, and will maintain his life under an age-affecting factor  $\delta$ . Assume, that the original life time  $X$  of the population at this site has failure rate function  $\lambda(t)$ . During the coverage no partial claims are possible.

The effect of the initial age  $t_0$  of the individual at the start of the insurance coverage is also a parameter of interest, which may affect the expected insurer's expenses. The collected premiums usually are proportional to the elapsed time,  $u$ , and may depend on the initial age  $t_0$  when the policy starts, and the supposed age-affecting factor  $\delta$ . Therefore, the collected premium on the interval  $[t_0, t_0 + u)$  equals  $C(t_0, \delta)u$ . If the failure is beyond the assigned insurance period, the insurer incurs no expenses. If the death occurs at a moment on the interval  $[t_0, t_0 + u)$ , the insurer refunds the insured by the amount  $C(u, \delta)$ , thus his expenses are determined according to

$$C(u) = C(u, \delta) - C(t_0, \delta)u .$$

Particular forms of these functions are assumed. Most common seems

$$C(u, \delta) = C = \text{const}, \text{ and } C(t_0, \delta) = c_0 + c_1 t_0 + c_2 (\delta - 1), \quad (19)$$

so that if the individual maintains the regular way of life he pays no addition or gets no discount expressed by the third component.

**Lemma 1** The expected insurance cost associated with an age correcting factor  $\delta$  for an individual insured at age  $t_0$  with coverage of duration  $W$  is given by

$$C_W(t_0, \delta) = \int_0^W \{C(t_0 + u, \delta) - C(t_0, \delta)u\} \lambda(\delta(t_0 + u)) e^{-\frac{1}{\delta} \Lambda(\delta(t_0 + u)) - \Lambda(\delta t_0)} du, \quad (20)$$

where  $\lambda(t)$  and  $\Lambda(t)$  are the original failure rate and hazard rate functions associated with the life time  $X$  of the an individual in the population.

#### **Example 2** *The Gompertz-Makenham life-time distribution with an age-affecting factor*

Assume, that the contract prices  $C(u, \delta)$  and  $C(t_0, \delta)$  for an individual insured at age  $t_0$ , are given by the equations (19). Then as a Corollary of Lemma 1 and the previous discussion we get:

**Corollary 1** Under the conditions of Lemma 1, and (17)-(19), the expected incurred insurance costs are given by the expression

$V C_W(t_0, \delta) =$

$$C[e^{-\beta t_0 - (\alpha/\gamma)(1-e^{\gamma t_0})} - e^{-\beta(t_0+W) - (\alpha/\gamma)(1-e^{\gamma(t_0+W)})}] - [c_0 + c_1 t_0 + c_2(\delta - 1)] \int_{t_0}^{t_0+W} u(\beta + \alpha e^{\gamma u}) e^{-\beta u - \frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{\gamma u})} du.$$

We work on graphical illustrations of the dependence of  $C_W(t_0, \delta)$  on the individual's age  $t_0$  at the time of enrolment into the insurance, for the Gompertz-Makenham lifetime distribution with parameters as for human beings, and for different values of the coverage period  $W$  in years.

The effects of increase or decrease of the insurance premiums and costs should be justified. The dependence of the costs and premiums on the calendar age  $t_0$  of individuals and its interaction with the age correcting factors might be reviled.

## 6. Conclusions

Age-affecting actions on live individuals may have feasible models, and the life supporting (insurance) cost for some natural policies can be analyzed by making use of approaches similar to those in reliability maintenance and warranty cost analysis.

It is shown that the failure rate function and hazard function provide more convenient tools to age-dependent life modeling than the approaches based on the direct use of probability distributions of the individuals life times.

Numerical and graphical examples illustrate the use of the proposed models with Gompertz-Makenham mortality rates and respectively distributed life times with an age- correcting factor for comparing ages between individuals.

## References

- [1] **C. Auperin and M. Nikulin (2004)** Unified Bio-Reliability Approach in Statistical Modeling of Aging, Longevity, Degradation and Mortality with Dynamic Environment, in *The Proceedings of LAD'2004*, Volume 2, Edits Antonov et al., Saint Petersburg, pp. 346-361.
- [2] **B. Dimitrov, D. Green, S. Chukova and Z. Khalil (2004)** Age Affecting Repairs and Warranty Costs, in *The Proceedings of LAD'2004*, Volume 2, Edits Antonov et al., Saint Petersburg, pp. 101-114.
- [3] **Dimitrov B., Chukova S., and Khalil Z. (2004)** Warranty Costs: An Age-Dependent Failure/Repair Model *Naval Research Logistic Quarterly*, v. 51, pp. 959-976.
- [4] **Kijima M. (1989)** Some Results for Repairable Systems with General Repair, *J. Appl. Probab.*, 26, 89-102.
- [5] **V.K. Koltover (2004)** Reliability of Biological Systems: Terminology and Methodology, in *The Proceedings of LAD'2004*, Volume 1, Edits Antonov et al., Saint Petersburg, pp. 98-113.
- [6] *Longevity, Aging, and Degradation Models, Volume 1 and Volume 2*, Editors V. Antonov, C. Huber, M. Nikulin, and V. Polischook, *Proceedings of LAD'2004*, Saint Petersburg, 2004.

# MAXIMIZATION OF RELIABILITY OF A K-OUT-OF-N SYSTEM WITH REPAIR BY A FACILITY ATTENDING EXTERNAL CUSTOMERS IN A RETRIAL QUEUE

---

**A. Krishnamorthy, Vishwanath C. Narayanan, T. G. Deepak**

•

e-mail: [ak@cusat.ac.in](mailto:ak@cusat.ac.in), [krishna.ak@gmail.com](mailto:krishna.ak@gmail.com)

**ABSTRACT.** In this paper, we study a  $k$ -out-of- $n$  system with single server who provides service to external customers also. The system consists of two parts: (i) a main queue consisting of customers (failed components of the  $k$ -out-of- $n$  system) and (ii) a pool (of finite capacity  $M$ ) of external customers together with an orbit for external customers who find the pool full. An external customer who finds the pool full on arrival, joins the orbit with probability  $\gamma$  and with probability  $1 - \gamma$  leave the system forever. An orbital customer, who finds the pool full, at an epoch of repeated attempt, returns to orbit with probability  $\delta$  ( $< 1$ ) and with probability  $1 - \delta$  leaves the system forever. We compute the steady state system size probability. Several performance measures are computed, numerical illustrations are provided.

## 1. INTRODUCTION

We study a  $k$ -out-of- $n$  system with single server who provides service to external customers also as described in the following paragraphs.

The system consists of two parts: (i) a main queue consisting of customers (failed components of the  $k$ -out-of- $n$  system) and (ii) a pool (of finite capacity  $M$ ) of external customers together with an orbit for external customers who find the pool full. An external customer who finds the pool full on arrival, joins the orbit with probability  $\gamma$  and with probability  $1 - \gamma$  leave the system forever. An orbital customer, who finds the pool full, at an epoch of repeated attempt, returns to orbit with probability  $\delta$  ( $< 1$ ) and with probability  $1 - \delta$  leaves the system forever.

**The arrival process :** Arrival of main customers have interoccurrence time exponentially distributed with parameter  $\lambda_i$  when the number of operational components of the  $k$ -out-of- $n$  system is  $i$ . By taking  $\lambda_i = \frac{\lambda}{i}$  we notice that the cumulative failure rate is a constant  $\lambda$ . We assume that the  $k$ -out-of- $n$  system is COLD (components fail only when system is operational). The case of WARM and HOT system can be studied on the same lines (see Krishnamoorthy and Ushakumari [4]). External customers arrive according to a Markovian Arrival Process (MAP) with representation  $(D_0, D_1)$  where  $D_0$  and  $D_1$  are assumed to be matrices of order  $m$ . Fundamental arrival rate  $\lambda_g = -\pi D_0 e$

**The service process :** Service to the failed components of the main system is governed by the  $N$ -policy. That is each epoch the system starts with all components operational (*ie.*, all  $n$  components are in operation), the server starts attending one

---

Research supported by NBHM (DAE, Govt. of India): NBHM 48/5/2003/R&DII/3269.

by one the customers from the pool (if there is any). The moment the number of failed components of the main system reaches  $N$ , no more customer from the pool is taken for service until there is no components of the main system waiting for repair. However service of the external customer, if there is any, will not be disrupted even when  $N$  components accumulate in the main queue (that is the external customer in service will not get pre-empted on realization of the event that  $N$  components of the main system failed and got accumulated; instead the moment the service of the present external customer is completed, the server is switched to the service of main customers).

Service time of main customers follow PH distribution of order  $n_1$  and representation  $(\alpha, S_1)$  and that of external customers have PH distribution of order  $n_2$  with representation  $(\beta, S_2)$ ;

$S_1^0$  and  $S_2^0$  are such that  $S_i \mathbf{e} + s_i^0 = 0$ ,  $i = 1, 2$  where  $\mathbf{e}$  is column vector of ones. The two service times are independent of each other and also independent of the failure of components of the main system as well as the arrival of external customers.

**Objective :** To utilize server idle time without affecting the system reliability.

Krishnamoorthy and Ushakumari [4] deals with the study of the reliability of a  $k$ -out-of- $n$  system with repairs by server in a retrial queue. They do not give any priority to the failed components of the main system nor do they investigate any control policy. Krishnamoorthy, Ushakumari and Lakshmi [5] introduced the repair of failed components of a  $k$ -out-of- $n$  system under the  $N$ -policy. For further details one may refer to the paper and references therein as well as Ushakumari and Krishnamoorthy [7] Bocharov *et al* [1] examine an  $M/G/1/r$  retrial queue with priority of primary customers. They obtain the stationary distribution of the primary queue size, an algorithm for the factorial moments of the number of retrial customers and an expression for the expected number of customers in the system. Nevertheless, we wish to emphasise that their paper does not distinguish between the priority and ordinary customers. This is distinctly done in this paper (our priority customers are the failed components of the  $k$ -out-of- $n$  system):

We also consider an intermediate pool of finite capacity to which external customers join after seeing a busy server on arrival or after a successful retrial from the orbit. We expect that this intermediate pool from which an external customer can be selected for service, whenever the server becomes idle, will help us to decrease the server idle time.

The steady state distribution is derived. Note that the non-persistence of orbital customers together with the fact that an external customer, finding the pool full, may not join the pool ensures that even under very heavy traffic the system can attain stability. Several performance measures are obtained.

One can refer Deepak, Joshua, and Krishnamoorthy [3] for a detailed analysis of queues with pooled customers (postponed work).

## 2. MODELLING AND ANALYSIS

The following notations are used in the equal:

$N_1(t)$  = # orbital customers at time  $t$

$N_2(t)$  = # customers in the pool (including the one getting service, if any,) at time  $t$ .







where

$$W_{30} = I_m \otimes S_2^0, \quad W_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_m \otimes S_2^0 & 0 \end{bmatrix}_{m(n_1+n_2) \times m(n_1+n_2)}$$

$$W_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \otimes (S_2^0 \alpha) \end{bmatrix}_{m(n_1+n_2) \times mn_1}$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{N-1} \otimes E_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-k-N+2} \otimes E_2 \end{bmatrix}$$

$$E_0 = I_m \otimes (S_2^0 \beta), \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_m \otimes (S_2^0 \beta) \end{bmatrix}_{m(n_1+n_2) \times m(n_1+n_2)}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_m \otimes (S_2^0 \alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_5 = \begin{bmatrix} F_0 & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 \\ 0 & 0 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$F_0 = D_1 \otimes \beta, \quad F_1 = I_{N-1} \otimes F'_1, \quad F'_1 = \begin{bmatrix} 0 & D_1 \otimes \beta \\ D_1 \otimes I_{n_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = I_{n-k+2-N} \otimes F'_2, \quad F'_2 = [D_1 \otimes I_{n_1} \quad 0]$$

$$W_6 = \begin{bmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & I_{n-k+1} \otimes H_1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = D_1 \otimes I_{n_2}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} D_1 \otimes I_{n_1} & 0 \\ 0 & D_1 \otimes I_{n_2} \end{bmatrix}$$

and

$$A_{1i} = A_{10} - \tilde{A}_{1i} \quad \text{for } i \geq 1$$

where

$$\tilde{A}_{1i} = \begin{bmatrix} i\theta I_{L_2} & 0 \\ 0 & i\theta(1-\delta)I_{L_1} \end{bmatrix}.$$

Where

$$L_1 = (n-k+2)mn_2 + (n-k+1)mn_1$$

$$L_2 = Nm + (n-k+1)mn_1 + (M-1)L_1$$

$$A_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & Z_i & 0 \\ 0 & 0 & i\theta I_{(M-1)L_1} \\ 0 & 0 & i\theta(1-\delta)I_{L_1} \end{bmatrix}, \quad i \geq 1$$

$$Z_i = \begin{bmatrix} Z_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{N-1} \otimes Z_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{(n-k-N+2)} \otimes Z_{3i} \end{bmatrix}, \quad Z_{1i} = I_m \otimes (i\theta\beta)$$

$$Z_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \otimes (i\theta\beta) \\ i\theta I_{mn_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_{3i} = [i\theta I_{mn_1} \quad 0]$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} (\gamma D_1) \otimes I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n-k+1} \otimes \bar{A}_0^{(1)} \end{bmatrix}, \bar{A}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} (\gamma D_1) \otimes I_{n_1} & 0 \\ 0 & (\gamma D_1) \otimes I_{n_2} \end{bmatrix}$$

### 3. SYSTEM STABILITY

**Theorem 1.** *The assumption that after each retrial a customer may leave the system with probability  $1 - \delta$  makes the system stable irrespective of the parameter values.*

*Proof.* To prove the theorem we use a result due to Tweedie [6]. For the model under consideration we consider the following Lyapunov function:

$$\phi(s) = i \text{ if } s \text{ is a state belonging to level } i$$

The mean drift  $y_s$  for an  $s$  belonging to level  $i \geq 1$  is given by

$$\begin{aligned} y_s &= \sum_{p \neq s} q_{sp}(\phi(p) - \phi(s)) \\ &= \sum_{s'} q_{ss'}(\phi(s') - \phi(s)) + \sum_{s''} q_{ss''}(\phi(s'') - \phi(s)) \\ &\quad + \sum_{s'''} q_{ss'''}(\phi(s''') - \phi(s)) \end{aligned}$$

where  $s', s'', s'''$  varies over the states belonging to levels  $i - 1, i, i + 1$  respectively. Then by definition of  $\phi$ ,  $\phi(s) = i$ ,  $\phi(s') = i - 1$ ,  $\phi(s'') = i$ ,  $\phi(s''') = i + 1$

So that

$$y_s = - \sum_{s'} q_{ss'} + \sum_{s'''} q_{ss'''} \\ y_s = \begin{cases} -i\theta + \sum_{s'''} q_{ss'''}, & \text{if } s \in I_i \\ -i\theta(1 - \delta) + \sum_{s'''} q_{ss'''}, & \text{if } s \in \bar{I}_i \end{cases}$$

where  $I_i$  denotes the collection of states in level  $i$  which corresponds to  $N_2(t) < M$ , and  $\bar{I}_i$  denotes the collection of states in level  $i$  which correspond to  $N_2(t) = M$ .

We note that  $\sum_{s'''} q_{ss'''}$  is bounded by some fixed constant for any  $s$  in any level  $i \geq 1$ . So, let  $\sum_{s'''} q_{ss'''} < \kappa$ , for some real number  $\kappa > 0$ , for all states  $s$  belonging to level  $i \geq 1$ . Also since  $1 - \delta > 0$ , for any  $\epsilon > 0$ , we can find  $N'$  large enough that  $y_s < -\epsilon$  for any  $s$  belonging to level  $i \geq N'$ .

Hence by Tweedie's result, the theorem follows. □

### 4. STEADY STATE DISTRIBUTION

Since the process under consideration is an *LDQBD*, to calculate the steady state distribution, we use the methods described in Bright and Taylor [2].

By partitioning the steady state vector  $\mathbf{x}$  as  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  we can write

$$x_k = x_0 \prod_{l=0}^{k-1} R_l \quad \text{for } k \geq 1$$

where the family of matrices  $\{R_k, k \geq 0\}$  are minimal non-negative solutions to the system of equations:

$$(1) \quad A_0 + R_k A_{1\ k+1} + R_k [R_{k+1} A_{2\ k+2}] = 0, \quad k \geq 0$$

$x_0$  is calculated by solving

$$(2) \quad x_0 [A_{10} + R_0 A_{21}] = 0$$

such that

$$(3) \quad x_0 \mathbf{e} + x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \prod_{l=0}^{k-1} R_l \right] \mathbf{e} < \infty$$

The calculation of the above infinite sums does not seem to be practical, so we approximate  $x_k$ s by  $x_k(K^*)$ s where  $(x_k(K^*))_j, 0 \leq k \leq K^*$ , is defined as the stationary probability that  $X(t)$  is in the  $j^{\text{th}}$  state of level  $k$ , conditional on  $X(t)$  being in level  $i, 0 \leq i \leq K^*$ .

Then  $x_k(K^*), 0 \leq k \leq K^*$  is given by

$$(4) \quad x_k(K^*) = x_0(K^*) \prod_{l=0}^{k-1} R_l$$

where  $x_0(K^*)$  satisfies (2) and

$$(5) \quad x_0(K^*) \mathbf{e} + x_0(K^*) \left[ \sum_{k=1}^{K^*} \left[ \prod_{l=0}^{k-1} R_l \right] \right] \mathbf{e} = 1$$

Here we have that for all  $i \geq 1$ , and for all  $k$ , there exists  $j$  such that  $[A_{2i}]_{k,j} > 0$ . So we can construct a dominating process  $\bar{X}(t)$  of  $X(t)$  and can use it to find the truncation level  $K^*$  in the same way as in [2], as follows. The dominating process  $\bar{X}(t)$  has generator

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} A_{10} & A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \bar{A}_{11} & \bar{A}_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{13} & \bar{A}_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

where

$(\bar{A}_0)_{i,j} = \frac{1}{C} [(A_0 e)_{\max}]$ ,  $(\bar{A}_{2k})_{i,j} = \frac{1}{C} \left( (A_{2,k-1})_{\min} \mathbf{e} \right)$  for  $k \geq 2$ ,  $(\bar{A}_{1k})_{ij} = (A_{1k})_{ij}$ ,  $j \neq i, k \geq 1$ ; and  $C = Nm + (M + 1)(n - k + 1)mn_1 + M(n - k + 2)mn_2$  is the dimension of a level  $i \geq 1$ .

### 5. PERFORMANCE MEASURES

We partition the steady state vector  $\mathbf{x}$  as  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  where the sub-vectors  $x_{j_1}$ s are again partitioned as  $x_{j_1} = x(j_1, j_2, j_3, j_4)$  which correspond to  $N_i(t) = j_i, 1 \leq i \leq 4$

(1) Fraction of time the system is down is given by

$$\mathcal{P}_{\text{down}} = \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_2=0}^M \sum_{j_4=1}^2 x(j_1, j_2, n - k + 1, j_4) \mathbf{e}.$$

- (2) System reliability, defined as the probability that atleast  $k$  components are operational,  $\mathcal{P}_{\text{rel}}$  is given by

$$\mathcal{P}_{\text{rel}} = 1 - \mathcal{P}_{\text{down}}.$$

- (3) Average no. of external units waiting in the pool is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\text{pool}} = \sum_{j_2=1}^M j_2 \left( \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_3=1}^{n-k+1} x(j_1, j_2, j_3, 1) \mathbf{e} \right. \\ \left. + \sum_{j_2=2}^M (j_2 - 1) \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_3=0}^{n-k+1} x(j_1, j_2, j_3, 2) \mathbf{e} \right) \end{aligned}$$

- (4) Average no. of external units in the orbit is given by

$$\mathcal{N}_{\text{orbit}} = \sum_{j_1=1}^{K^*} j_1 [x(j_1) \mathbf{e}]$$

- (5) Average no. of failed components is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\text{faic}} = \sum_{j_3=1}^{n-k+1} j_3 \left( \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_2=1}^M x(j_1, j_2, j_3, 2) \mathbf{e} \right. \\ \left. + \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_2=0}^M x(j_1, j_2, j_3, 1) \mathbf{e} \right) + \sum_{j_3=1}^{N-1} j_3 \sum_{j_1=0}^{K^*} x(j_1, 0, j_3, 0) \mathbf{e} \end{aligned}$$

- (6) The probability that an external unit, on its arrival joins the queue in the pool is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{queue}} = \frac{1}{\lambda_g} \left\{ \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_2=1}^{M-1} \sum_{j_3=1}^{n-k+1} \sum_{j_4=1}^2 x(j_1, j_2, j_3, j_4) [D_1 \otimes I_{n_{j_4}}] \mathbf{e} \right. \\ \left. + \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_3=1}^{n-k+1} x(j_1, 0, j_3, 1) (D_1 \otimes I_{n_1}) \mathbf{e} \right\} \end{aligned}$$

- (7) The probability that an external unit, on its arrival gets service directly is given by

$$\mathcal{P}_{\text{ds}} = \frac{1}{\lambda_g} \left\{ \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_3=0}^{N-1} x(j_1, 0, j_3, 0) D_1 \mathbf{e} \right\}$$

- (8) The probability that an external unit, on its arrival enters orbit is given by

$$\mathcal{P}_{\text{orbit}} = \frac{1}{\lambda_g} \left\{ \sum_{i=0}^{K^*} x(i) A_0 \mathbf{e} \right\}$$

- (9) Fraction of time the server is busy with external customers is given by

$$\mathcal{P}_{\text{exbusy}} = \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_2=1}^M \sum_{j_3=0}^{n-k+1} x(j_1, j_2, j_3, 2) \mathbf{e}$$

(10) Probability that the server is found idle is given by

$$\mathcal{P}_{\text{idle}} = \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_2=0}^{N-1} x(j_1, 0, j_2, 0)$$

(11) Probability that the server is found busy is given by

$$\mathcal{P}_{\text{busy}} = 1 - \mathcal{P}_{\text{idle}}$$

(12) Expected loss rate of external customers is given by

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{loss}} = & \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_2=1}^{n-k+1} x(j_1, M, j_2, 1)(1 - \gamma)(D_1 \otimes I_{n_1})\mathbf{e} \\ & + \sum_{j_1=0}^{K^*} \sum_{j_2=0}^{n-k+1} x(j_1, M, j_2, 2)(1 - \gamma)(D_1 \otimes I_{n_2})\mathbf{e} \\ & + \sum_{j_1=1}^{K^*} \sum_{j_2=1}^{n-k+1} (1 - \delta)j_1\theta x(j_1, M, j_2, 1)\mathbf{e} \\ & + \sum_{j_1=1}^{K^*} \sum_{j_2=0}^{n-k+1} (1 - \delta)j_1\theta x(j_1, M, j_2, 2)\mathbf{e} \end{aligned}$$

(13) We construct a cost function as where  $C_1$  is the holding cost per unit time per customer waiting in the pool,  $C_2$  is the loss per unit time due to the system becoming down,  $C_3$  is the loss per unit time due to a customer leaves the system without taking service,  $C_4$  is the holding cost per unit time per failed component in the system,  $C_5$  is the loss per unit time due to the server becoming idle and  $C_6$  is the profit per unit time due to the server becoming busy with an external customer.

## 6. NUMERICAL ILLUSTRATION

Set  $\theta = 15.0$ ,  $\lambda = 1.0$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\delta = 0.7$ ,  $n = 11$ ,  $k = 4$ ,  $M = 5$ ,  $N = 4$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -6.5 & 4.0 \\ 1.5 & -4.5 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} -5.06 & 2.06 \\ 4.0 & -6.5 \end{bmatrix} \quad S_1^0 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 3.0 \end{bmatrix} \quad S_2^0 = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 2.5 \end{bmatrix} \quad \alpha = (0.5, 0.5)$$

$$\beta = (0.5, 0.5)$$

$$C_1 = 10.0, C_2 = 1500.0, C_3 = 100.0, C_4 = 20.0, C_5 = 50.0, C_6 = 200.0.$$

**Effect of correlation :** The additional parameters for table 1 are the following

$$(A1) \quad D_0 = \begin{bmatrix} -5.5 & 3.5 \\ 1.0 & -3.5 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

average arrival rate = 2.34615, correlation = -0.00029

$$(A2) \quad D_0 = \begin{bmatrix} -4.05 & 1.55 \\ 3.5 & -5.5 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 2.05 & 0.45 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

average arrival rate = 2.34615, correlation = 0.00029

$$(B1) \quad D_0 = \begin{bmatrix} -6.5 & 4.0 \\ 1.5 & -4.5 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

average arrival rate = 2.83333, correlation = -0.00042

$$(B2) \quad D_0 = \begin{bmatrix} -5.06 & 2.06 \\ 4.0 & -6.5 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 2.56 & 0.44 \\ 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

average arrival rate = 2.83333, correlation = 0.00042

$$(C1) \quad D_0 = \begin{bmatrix} -6.6 & 4.05 \\ 1.55 & -4.6 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1.55 & 1.0 \\ 1.0 & 2.05 \end{bmatrix}$$

average arrival rate = 2.88224, correlation = -0.00041

$$(C2) \quad D_0 = \begin{bmatrix} -5.15 & 2.1 \\ 4.05 & -6.6 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 2.6 & 0.45 \\ 1.0 & 1.55 \end{bmatrix}$$

average arrival rate = 2.88224, correlation = 0.00041

In the above correlation is between two inter-arrival times.

TABLE 1

	$\mathcal{P}_{\text{down}}$	$\mathcal{N}_{\text{pool}}$	$\mathcal{N}_{\text{orbit}}$	$\mathcal{N}_{\text{faic}}$	$\mathcal{P}_{\text{exbusy}}$	$\mathcal{P}_{\text{idle}}$	Cost
A1	$.2805 \times 10^{-2}$	3.262	0.1204	2.2281	0.5620	0.0842	37.8228
A2	$.2803 \times 10^{-2}$	3.2572	0.1207	2.2278	0.5612	0.0850	38.1696
B1	$.2923 \times 10^{-2}$	3.6689	0.1822	2.2431	0.5940	0.0522	68.2556
B2	$.2922 \times 10^{-2}$	3.6647	0.1824	2.2429	0.5935	0.0526	68.4537
C1	$.2932 \times 10^{-2}$	3.7031	0.1888	2.2442	0.5964	0.0497	71.6377
C2	$.2931 \times 10^{-2}$	3.6992	0.1890	2.2440	0.5960	0.0502	71.8214

The table 1 shows that as the external arrival rate increases the system down probability increases; but this increase is narrow as compared to the decrease in server idle probability. Also as expected, the expected number in the pool, in the orbit and the expected number of failed components and the fraction of time the server is found busy with an external customer increases as the external arrival rate increases. The table also shows that as the correlation changes from negative to positive, there is a slight increase in cost and in the server idle probability. Also when correlation changes from negative to positive, the expected number of pooled customers and failed components decrease while the expected number in the orbit increases. The increase in probability  $\mathcal{P}_{\text{exbusy}}$  being small compared to the increase in other parameters can be thought of as the reason behind increase in cost. But all these changes are narrow as the difference between negative and positive correlation is small.

**Effect of component failure rate :** Take  $\theta = 20.0$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\delta = 0.7$ ,  $n = 11$ ,  $k = 4$ ,  $M = 5$ ,  $N = 4$ .

Arrival process is according to (A1).

Table 2 shows that when the component failure rate  $\lambda$  increases, the system down probability as well as expected number of failed components increase and the idle time probability of the server decreases, as expected. But note that as  $\lambda$  increases, the fraction of time the server is found busy with an external customer, decreases and as a result the expected pool size increases. Also note that the expected orbit

TABLE 2. Effect of component failure rate

$\lambda$	$\mathcal{P}_{\text{down}}$	$\mathcal{N}_{\text{pool}}$	$\mathcal{N}_{\text{orbit}}$	$\mathcal{N}_{\text{faic}}$	$\mathcal{P}_{\text{exbusy}}$	$\mathcal{P}_{\text{idle}}$	Cost
0.05	$.196 \times 10^{-8}$	2.1163	0.0285	1.5266	0.7513	0.2310	-67.3177
0.1	$.5933 \times 10^{-7}$	2.1765	0.0311	1.5538	0.7432	0.2213	-63.3658
1.0	$.2801 \times 10^{-2}$	3.2399	0.0907	2.2276	0.5607	0.0855	38.4979
2.0	0.04702	4.2095	0.1748	3.5505	0.3029	0.0208	261.502
3.0	0.17207	4.7390	0.2362	5.1091	0.1149	0.0038	580.397

size is small, which shows that the orbital customers are either transferred to the pool (when  $\lambda$  is small) or leaves the system forever (when  $\lambda$  is large). Since the probability  $\mathcal{P}_{\text{down}}$  increases and the probability  $\mathcal{P}_{\text{exbusy}}$  decreases, as  $\lambda$  increases, the cost also increases.

**Effect of  $N$  policy level :**  $\theta = 20.0, \lambda = 2.0, n = 13, k = 4, M = 5$

The other parameters are same as for table 2.

Table 3 shows that the system performance measure which is most affected by

TABLE 3. Effect of  $N$ -policy level

$N$	$\mathcal{P}_{\text{down}}$	$\mathcal{N}_{\text{pool}}$	$\mathcal{N}_{\text{orbit}}$	$\mathcal{N}_{\text{faic}}$	$\mathcal{P}_{\text{exbusy}}$	$\mathcal{P}_{\text{idle}}$	Cost
4	0.02245	4.2521	0.1802	3.8666	0.2866	0.01969	203.559
5	0.02795	4.2249	0.1801	4.2456	0.2869	0.02325	219.258
6	0.03528	4.1968	0.1796	4.6087	0.2882	0.02717	237.002
7	0.04509	4.1658	0.1787	4.9473	0.2910	0.03135	257.358
8	0.05830	4.1300	0.1771	5.2518	0.2959	0.03577	281.200

the  $N$ -policy level is the expected number of failed components; which is expected because as  $N$  increases, time for the service of failed components to be started, once the system started with all components operational, increases so that during this time more components may fail. For the same reason a pooled customer has a better chance of getting service and as a result  $\mathcal{P}_{\text{exbusy}}$  increases,  $\mathcal{N}_{\text{pool}}$  and  $\mathcal{N}_{\text{orbit}}$  decreases. Also note that the server idle probability is small. The increase in  $\mathcal{N}_{\text{faic}}$  might be the reason behind the increase in cost.

**Effect of retrial rate  $\theta$  :** Take  $\lambda = 1.0, n = 11, k = 4, M = 5, N = 4$

The other parameters are the same as in table 2.

Table 4 shows that as  $\theta$  increases, expected number in the orbit decreases but the expected pool size also decreases which tells that retrying customers may be

TABLE 4. Effect of retrial rate

$\theta$	$\mathcal{P}_{\text{down}}$	$\mathcal{N}_{\text{pool}}$	$\mathcal{N}_{\text{orbit}}$	$\mathcal{N}_{\text{faic}}$	$\mathcal{P}_{\text{exbusy}}$	$\mathcal{P}_{\text{idle}}$	cost
5.0	$.2832 \times 10^{-2}$	3.3908	0.3501	2.2315	0.5704	0.07579	33.688
10.0	$.2813 \times 10^{-2}$	3.3008	0.1790	2.2290	0.5644	0.08176	36.612
15.0	$.2805 \times 10^{-2}$	3.2620	0.1204	2.2281	0.5620	0.08415	37.823
20.0	$.2801 \times 10^{-2}$	3.2399	0.0907	2.2276	0.5607	0.08546	38.498
25.0	$.2798 \times 10^{-2}$	3.2255	0.0728	2.2272	0.5598	0.08630	38.932

leaving the system. Note that the idle probability of the server is very small and the expected pool size is also close to the maximum pool capacity so that retrying customers may choose to leave the system after a failed retrieval. Also this can be thought of as the reason behind the decrease in the fraction of time the server is found busy with an external customer and the increase in cost as  $\theta$  increases.

**Effect of pool size  $M$  :  $\theta = 10.0, \lambda = 1.0$**

The other parameters are same as for table 2.

TABLE 5. Effect of pool size

M	$\mathcal{P}_{\text{down}}$	$\mathcal{N}_{\text{pool}}$	$\mathcal{N}_{\text{orbit}}$	$\mathcal{N}_{\text{faic}}$	$\mathcal{P}_{\text{exbusy}}$	$\mathcal{P}_{\text{idle}}$	cost
3	$.2655 \times 10^{-2}$	1.9658	0.2155	2.2090	0.5084	0.1377	65.402
4	$.2743 \times 10^{-2}$	2.6238	0.1942	2.2201	0.5410	0.1051	55.047
5	$.2813 \times 10^{-2}$	3.3008	0.1790	2.2290	0.5644	0.0818	36.612

Table 5 shows that as  $M$ , the pool size, increases, expected number of pooled customers increases and as a result the expected number of failed components, the system down probability and the fraction of time the server is found busy with and external customer increases. But the expected number in the orbit decreases, which is expected because as  $M$  increases more customers can join the pool. As expected, the idle probability of the server decreases as  $M$  increases.

**Comparison with the case where no external customers are allowed :**

Below we compare the  $k$ -out-of- $n$ -system with a  $k$ -out-of- $n$  system where no external customers are allowed.

**Case 1:**  $k$ -out-of- $n$  system where no external customers are allowed,

**Case 2:**  $k$ -out-of- $n$  system

$$\theta = 10.0, \lambda = 1.0, \gamma = 0.7, \delta = 0.7, n = 11, k = 4, N = 4$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} -5.5 & 3.5 \\ 1.0 & -3.5 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -7.5 & 2.0 \\ 2.1 & -7.7 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} -5.06 & 2.06 \\ 4.0 & -6.5 \end{bmatrix}$$

$$S_1^0 = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 5.6 \end{bmatrix} \quad S_2^0 = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [0.5 \quad 0.5] \quad \beta = [0.5 \quad 0.5]$$

TABLE 6. Comparison with the  $k$ -out-of- $n$  system where no external customers are allowed

		$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2.0$	$\lambda = 2.5$	
$M = 1$	$\mathcal{P}_{\text{down}}$	Case 1	$< 10^{-13}$	$.3956 \times 10^8$	$.9124 \times 10^{-6}$	$.2081 \times 10^{-4}$	$.1822 \times 10^{-3}$	
		Case 2	$.129 \times 10^{-7}$	$.2379 \times 10^{-4}$	$.4329 \times 10^{-3}$	$.2039 \times 10^{-2}$	$.5728 \times 10^{-2}$	.01237
	$\mathcal{P}_{\text{busy}}$	Case 1	0.0180	0.0901	0.1802	0.2703	0.3603	0.4501
		Case 2	0.5347	0.5836	0.6415	0.6958	0.7458	0.7914
$M = 2$	$\mathcal{P}_{\text{down}}$	Case 1	$< 10^{-13}$	$.3956 \times 10^8$	$.9124 \times 10^{-6}$	$.2081 \times 10^{-4}$	$.1822 \times 10^{-3}$	
		Case 2	$.1801 \times 10^{-7}$	$.3289 \times 10^{-4}$	$.5952 \times 10^{-3}$	$.2782 \times 10^{-3}$	$.7689 \times 10^{-2}$	$.1616 \times 10^{-1}$
	$\mathcal{P}_{\text{busy}}$	Case 1	0.0180	0.0901	0.1802	0.2703	0.3603	0.4501
		Case 2	0.7500	0.7941	0.8434	0.8848	0.9179	0.9433



TABLE 7. Variation in  $ID_{cost}$

$ID_{cost}$		$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2.0$	$\lambda = 2.5$
$M = 1$	$C_{11} = 100$ Case 1	-0.1800	-0.9010	-1.8019	-2.7009	-3.5848	-4.4077
	$C_{12} = 10$ Case 2	-5.3470	-5.8336	-6.3717	-6.7541	-6.8852	-6.6770
	$C_{11} = 1000$ Case 1	-0.1800	-0.9010	-1.8011	-2.6822	-3.4208	-3.5675
	$C_{12} = 10$ Case 2	-5.3470	-5.8122	-5.9821	-4.9190	-1.7300	4.4560
	$C_{11} = 10000$ Case 1	-0.1800	-0.9010	-1.7929	-2.4949	-1.7810	4.8340
	$C_{12} = 10$ Case 2	-26.7349	-28.9421	-27.7460	-14.4000	19.9900	84.1300
$M = 4$	$C_{11} = 100$ Case 1	-0.1800	-0.9010	-1.8019	-2.7009	-3.5848	-4.4077
	$C_{12} = 10$ Case 2	-7.5000	-7.9377	-8.3745	-8.5698	-8.4101	-7.8170
	$C_{11} = 1000$ Case 1	-0.1800	-0.9010	-1.8011	-2.6822	-3.4208	-3.5675
	$C_{12} = 10$ Case 2	-7.5000	-7.9081	-7.8388	-6.0660	-1.4900	6.7270
	$C_{11} = 10000$ Case 1	-0.1800	-0.9010	-1.7929	-2.4949	-1.7810	4.8340
	$C_{12} = 10$ Case 2	-7.4998	-7.6121	-2.4820	18.9720	67.7110	152.167

Table 6 shows that compared to the increase in the fraction of time the server is found busy, the increase in the system down probability is not high, if we provide service to external customers in a  $k$ -out-of- $n$  system To make these statements more clear we consider the cost function

$$ID_{cost} = C_{11} \cdot \mathcal{P}_{down} - C_{12} \cdot \mathcal{P}_{busy}$$

where  $C_{11}$  is the loss per unit time the system being down and  $C_{12}$  is the profit per unit time due to the server being busy.

Table 7 shows that when  $M = 1$  and  $\lambda \leq 1.5$ ,  $ID_{cost}$  is smaller in case 2 than case 1, even when  $C_{11}$  is 1000 times bigger than  $C_{12}$ . But when  $\lambda = 2.0$  and  $2.5$ ,  $ID_{cost}$  is larger in case 2 than case 1, when  $C_{11}$  is 100 times larger than  $C_{12}$ . When  $M = 4$  and  $\lambda \leq 1.0$ , the table shows that  $ID_{cost}$  is smaller in case 2 than in case 1, even when  $C_{11}$  is 1000 times bigger than  $C_{12}$ . But when  $\lambda = 2.0$  and  $2.5$ ,  $ID_{cost}$  is larger in case 2 than case 1, when  $C_{11}$  is 100 times larger than  $C_{12}$ .

Table 7 proves atleast numerically that we are able to utilize server idle time without much effecting system reliability.

REFERENCES

- [1] P. P. Bocharov, O. I. Pavlova, and D. A. Puzikova. M/G/1/r Retrial queuing systems with priority of primary customers. *TOP*, 30(3-4):89-98, 1999.
- [2] L. Bright and P. G. Taylor. Equilibrium distribution for level-dependent quasi-birth-and-death processes. *Comm. Stat. Stochastic Models*, 11:497-525, 1995.
- [3] T. G. Deepak, V. C. Joshua, and A. Krishnamoorthy. Queues with postponed work. *TOP*, 12(3-4), 2004.
- [4] A. Krishnamoorthy and P. V. Ushakumari. Reliability of  $k$ -out-of- $n$  system with repair and retrial of failed units. *TOP*, 7(2):293-304, 1999.
- [5] A. Krishnamoorthy, P. V. Ushakumari, and B. Lakshmi.  $k$ -out-of- $n$  system with the repair: the  $N$ -policy. *Asia Pacific Journal of Operations Research*, 19:47-61, 2002.
- [6] R. L. Tweedie. Sufficient conditions for regularity, recurrence and ergodicity of markov processes. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 78, Part I, 1975.
- [7] P. V. Ushakumari and A. Krishnamoorthy.  $k$ -out-of- $n$  system with repair: the  $\max(N, T)$  policy. *Performance Evaluation*, 57:221-234, 2004.

A. KRISHNAMOORTHY, VISHWANATH C. NARAYANAN, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, CUSAT, KOCHI, INDIA

T. G. DEEPAK, M. G. UNIVERSITY REGIONAL CENTRE, KOCHI, INDIA

# CONFIDENCE INTERVALS ASSOCIATED WITH PERFORMANCE ANALYSIS OF SYMMETRIC LARGE CLOSED CLIENT/SERVER COMPUTER NETWORKS

---

Vyacheslav Abramov

School of Mathematical Sciences, Monash University,  
Clayton Campus, Building 28, Level 4, Wellington road,  
Victoria 3800, Australia.

e-mail: [vyacheslav.abramov@sci.monash.edu.au](mailto:vyacheslav.abramov@sci.monash.edu.au)

## Abstract

The paper studies a closed queueing network containing a server station and  $k$  identical client stations. The client stations are subject to breakdowns, and a lifetime of each client station is assumed to be a random variable independent of all other ones having the probability distribution  $G(x)$ . The server station is an infinite server queueing system, and client stations are single server queueing systems with autonomous service, i.e. every client station serves customers (units) only at random instants generated by strictly stationary and ergodic sequence of random variables. The total number of units in the network is  $N$ . The service times of units in the server station are independent exponentially distributed with parameter  $\lambda$ . The expected times between departures in client stations are  $(N\mu)^{-1}$ . After a service completion in the server station a unit is transmitted to the  $j$ th client station with equal probability  $1/l$ , where  $l \leq k$  is the number of currently available (i.e. not failure) client stations, and being processed in the  $j$ th client station the unit returns to server station. The parameter  $N$  is assumed to be large. The aim of this paper is to study the behaviour of bottleneck queues and to find confidence intervals associated with increasing a given high level of queue proportional to  $N$  in client stations.

**Key words:** Closed networks, Performance analysis, Normalized queue-length process, Confidence intervals

**2000 Mathematical Subject Classification:** 60K30, 60K25

## 1. Introduction

Consider a large closed queueing network containing a server station (infinite-server queueing system) and  $k$  identical single-server client stations. The total number of customers (units) is  $N$ , where  $N$  is assumed to be a large parameter. The departure process from client stations is assumed to be autonomous. Queueing systems with autonomous service mechanism have been introduced and originally studied by Borovkov [6, 7]. The formal definition of these systems in the simplest case of single arrivals and departures is as follows. Let  $A(t)$  denote an arrival point process, let  $S(t)$  denote a departure point process, and let  $Q(t)$  be a queue-length process, and all these processes are started at zero ( $A(0) = S(0) = Q(0) = 0$ ). Then the autonomous service mechanism is defined by the equation:

$$Q(t) = A(t) - \int_0^t I\{Q(s-) > 0\} dS(t).$$

The queueing systems with autonomous service mechanism have been studied in many papers (e.g. Abramov [1, 3, 4], Fricker [8, 9], Gelenbe and Iasnogorodski [10]). In the present paper we study a closed client/server network (see Figure 1).

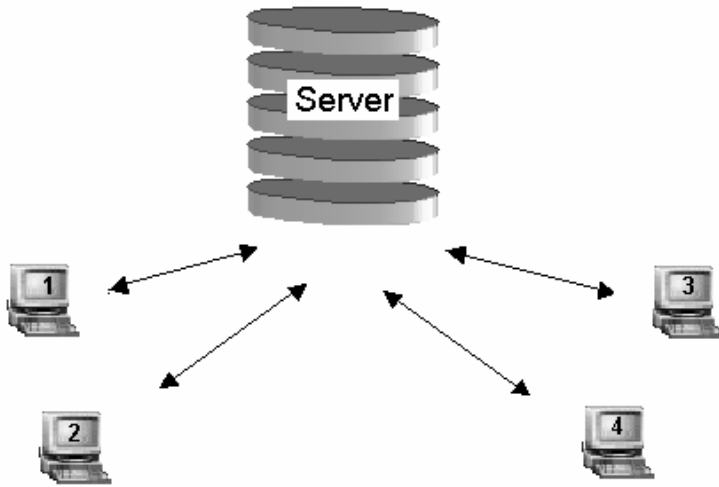


Figure 1. An example of client/server network

The arrival process from the server to the  $i$ th client station is denoted  $A_{i,N}(t)$ . The service time of each unit in the server station is exponentially distributed with parameter  $\lambda$ . Therefore, the rate of arrival to client stations depends on the number of units in the server station. If there is  $N_t$  units in the server station in time  $t$ , then the rate of departure of customers from the server in time  $t$  is  $\lambda N_t$ . There are  $k$  client stations in total, and each

of client station is a subject to breakdown. The lifetime of each client station is a continuous random variable independent of lifetimes of other client stations and has the probability distribution  $G(x)$ .

All client stations are assumed to be identical, and a unit transmitted from the server chooses each one with equal probability. (For this reason the network is called symmetric.) Therefore, if there are  $l$  available client stations in time  $t$ , then the rate of arrival to each of these client stations is  $\lambda N_t / l$ .

The departure instants from the  $j$ th client station ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) are  $\xi_{j,N,1}, \xi_{j,N,1} + \xi_{j,N,2}, \xi_{j,N,1} + \xi_{j,N,2} + \xi_{j,N,3}, \dots$  where each sequence  $\xi_{j,N,1}, \xi_{j,N,2}, \dots$  forms a strictly stationary and ergodic sequence of random variables ( $N$  is the series parameter). The corresponding point process associated with departures from the client station  $j$  is denoted

$$S_{j,N}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I\left(\sum_{l=1}^i \xi_{j,N,l} \leq t\right),$$

and satisfies the condition

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{j,N}(t)}{t} = \mu N\right) = 1.$$

Then, the relations between parameters  $\lambda$ ,  $\mu$  and  $k$  are assumed to be

$$(1.1) \quad \frac{\lambda}{k\mu} < 1,$$

and

$$(1.2) \quad \frac{\lambda}{\mu} > 1.$$

Condition (1.1) means that all of the client stations are initially non-bottleneck, i.e. the service rate is greater than arrival rate. Condition (1.2) means that after one or other breakdown all of the client stations become bottleneck. Denote

$$l_0 = \max \left( l : \frac{\lambda}{l\mu} > 1 \right).$$

the maximum number of available client stations when the client stations all are bottleneck. Then for all  $l \leq l_0$  the rest  $l$  client stations will be bottleneck as well.

The queue-length process in the  $j$ th client station is defined as

$$Q_{j,N}(t) = A_{j,N}(t) - \int_0^t \mathbf{I}(Q_{j,N}(s-) > 0) \mu S_{j,N}(s) ds,$$

where  $A_{j,N}(t)$  is the arrival process to the client station  $j$ .

Let  $\alpha < 1$  be a given positive number. We say that the network is at risk if the total number of units in client stations exceeds the value  $\alpha N$ . Assuming that at the initial time moment all of the units are in the server station, the aim of this paper is to find a confidence interval  $[0, \theta)$  such that with given high probability  $P$  (say  $P = 0.95$ ) the network will not be at risk during that time interval  $[0, \theta)$ . For networks with an arbitrary number of client stations this problem is hard, because the behaviour of bottleneck queues is very complicated (see next section for explicit results). Therefore in the present paper we study this problem for the case of network with two client stations only.

A large closed client/server queueing network with bottlenecks has been studied in many papers. The bottleneck analysis of Markovian networks has been provided by Kogan and Liptser [11]. Abramov [1, 2, 3] has extended the results of [11] to non-Markovian networks. Specifically, [1] has studied the variant of network with autonomous service mechanism in client stations. The results of [1] have been then extended to networks with two types of node and multiple unit classes in [4]. However, the contribution of the aforementioned papers is purely theoretical. All of them provide the bottleneck analysis for the particular case of one bottleneck station and under the assumption that at the initial time moment all of the units are concentrated at the server station.

The detailed bottleneck analysis of the network including all cases related to bottleneck stations as well as initial conditions has been recently done in Abramov [5]. The results of [5] are promising for the solution of many applied problems. Specifically, the analysis of [5] is devoted to closed client/server networks in semi-Markov environment requiring the study of these networks under most general assumptions. The asymptotic solution of the problem of the present paper, as  $N$  increases indefinitely, is based on the study of [5].

It is worth noting that reliability of computer systems themselves has been studied in many papers. We refer the book of Xie, Dai and Poh [12], where a reader can find the detailed information related to this subject. The confidence intervals that are studied in the present paper are related to reliability of information, which heavily depends on reliability of the network.

The paper is motivated by significant practical problems in telecommunication systems. Support and exchange of information is very expansive and often increases the related costs of the equipment itself. On the other hand, reliable support of information is derivative from high reliability of equipment and directly depends on that reliability. A special circle of practical problems is related to support of large databases. Then "units" are associated with units of information (records), and "client stations" are associated with users of a database. "Failing station" can be associated with absence of connection or very low rate of exchange. Low exchange in certain stations can result in bottleneck of entire network leading to destruction of a database.

The paper is organized as follows. In Section 2 we recall some of the results of [5] which are necessary for our purpose and then adapt them to the case of symmetric network considered here. In Section 3 we derive the distribution of the normalized queue-length processes in available client stations. In Section 4 we establish results for confidence intervals in the particular case of two client stations. In Section 5 we give a simple numerical example. In Section 6 we conclude the paper.

## 2. Bottleneck client stations

In this section we recall some results of bottleneck analysis of [5] corresponding to the cases considered in the present paper. We start from the elementary case of  $l$  equivalent bottleneck stations exactly, i.e. the case that at the initial time moment  $t = 0$  there are  $l$  bottleneck stations is discussed. For simplicity, assume that all of these  $l$  stations are absolutely reliable, and at the initial time moment  $t = 0$  there are  $(1 - \beta)N$  units in the server station,  $0 < \beta \leq 1$ , and the rest  $\beta N$  are distributed between  $l$  client stations. So, because the network is symmetric, the assumption that there are approximately  $\beta N / l$  units in each client station in time  $t = 0$ , according to the law of large numbers, is reasonable. The assumption that the client stations are bottleneck means that  $\lambda(1 - \beta) > l\mu$ .

The result on asymptotic behaviour of normalized queue-length in client stations follows from Proposition 5.3 of [5] which related to an asymmetric network with bottleneck stations and arbitrary initial queue-length. Recall this result.

**Lemma 2.1.** *Assume that all client stations are initially bottleneck, and the initial queue-lengths in client stations are asymptotically equivalent to  $N\beta_1, N\beta_2, \dots, N\beta_k$  correspondingly ( $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k \leq 1$ ), as  $N \rightarrow \infty$ . Then, the normalized queue-length in the  $j$ th client station in limit as  $N \rightarrow \infty$  is determined as*

$$(2.1) \quad q_j(t) = \beta_j + \left(1 - \sum_{j=1}^k \beta_j\right) \left( [\lambda_j(0) - \mu_j]t - \lambda_j(0) \int_0^t r(s) ds \right),$$

$$(2.2) \quad r(t) = \left( \frac{\sum_{j=1}^k (\lambda_j(0) - \mu_j)}{\sum_{j=1}^k \lambda_j(0)} \right) \left( 1 - \exp \left[ -t \sum_{j=1}^k \lambda_j(0) \right] \right),$$

where  $q_j(t)$  denotes the normalized queue-length process in the  $j$ th client station in limit, i.e.  $q_j(t)$  is the limit in probability of  $Q_{j,N}(t)/N$  as  $N$  increases indefinitely.

In the notation of this lemma  $\lambda_j(0)N$  denotes the instantaneous rate of units to the  $j$ th client station in time  $t = 0$ , and  $\mu_j N$  denotes the service rate in the  $j$ th client station. In our particular case the number of nodes is  $l$ , the instantaneous rate of units to each client station is  $(1 - \beta)\lambda N / l$  and the service rate is  $\mu N$  and all  $q_j(t)$  are equal, i.e.  $q_j(t) \equiv g(t)$  for all  $j = 1, 2, \dots, l$ . Therefore in our case from this Lemma 2.1 we have the following statement.

**Proposition 3.2.** *We have:*

$$(2.3) \quad g(t) = \frac{\beta}{l} + (1 - \beta) \left( \left[ \frac{(1 - \beta)\lambda}{l} - \mu \right] t - \frac{(1 - \beta)\lambda}{l} \int_0^t r(s) ds \right),$$

where

$$(2.4) \quad r(t) = \left( 1 - \frac{\mu l}{(1 - \beta)\lambda} \right) \left( 1 - e^{-(1 - \beta)\lambda t} \right)$$

### 3. Limiting normalized cumulative queue-length process

In this section we study the limiting (as  $N \rightarrow \infty$ ) normalized cumulative queue-length process in client station. The limiting normalized cumulative queue-length process is denoted  $q(t)$ . At the initial time  $t = 0$  there are  $k$  available client stations. Let  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  be the moments of their breakdown,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k$ . The above moments of breakdown are associated with the behaviour of the time-dependent network which can be considered as a network in semi-Markov environment. Therefore one can apply Theorem 5.4 of [5].

The random time interval  $[0, \tau_k]$  is the lifetime of the entire system. Therefore  $q(t)$  is to be considered during the aforementioned random interval  $[0, \tau_k]$ . Recall that  $l_0 = \max(l : \lambda / (l\mu) > 1)$ . Therefore, according to Theorem 5.4 of [5] we obtain that in the random interval  $[0, \tau_{k-l_0})$ ,  $q(t) = 0$ . Next, in the random interval  $[\tau_{k-l_0}, \tau_{k-l_0+1})$  the equation for  $q(t)$  is

$$(3.1) \quad q(t) = (\lambda - l_0 \mu)(t - \tau_{k-l_0}) - \lambda \int_{\tau_{k-l_0}}^t r(s) ds,$$

where  $r(t)$  is given by (2.4). Equation (3.1) follows from (2.1) and (2.2) as follows. Setting  $\beta = 0$ ,  $l = l_0$  and replacing  $t$  with  $(t - \tau_{k-l_0})$  from (2.1) we obtain:

$$g(t) = \left( \frac{\lambda}{l_0} - \mu \right) (t - \tau_{k-l_0}) - \frac{\lambda}{l_0} \int_{\tau_{k-l_0}}^t r(s) ds.$$

Hence, taking into account that  $q(t) = l_0 g(t)$  we arrive at (3.1).

In the next interval  $[\tau_{k-l_0+1}, \tau_{k-l_0+2})$ ,  $l_0 > 1$ , we have the following equation:

$$(3.2) \quad g(t) = \frac{q(\tau_{k-l_0+1})}{l_0 - 1} + [1 - q(\tau_{k-l_0+1})] \left\{ \left[ \frac{[1 - q(\tau_{k-l_0+1})] \lambda}{l_0 - 1} - \mu \right] (t - \tau_{k-l_0+1}) - \frac{[1 - q(\tau_{k-l_0+1})] \lambda}{l_0 - 1} \int_{\tau_{k-l_0+1}}^t r(s) ds \right\}.$$

Therefore, in the time interval  $[\tau_{k-l_0+1}, \tau_{k-l_0+2})$

$$(3.3) \quad q(t) = q(\tau_{k-l_0+1}) + [1 - q(\tau_{k-l_0+1})] \left\{ ([1 - q(\tau_{k-l_0+1})] \lambda - \mu(l_0 - 1))(t - \tau_{k-l_0+1}) - [1 - q(\tau_{k-l_0+1})] \lambda \int_{\tau_{k-l_0+1}}^t r(s) ds \right\}.$$

In an arbitrary time interval  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = k - l_0, k - l_0 + 1, \dots, k - 1$ , we have:

$$q(t) = q(\tau_i) + [1 - q(\tau_i)] \left\{ ([1 - q(\tau_i)] \lambda - \mu(k - i))(t - \tau_i) - [1 - q(\tau_i)] \lambda \int_{\tau_i}^t r(s) ds \right\}.$$

In the last endpoint  $\tau_k$  we set  $q(t) = 1$ .

#### 4. Confidence intervals

The formulae for the limiting normalized cumulated queue-length process are complicated. Therefore in this section we obtain confidence intervals for the particular case of two client stations. In this case only simple representation (3.1) is used, which in the case of two client stations looks as follows:

$$(4.1) \quad q(t) = (\lambda - \mu)(t - \tau_1) - \lambda \int_{\tau_1}^t r(s) ds,$$

where

$$(4.2) \quad r(s) = \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)(1 - e^{-\lambda s}).$$

The confidence interval is structured from two intervals. The first one is  $[0, \tau_1)$ , where the limiting normalized cumulative queue-length is zero. The second interval is  $[\tau_1, \theta]$ , where  $\theta$  is a point where  $q(\theta) \leq \alpha$ . Equations (4.1) and (4.2) are defined for  $t < \tau_2$ , where  $\tau_2$  is a random breakdown point of the second client station.

Let  $\theta^*$  be a point where  $q(\theta^*) = \alpha$ . The point  $\theta^*$  is a random point depending on  $\tau_1$ . However, under the assumption that one or other client station is active, the length of the interval  $[\tau_1, \theta^*]$  is fixed and uniquely defined from (4.1) and (4.2).

Let us derive probability distribution of the process  $q(t)$ . Clearly, that the probability that  $q(t) = 0$  coincides with the probability that the length of the interval  $[0, \tau_1)$  is greater than  $t$ . Therefore,

$$(4.3) \quad P(q(t) = 0) = [1 - G(t)]^2.$$

Next,

$$(4.4) \quad P(q(t) \leq \gamma < 1) = [1 - G(t)][1 - G(t - t_\gamma)],$$

where  $t_\gamma$  is such the value of  $t$  under which

$$(4.5) \quad (\lambda - \mu)t - \lambda \int_0^t r(s) ds = \gamma.$$

Equations (4.3) and (4.4) are easily obtained by standard arguments of probability theory.

Then the probability that the limiting normalized cumulated queue will reach the value  $\gamma$  before absorbing at 1 is

$$\frac{\int_0^\infty [1 - G(t)][1 - G(t - t_\gamma)] dt}{\int_0^\infty [1 - G(t - t_\gamma)]^2 dt}.$$

The problem is to find the value  $\gamma \leq \alpha$  such that



$$(4.6) \quad \frac{\int_0^{\infty} [1 - G(t)][1 - G(t - t_\gamma)] dt}{\int_0^{\infty} [1 - G(t - t_\gamma)]^2 dt} \geq P.$$

It is written the inequality rather than equality because the exact equality can be reached for  $\gamma > \alpha$ , while for all  $\gamma \leq \alpha$  there must be inequality (4.6).

## 5. Numerical example

Consider the following example. Let  $\lambda = 4$ ,  $\mu = 3$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $P = 0.95$ ,  $G(x) = 1 - e^{-2x}$ .

From (4.6) we have:

$$\frac{\int_0^{\infty} e^{-2(t-t_\gamma)} e^{-2t} dt}{\int_0^{\infty} e^{-4(t-t_\gamma)} dt} = e^{-2t_\gamma}.$$

Solution of the equation  $e^{-2t_\gamma} = 0.95$  yields  $t_\gamma = 0.025647$ . From (4.5) we obtain:

$$\gamma = \int_0^{t_\gamma} e^{-4t} dt = \int_0^{0.025647} e^{-4t} dt = 0.25 - 0.25e^{-0.102588} = 0.024375.$$

This value of  $\gamma$  is less than  $\alpha = 0.2$ , and therefore this value  $\gamma = 0.024375$  is the required value for a confidence interval.

## 6. Concluding remarks

We found confidence intervals associated with increasing a given high level. The confidence intervals that established in the present paper are random. They are obtained in terms of the parameter  $\gamma$ , which is the value of limiting cumulative normalized queue-length under which the probability that the system will be active is not smaller than a given value  $P$ . Thus, the strategy is to observe the cumulative queue-length process until the total number of units in client stations reaches the value  $\gamma N$ . As soon as the total number of units exceeds this value there is not enough confidence that the system and/or information will be available.

## Acknowledgement

The research was supported by Australian Research Council, grant # DP0771338.

## References

- [1] **V. M. Abramov**, 2000. A large closed queueing network with autonomous service and bottleneck. *Queueing Systems*, 35, 23-54.
- [2] **V. M. Abramov**, 2001. Some results for large closed queueing networks with and without bottleneck: Up- and down-crossings approach. *Queueing Systems*, 38, 149-184.
- [3] **V. M. Abramov**, 2004. A large closed queueing network containing two types of node and multiple customers classes: One bottleneck station. *Queueing Systems*, 48, 45-73.
- [4] **V. M. Abramov**, 2006. The effective bandwidth problem revisited. arXiv: math. 0604182.
- [5] **V. M. Abramov**, 2007. Large closed queueing networks in semi-Markov environment and their application. arXiv: math. 0612224.
- [6] **A. A. Borovkov**, 1976. *Stochastic Processes in Queueing Theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- [7] **A. A. Borovkov**, 1984. *Asymptotic Methods in Queueing Theory*. John Wiley, New York.
- [8] **C. Fricker**, 1986. Etude d'une file GI/G/1 á service autonome (avec vacances du serveur). *Advances in Applied Probability*, 18, 283-286.
- [9] **C. Fricker**, 1987. Note sur un modele de file GI/G/1 á service autonome (avec vacances du serveur). *Advances in Applied Probability*, 19, 289-291.
- [10] **E. Gelenbe and R. Iasnogorodski**, 1980. A queue with server of walking type (autonomous service). *Ann. Inst. H. Poincare*, 16, 63-73.
- [11] **Ya. Kogan and R. Sh. Liptser**, 1993. Limit non-stationary behaviour of large closed queueing networks with bottlenecks. *Queueing Systems*, 14, 33-55.
- [12] **M. Xie, Y. S. Dai and K. L. Poh**, 2004. *Computer Systems Reliability: Models and Analysis*. Kluwer, Dordrecht.

## NARROW PLACES IN LOGICAL SYSTEMS WITH ANRELIABLE ELEMENTS

**Gurami Tsitsiashvili**

e-mail: [guram@iam.dvo.ru](mailto:guram@iam.dvo.ru)

640041, Vladivostok, Radio str. 7, IAM, FEB RAS

In this paper models of logical systems with anreliable elements are considered [1], [2]. Definitions of narrow places in these systems are made, algorithms of narrow places constructions are built. An asymptotic analysis of work probability (or failure probability) of logical systems in appropriate asymptotic conditions for a work probability (or a failure probability) of their elements is made. All main definitions and algorithms are based on an idea of a recursive construction of logical models with anreliable elements.

### Preliminaries

Suppose that  $Z$  is a set which consists of  $|Z|$  logical variables  $z$ . Define the recursive class  $\mathcal{G}$  of logical expressions of variables  $z \in Z$ :

$$z \in Z \Rightarrow z \in \mathcal{G}, A_1 \in \mathcal{G}, A_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow (A_1 \wedge A_2) \in \mathcal{G}, (A_1 \vee A_2) \in \mathcal{G}. \quad (1)$$

Denote  $2^Z = \{Z_i, i \in I = \{1, \dots, 2^Z\}\}$  the family of all subsets of the set  $Z$ . Define the disjunctive normal form of the logical expression  $A \in \mathcal{G}$ : for  $z \in Z, A_1 \in \mathcal{G}, A_2 \in \mathcal{G}, I_1, I_2 \subseteq I$

$$\begin{aligned} D(z) = z, D(A_1) = \bigvee_{i \in I_1} \left( \bigwedge_{z \in Z_i} z \right), D(A_2) = \bigvee_{i \in I_2} \left( \bigwedge_{z \in Z_i} z \right) \Rightarrow \\ D(A_1 \vee A_2) = \bigvee_{i \in I_1 \cup I_2} \left( \bigwedge_{z \in Z_i} z \right), D(A_1 \wedge A_2) = \bigvee_{i \in I_1, j \in I_2} \left( \bigwedge_{z \in Z_i \cup Z_j} z \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Analogously define the conjunctive normal form  $K(A)$ ,  $A \in \mathcal{G}$ : for  $z \in Z, A_1 \in \mathcal{G}, A_2 \in \mathcal{G}, I_1, I_2 \subseteq I$

$$\begin{aligned} K(z) = z, K(A_1) = \bigwedge_{i \in I_1} \left( \bigvee_{z \in Z_i} z \right), K(A_2) = \bigwedge_{i \in I_2} \left( \bigvee_{z \in Z_i} z \right) \Rightarrow \\ K(A_1 \vee A_2) = \bigwedge_{i \in I_1, j \in I_2} \left( \bigvee_{z \in Z_i \cup Z_j} z \right), K(A_1 \wedge A_2) = \bigwedge_{i \in I_1 \cup I_2} \left( \bigvee_{z \in Z_i} z \right) \end{aligned} \quad (3)$$

For the families of sets  $\mathcal{X} = \{X\} \subseteq 2^Z, \mathcal{Y} = \{Y\} \subseteq 2^Z$  put

$$X \otimes Y = \{X \cup Y : X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}, Z(X) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X, N(X) = \min(|X| : X \in \mathcal{X}).$$

If  $Z(X) \cap Z(Y) = \emptyset$ , then

$$N(X \otimes Y) = N(X) + N(Y), N(X \cup Y) = \min(N(X), N(Y)). \tag{4}$$

Suppose that  $p_z = P(z=1), q_z = P(z=0), p_z + q_z = 1$ , and the random variables  $z \in Z$  are independent. The logical function  $A$  with random  $z \in Z$  call the logical system  $\mathcal{A}$ .

**Lowreliable elements**

Suppose that  $\exists d > 0$  so that for  $\forall z \in Z \exists$  the natural number  $c(z)$ :

$$p_z = p_z(h) \sim \exp(-h^{-dc(z)}), h \rightarrow 0. \tag{5}$$

Denote by  $\tau(z)$  variables which equal to lifetimes of logical elements  $z \in Z$ , and  $P(\tau(z) > t) = p_z(h)$ . If  $h = h(t)$  is monotonically decreasing and continuous function and  $h \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ , then the formula (5) may be transformed to the form

$$P(\tau(z) > t) \sim \exp(-h(t)^{-dc(z)}), t \rightarrow \infty,$$

characteristic of Weibull asymptotic used in lifetime models of systems which consist of lowreliable elements [3], [4].

Define  $C(A) = \min_{i \in I} \max_{z \in Z_i} c(z)$  by known  $D(A) = \bigvee_{i \in I_1} \left( \bigwedge_{z \in Z_i} z \right)$ . Then from (2) obtain

$$C(A_1 \wedge A_2) = \max(C(A_1), C(A_2)), C(A_1 \vee A_2) = \min(C(A_1), C(A_2)). \tag{6}$$

Correspond to the logical function  $A$  the families of sets  $S(A) \subseteq 2^Z, T(A) \subseteq 2^Z$  by recursive formulas:  $S(z) = \{z\}, T(z) = \{z\}$ ,

$$S(A_1 \wedge A_2) = \begin{cases} S(A_1), C(A_1) > C(A_2), \\ S(A_2), C(A_1) < C(A_2), \\ S(A_1) \otimes S(A_2), C(A_1) = C(A_2), \end{cases} \quad T(A_1 \wedge A_2) = \begin{cases} T(A_1), C(A_1) > C(A_2), \\ T(A_2), C(A_1) < C(A_2), \\ T(A_1) \cup T(A_2), C(A_1) = C(A_2), \end{cases}$$

$$S(A_1 \vee A_2) = \begin{cases} S(A_1), C(A_1) < C(A_2), \\ S(A_2), C(A_1) > C(A_2), \\ S(A_1) \cup S(A_2), C(A_1) = C(A_2), \end{cases} \quad T(A_1 \vee A_2) = \begin{cases} T(A_1), C(A_1) < C(A_2), \\ T(A_2), C(A_1) > C(A_2), \\ T(A_1) \otimes T(A_2), C(A_1) = C(A_2). \end{cases}$$

Put  $I' = \left\{ i \in I : \max_{z \in Z_i} c(z) = C(A) \right\}$ , then from the formulas (2), (6) obtain

$$S(A) = \left\{ \{z \in Z_i : c(z) = C(A)\} : i \in I' \right\}. \quad (7)$$

The formulas (1), (2), (6), (7) lead to the statements.

**Theorem 1.** In conditions (5) the formula  $-\ln P(A=1) \sim N(S(A))h^{-C(A)}$ ,  $h \rightarrow 0$ , is true.

**Theorem 2.** In conditions (5) the following statements take place:

1. for each  $S \in \mathcal{S}(A)$  the following formula is true

$$(c(z) \rightarrow c(z) - \varepsilon, z \in S) \Rightarrow (C(A) \rightarrow C(A) - \varepsilon), 0 < \varepsilon < 1; \quad (8)$$

2. if a set  $S \subseteq Z$  and satisfies (8), then  $\exists S_* \in \mathcal{S}(A) : S_* \subseteq S$ ;

3. for each  $T \in \mathcal{T}(A)$  the following formula is true

$$(c(z) \rightarrow c(z) + \varepsilon, z \in T) \Rightarrow (C(A) \rightarrow C(A) + \varepsilon), 0 < \varepsilon < 1; \quad (9)$$

4. if  $T \subseteq Z$   $S \subseteq Z$  and satisfies the formula (9), then  $\exists T_* \in \mathcal{T}(A) : T_* \subseteq T$ .

The theorem 2 allows to call sets from the families  $\mathcal{S}(A), \mathcal{T}(A)$  by narrow places in the logical system  $\mathcal{A}$  with lowreliable elements. For any  $S \in \mathcal{S}(A)$  (for any  $T \in \mathcal{T}(A)$ ) an increase of elements  $z \in S$  (a decrease of elements  $z \in T$ ) reliabilities leads to an increase (to a decrease) of the logical system  $\mathcal{A}$  reliability. The formulas (6) and the theorem 2 allow to calculate recursively the numbers  $C(A)$ ,  $N(S(A))$  and to define the families  $\mathcal{S}(A), \mathcal{T}(A)$  and their subfamilies

$$S'(A) = \{S \in \mathcal{S}(A) : |S| = N(S(A))\}, \quad \mathcal{T}'(A) = \{T \in \mathcal{T}(A) : |T| = N(\mathcal{T}(A))\}.$$

### Highreliable elements

Suppose that  $\exists d > 0$  so that for  $\forall z \in Z \exists$  the natural number  $c(z)$ :

$$q_z = q_z(h) \sim \exp\left(-h^{-dc(z)}\right), \quad h \rightarrow 0. \quad (10)$$

Denote  $P(\tau(z) \leq t) = q_z(h)$ . If  $h$  is monotonically increasing and continuous function and  $h \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ , then the formula (10) may be transformed to the form

$$P(\tau(z) \leq t) \sim \exp\left(-h(t)^{-dc(z)}\right), \quad t \rightarrow 0,$$

characteristic of Weibull asymptotic used in lifetime models of systems which consist of highreliable elements.

Redefine  $C(A) = \min_{i \in I} \max_{z \in Z_i} c(z)$  by known  $K(A) = \bigwedge_{i \in I_1} \left( \bigvee_{z \in Z_i} z \right)$ . From the formula (3) obtain

$$C(A_1 \wedge A_2) = \min(C(A_1), C(A_2)), \quad C(A_1 \vee A_2) = \max(C(A_1), C(A_2)). \quad (11)$$

Redefine  $I' = \left\{ i \in I : \min_{z \in Z_i} c(z) = C(A) \right\}$ , then the formulas (3), (11) lead to the formula (7) for highreliable elements also. The formulas (3), (7), (11) lead to the statements.

**Theorem 3.** *In conditions (10) the formula  $-\ln P(A=0) \sim N(S(A))h^{-C(A)}$ ,  $h \rightarrow 0$ , is true.*

**Theorem 4.** *In conditions (10) the following statements take place:*

1. *for any  $S \in \mathcal{S}(A)$  the following formula is true*

$$(c(z) \rightarrow c(z) + \varepsilon, z \in S) \Rightarrow (C(A) \rightarrow C(A) + \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1; \quad (12)$$

2. *if a set  $S \subseteq Z$  and satisfies (12), then  $\exists S_* \in \mathcal{S}(A) : S_* \subseteq S$ ;*

3. *for any  $T \in \mathcal{T}(A)$  the following formula is true*

$$(c(z) \rightarrow c(z) - \varepsilon, z \in T) \Rightarrow (C(A) \rightarrow C(A) - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1; \quad (13)$$

4. *if a set  $T \subseteq Z$  and satisfies (13), then  $\exists T_* \in \mathcal{T}(A) : T_* \subseteq T$ .*

The theorem 4 allows to call sets from the families  $\mathcal{S}(A), \mathcal{T}(A)$  by narrow places in the logical system  $\mathcal{A}$  with highreliable elements. For any  $S \in \mathcal{S}(A)$  ( $T \in \mathcal{T}(A)$ ) an increase of elements  $z \in S$  (a decrease of elements  $z \in T$ ) reliabilities leads to an increase (to a decrease) of the logical system  $\mathcal{A}$  reliability. The formulas (12) and the theorem 4 allow to calculate recursively the numbers  $C(A), N(S(A))$  and to define the families  $\mathcal{S}(A), \mathcal{T}(A)$  and their subfamilies  $\mathcal{S}'(A), \mathcal{T}'(A)$ .

**Remark 1.** *Denote  $X_1 = \{Z_i, i \in I_1\}$ ,  $X_2 = \{Z_i, i \in I_2\}$ , suppose that  $Z(X_1) \cap Z(X_2) = \emptyset$ . Then the formula (4) allow to simplify significantly calculations of  $N(S(A_1) \otimes S(A_2))$ ,  $N(S(A_1) \cup S(A_2))$ , which are necessary to find recursively  $N(S(A))$  for the asymptotic formulas of the theorems 1, 3.*

## References

- [1] Riabinin I.A. Logic-probability calculus as method of reliability and safety investigation in complex systems with complicated structure// Automatics and remote control, 2003, № 7, p. 178-186 (in Russian).
- [2] Solojentsev E.D. Specifics of logical-probability risk theory with groups of antithetical events// Automatics and remote control, 2003, № 7, p. 187-203 (in Russian).
- [3] Rocchi P. Boltzmann-like Entropy in Reliability Theory// Entropy, 2002, vol. 4, p. 142-150.
- [4] Rocchi P. The Notion of Reversibility and Irreversibility at the Base of the Reliability Theory// Proceedings of the International Symposium on Stochastic Models in Reliability, Safety, Security and Logistics. Sami Shamoon College of Engineering. Beer Sheva, February 15-17, 2005, p. 287-291.

# A NEW GENERALIZATION OF RAYLEIGH DISTRIBUTION

Viorel Gh. VODĂ

Institute of Mathematical Statistics and Applied Mathematics  
"Gh. Mihoc - C. Iacob" of the Romanian Academy, Bucharest

e-mail: [yon\\_voda@yahoo.com](mailto:yon_voda@yahoo.com)

**Abstract.** In this paper we propose a new generalized Rayleigh distribution different from that introduced in "Aplikace Matematiky" (1976) [23]: the construction makes use of the so-called "conservability approach" (see "Kybernetika", 1989 [26]), namely if  $X$  is a positive continuous random variable with a finite mean-value  $E(X)$ , then a new density is set  $-f_1(x) = x \cdot f(x) / E(x)$  where  $f(x)$  is the p.d.f. of  $X$ . The new generalized Rayleigh variate is obtained using as  $f(x)$  a generalized form of the exponential distribution introduced by Isaic-Maniu and the present author in 1996 (see [12]).

**Key words:** GRV-generalized Rayleigh variate, GE-generalized exponential, GDE-generating differential equation, conservability, p.d.f.-probability density function, pseudo-Weibull variable.

## 1. A little bit of statistical history

Some decades ago, I did publish in the Prague journal "Aplikace Matematiky" (see Vodă, 1976 [23, 24]) two papers regarding a generalized variant of the Rayleigh density function:

$$(1) \quad X : f(x; \theta, k) = \frac{2\theta^{k+1}}{\Gamma(k+1)} x^{2k+1} \exp(-\theta x^2), \quad x \geq 0, \quad \theta > 0, \quad k \geq 0,$$

where  $\Gamma(u)$  is the well-known Gamma function:

$$(2) \quad \Gamma(u) = \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt.$$

The form (1) includes – apart from the classical Rayleigh density (for  $k = 0$ ) some others, such as Maxwell (for  $k = 1/2$ ) and Chi ( $\chi$ ) one (for  $k = \frac{1}{2}a - 1$ ,  $a \in \mathbf{N}$ ,  $a > 2$  and  $\theta = 1/2b^2$ ,  $b > 0$ ).

Also, if we quit the positivity request for  $k$  and take  $k = -1/2$  and  $\theta = 1/2\sigma^2$ ,  $\sigma > 0$  we shall obtain the "half-normal" density.

This form (1) has found its place in the well-known book of Johnson-Kotz-Balakrishnan (vol. 1, 1994, page 479 [14]).

There exist a lot of density functions which may be considered as generalizations for the Rayleigh one. For instance, in a monograph published in Kiev in 1987 by E. S. Pereverzev (see [17]) I detected two forms, namely:

$$(3) \quad F(x; k, a) = 1 - \exp(-x^{2k} / 2a^2) \quad x \geq 0, \quad k, a > 0,$$

this distribution becoming for  $k = 1/2$  the exponential one and for  $k = 1$ , the Rayleigh one:

$$(4) \quad F(x) = 1 - \exp\left[-\frac{a(x-x_1)^n}{(x_2-x_1)^m}\right], \quad x \in [x_1, x_2] \subset \mathbf{R}$$

with  $a > 0$  and  $n, m \in \mathbf{N}$ , which generalizes Rayleigh ( $m = 0, x_1 = 0, n = 2$  and  $x \in [0, \infty)$ ).

The best known generalization is probably that of Walloddi Weibull (1887-1979):

$$(5) \quad X : f(x; \theta, k) = \theta k x^{k-1} \exp(-\theta x^k), \quad x \geq 0, \quad k, \theta > 0$$

which gives Rayleigh for  $k = 2$ .

Blischke and Murthy (2000, [5]) consider that this distribution was a response to the overused exponential model – which has a constant hazard rate  $h(x) = \theta$  for  $k = 1$  – inapplicable to strength of materials or cutting-tool durability studies, for instance.

Weibull distribution had a tremendous career amongst the practitioners. Weibull himself collected in 1977 in a technical report of Förvarets Teletekniska Laboratorium (in Stockholm, Sweden) a number of 1019 references (articles) and 36 titles of books in which his model is mentioned (all these titles are only in English). Facing the enthusiasm related to this distribution, A. C. Giorski (1968 [9]) draws the attention of what he calls “Weibull euphoria” arguing that the model is very useful but it is not “universal” (one year later, Ravenis (see [18]) just proclaimed Weibull’s model as a “*potentially universal p.d.f. for scientists and engineers*”...

A more general model (which includes the Weibull one) is that called generalized Gamma:

$$(6) \quad X : f(x; b, k, p) = \frac{k}{b\Gamma(p)} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^{pk-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^k\right\},$$

where  $x \geq 0$ ,  $b, p, k > 0$ , proposed by Stacy in 1962 [21] which for  $p = 1$  becomes Weibull one, with  $(b^k)$  as a scale parameter and  $(k)$  as shape parameter. It is interesting to notice that a similar form of (6) has been used in 1925 by an Italian economist, Luigi Amoroso in “Annali di Matematica Pura ed Applicata” in a long paper (nr. 421, pp. 123-159) entitled “Ricerche intorno alla curva dei redditi” (Researches on the curve of incomes). Since it was published in a journal not very widespread, Amoroso’s work remained unknown for a long time (until late sixties) when Henrick J. Malik discovered it and seized the priority regarding this generalized Gamma (see Bârsan-Pipu et al. 1999, [4]). Amoroso-Stacy’s distribution has been intensively studied by two Polish engineers: K. Ciechanowicz (1972, [6]) and Szymon Firkowicz (1969, [8]). Urban Hjorth (1980, [15]) proposed another generalization of Rayleigh distribution as follows:

$$(7) \quad X : F(x; \theta; \beta, \delta) = 1 - (1 + \beta x)^{-\theta/\beta} \cdot \exp\{-\delta x^2 / 2\}$$



where  $x \geq 0$ ,  $\theta \geq 0$ ,  $\beta, \delta > 0$ . If we take  $\theta = 0$ , one obtains classical Rayleigh form. It is interesting to notice that exponential distribution is obtained if  $\delta = 0$  and  $\beta \rightarrow 0$ . In the next paragraph we shall examine some generalized forms of the exponential p.d.f., choosing one of them as working material.

## 2. Generalized exponentials

Various forms to generalize exponential distribution have been proposed. We shall mention two of them:

Dobó's form (1976, [7]):

$$(8) \quad F(x; \lambda, a, \theta) = 1 - \left[ \frac{\lambda + \theta}{\lambda + \theta e^{ax}} \right]^{1/a\theta}$$

where  $x \geq 0$ ,  $a > 0$ ,  $\lambda, \theta \geq 0$ , which for  $\lambda = 0$  gives the classical  $F(x; \theta) = 1 - \exp(-x/\theta)$ .

Khan's form (1987, [16] or [4, pp. 44-46])

$$(9) \quad f(x; r, \theta) = \frac{e^{-x/\theta} \cdot x^{rx}}{\theta^{1+rx} \cdot \Gamma(2+rx)}$$

with  $x \geq 0$ ,  $r \geq 0$  but  $r\theta < 1$ , which for  $r = 0$  gives  $f(x; \theta) = \theta^{-1} \exp(-x/\theta)$ .

Consider now the following differential equation:

$$(10) \quad \frac{d\varphi}{dx} = a(x) \cdot \varphi^\alpha + b(x) \cdot \varphi^\beta$$

where  $\varphi$  is a positive real function,  $x \in [a, b] \subseteq \mathbf{R}$  where for a reliability context one may choose  $[a, b] \equiv [0, +\infty)$ .

We shall call (10) as a generating differential equation (GDE) since for various choices of  $a(x)$ ,  $b(x)$  – real continuous functions on  $\mathbf{R}$  and  $\alpha, \beta$  two real numbers one could obtain a wide range of densities ( $\varphi$ ).

Now, in (10) let us take  $\alpha = -1$ ,  $b(x) = 0$  and  $\beta$  - an arbitrary real number. We have:

$$(11) \quad \frac{d\varphi}{dx} = a(x) \cdot \frac{1}{\varphi} \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} \varphi^2 = \int a(x) dx.$$

If  $x \geq 0$ , and  $a(x) = -A \cdot \frac{k}{\lambda} x^{k-1} \exp\left(-\frac{x^k}{\lambda}\right)$  where  $A$  is a norming factor, we obtain:

$$(12) \quad \frac{1}{2}\varphi^2 = A \cdot \exp\left(-\frac{x^k}{\lambda}\right) \text{ or } \varphi = \sqrt{2A} \exp\left(-\frac{x^k}{2\lambda}\right).$$

If we denote  $2\lambda = \theta > 0$  and take  $A$  as  $k^2 / 2\theta^{2/k} \cdot \Gamma^2(1/k)$  where  $k > 0$ . We get  $\varphi(x)$  as a density function, namely:

$$(13) \quad \varphi(x; \theta, k) = \frac{k}{\theta^{1/k} \Gamma(1/k)} \cdot \left(-\frac{x^k}{\theta}\right)$$

which for  $k=1$  gives the classical exponential p.d.f.

It is interesting to draw the attention on the so-called "generalized error distribution" studied by T. Taguchi (1978, [22]) who states that it was introduced by a Russian mathematician M. T. Subbotin in 1923 ("Matematicheskyy Sbornik", vol.31, pp. 296-301). Its density is:

$$(14) \quad f(x; p) = \frac{1}{2p^{\frac{1}{p}-1} \Gamma(1/p)} \cdot \exp\left\{-\frac{|x|^p}{p}\right\}$$

where  $x \in \mathbf{R}$  and  $p > 0$ . This form resembles to (13) but it does not include the exponential, since for  $p=1$  one obtains Laplace density function. Our form (13) has two parameters (scale and shape ones) and  $x$  is restricted to  $[0, +\infty)$ .

Now, if we compute the theoretical mean-value for (13) we shall obtain easily:

$$(15) \quad E(X) = \theta^{1/k} \cdot \frac{\Gamma(2/k)}{\Gamma(1/k)}$$

(see for other details [12]).

### 3. The new GRV (Generalized Rayleigh Variate)

Our variable will be obtained in a more general framework which was presented in [26]. It is known that in the reliability theory some classes of time-to-failure distributions are obtained using a so-called "generator" – which is also a p.d.f. One of the problem of interest is for instance the following: if we have an IFR (increasing failure rate) distribution function (d.f.)  $F(x)$ , and if we construct a new d.f. such as

$$(16) \quad F_1(x) = \mu \cdot \int_0^{\infty} R(u) du, \text{ where } R(x) = 1 - F(x), \quad \mu = \int_0^{\infty} x \cdot dF(x)$$

does this  $F_1(x)$  preserve the IFR property? In accordance with Barlow and Proschan (1975, [3]), the answer is yes.

Now, if we define a p.d.f. as below:

$$(17) \quad f_1(x) = \frac{x}{E(x)} \cdot f(x) \quad \text{and} \quad E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx < +\infty$$

where  $f(x)$  is known- that is it has a well - defined form and specified parameters- which means it belongs to a certain class – say Weibull – then, the new  $f_1(x)$  it is also a Weibull type density? In this example, the answer is no (see [26], page 211). The new p.d.f. was nicknamed as a “pseudo-Weibull distribution”.

The property to preserve the initial class of belongness has been called conservativeness. Therefore, in this approach, Weibull (and also the classical exponential) are not conservative.

Now, if we take as  $f(x)$  the form (13) – that is our generalized exponential, we obtain:

$$(18) \quad f_1(x) = \frac{x}{E(x)} \cdot f(x) = \frac{kx}{\theta^{2/k} \Gamma(2/k)} \cdot \exp\left(-\frac{x^k}{\theta}\right)$$

with  $x \geq 0$ ,  $k, \theta > 0$ , which for  $k=2$  provides the usual Rayleigh p.d.f.:  
 $f_1(x) = (2/\theta) \cdot x \cdot \exp(-x^2/\theta)$ .

Hence, this new generalization of Rayleigh p.d.f. is not conservative as regards the transformation given by (17).

One interesting thing is the following: if  $k=1$ , then we obtain – curiously – the pseudo-Weibull p.d.f.,  $PW(x; \theta, 1)$ , that is  $f_1(x) = \theta^{-2} \cdot x \cdot \exp(-x/\theta)$ , since general  $PW(x; \theta, k)$  is :

$$(19) \quad f_1(x; \theta, k) = kx^k \left[ \theta^{1+1/k} \cdot \Gamma(1+1/k) \right]^{-1} \cdot \exp(-x^k/\theta).$$

The p.d.f.  $PW(x; \theta, 1)$  has been studied in [26]. In our case (18) we have, for instance (for  $m \in \mathbf{N}$ ) :

$$(20) \quad E(X^m) = \frac{k}{\theta^{2/k} \Gamma(2/k)} \int_0^{\infty} x^{m+1} \cdot e^{-x^k/\theta} dx = \theta^{m/k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{k}\right)}{\Gamma(2/k)}.$$

If  $m=1$  and  $m=2$  we have the first two non-central moments:

$$(21) \quad E(x) = \theta^{1/k} \cdot \frac{\Gamma(3/k)}{\Gamma(2/k)} \quad \text{and} \quad E(x^2) = \theta^{2/k} \cdot \frac{\Gamma(4/k)}{\Gamma(2/k)}$$

which give the variance of the variable:

$$(22) \quad \text{Var}(x) = \theta^{2/k} \left[ \frac{\Gamma(4/k)}{\Gamma(2/k)} - \frac{\Gamma^2(3/k)}{\Gamma^2(2/k)} \right].$$

We shall prove now the following:

*Lemma.* If  $X$  is a GRV with  $k$ -known, then the variable  $Y = X^k$  is a Gamma type random variate with parameters  $\theta$  and  $2/k$ .

*Proof.* We write the distribution function of  $Y$ , namely:

$$(23) \quad F(y) = \text{Pr ob} \{ X^k < y \} = \text{Pr ob} \{ X < y^{1/k} \} = \int_0^{y^{1/k}} f(x; \theta, k) dx$$

where  $f(x; \theta, k)$  is the p.d.f. of  $X$ . We have hence:

$$(24) \quad F(y) = \frac{k}{\theta^{2/k} \Gamma(2/k)} \int_0^{y^{1/k}} x \cdot \exp(-x^k / \theta) dx.$$

Taking into account of the general formula:

$$(25) \quad \frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(u) du \right) = b'(x) \cdot f[b(x)] - a'(x) f[a(x)]$$

from (24) we obtain:

$$(26) \quad F'(y) = f(y) = \frac{y^{\frac{2}{k}-1}}{\theta^{2/k} \cdot \Gamma(2/k)} \exp(-y/\theta), \quad y \geq 0, \theta, k > 0$$

which is just the p.d.f. of a Gamma random variable (one may denote  $(2/k=a)$ , to have the usual form).

If  $k$  is known, then the estimation of  $\theta$  is easily to find by maximum likelihood method. Indeed, if we have a sample  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  on  $X$ , the likelihood function is:

$$(27) \quad L = \frac{K^n \cdot \prod_1^n x_i}{\theta^{2n/k} \cdot \Gamma^n(2/k)} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{\theta} \sum_1^n x_i^k \right]$$

and taking the logarithms and the derivative with respect to  $\theta$ , we find:

$$(28) \quad \ln L = n \ln k + \sum_1^n \ln x_i - \frac{2n}{k} \cdot \ln \theta - n \ln \Gamma(2/k) - \frac{1}{\theta} \sum_1^n x_i^k$$

$$(29) \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\theta}} = -\frac{2n}{k} \cdot \frac{1}{\hat{\theta}} + \frac{1}{\hat{\theta}^2} \cdot \sum_1^n x_i^k = 0$$

which provides the solution;

$$(30) \quad \hat{\theta}_{ML} = \left( \frac{K}{2n} \right) \cdot \sum_1^n x_i^k.$$

The distribution of  $\hat{\theta}_{ML}$  is now almost obvious: since  $x_i^k$  has a Gamma distribution, the sum of i.i.d. (independent and identically distributed) Gamma variables is also Gamma (the stability property of Gamma distribution – see [3]).

If both parameters are unknown then we shall obtain the system:

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \hat{k}} = \frac{n}{\hat{k}} + 2n \cdot \frac{1}{\hat{k}^2} \cdot \ln \hat{\theta} - n \cdot \frac{\Gamma'(2/k)}{\Gamma(2/k)} - \frac{1}{\hat{\theta}} \sum_1^n x_i^{\hat{k}} \ln x_i = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\theta}} = -\frac{2n}{\hat{k}} + \frac{1}{\hat{\theta}^2} \cdot \sum_1^n x_i^{\hat{k}} = 0. \end{cases}$$

As one can see, the so-called DiGamma function is involved (that is, the derivative of Gamma function  $\Gamma(u)$ ), and consequently, some numerical methods are needed. Using some formulas from Ryzhyk-Gradsteyn tables (1965, [19]), namely

$$(32) \quad \frac{d \ln \Gamma(u)}{du} = \psi(u) = \ln + \int_0^\infty e^{-ut} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right) dt$$

one may approximate  $\psi(u+1)$  as:

$$(33) \quad \psi(u+1) \approx -0.577215664 + 1.644934067 \cdot k - 1.202056904 \cdot k^2.$$

As regards  $\ln \theta$ , if  $0 < \theta < 1$ , we could use the well-known Taylor series, and if  $\theta > 1$ , we may approximate  $\ln \theta$  with the upper bound  $(\theta-1)/\sqrt{\theta}$  since we have the elementary inequality:

$$(34) \quad \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{if } x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}.$$

Let us remark that in (33), the first constant is just Euler's

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n - \ln n) \approx 0.57721.$$

#### 4. Some comments

a). One can detect in the literature some more general p.d.f. (s) than the generalized Gamma – as for instance the so-called generalized Gompertz-Verhulst one (see Ajuha and Nash 1967 [1], Ajuha, 1969 [2] or Vodă, 1980 [25]. Such p.d.f. (s) contain two or more special functions, which are difficult to be analytically treated.

b). The generating differential equation (10) may provide not only p.d.f. (s) *but also distribution functions*. As, for instance, if we take  $a(x) = \theta$ ,  $b(x) = -\theta$ ,  $\theta > 0$ ,  $\alpha = 1$  and  $\beta = 2$ , we obtain:

$$(35) \quad \frac{d\varphi}{dx} = \theta \cdot \varphi(1-\varphi) \quad \text{or} \quad \frac{d\varphi}{\varphi(1-\varphi)} = \theta dx$$

where from by straightforward integration, one gets:

$$\varphi(x; \theta) = \frac{1}{1 + e^{-\theta x}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \theta > 0$$

which is just a reduced Verhulst distribution function, proposed by Pierre François

Verhulst (1804-1849) in 1846 (see Iosifescu et al., 1985 [10]).

c). An interesting form of a GRV can be obtained from the reliability function proposed

in 1998 by Silvia Spătaru and Angela Galupa (see [20]). Their construction was the following: let  $Y \geq 0$  be a random variable and let  $G(x) = \text{Prob}\{Y \leq x\}$ ,  $x \geq 0$  its distribution function. Starting from a generalized form of the power distribution (see [11]) the subsequent reliability function is advanced:

$$(36) \quad R(x) = [1 - G(x)]^{\lambda} \cdot e^{-\theta x}, \quad x \geq 0, \quad \theta \geq 0$$

which provides a hazard rate as :

$$(37) \quad h(x) = \lambda \cdot \frac{g(x)}{1 - G(x)} + \theta, \quad g(x) = G'(x)$$

having the following interpretation : if  $\lambda = 1$ , the first element in the right-hand-side of  $h(x)$  represents the hazard rate of  $Y$  component, and  $\theta$  is the failure rate of a second element having an exponential distribution. If we take now  $G(x)$  as a classical Rayleigh namely  $G(x) = 1 - \exp(-ax^2)$ , then the below distribution is obtained:

$$(38) \quad F(x) = 1 - R(x) = 1 - \exp(-\lambda ax^2 + \theta x)$$

with  $x \geq 0$ ,  $a > 0$ ,  $\lambda, \theta \geq 0$ , (if  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 0$ , we have  $F(x) = 1 - \exp[-ax^2]$ ).

d) Professor I. C. Bacivarof (Bucharest) has drawn my attention on a paper of D. Kundu and M. Z. Raqab (2004, "Generalized Rayleigh distribution: different methods of estimation", posted on

Internet) in which these authors study the distribution  $F(x; \alpha, \lambda) = [1 - e^{-(\lambda x)^2}]^\alpha$   $x \geq 0$ ,  $\alpha, \lambda > 0$  which for  $\alpha = 1$  becomes the classical Rayleigh.

## References

1. J. C. Ahuja and S. W. Nash, *The generalized Gompertz-Verhulst family of distribution* Sankhya, Ser.A , vol. 39 nr. 2. (1967) pp.141-156.
2. J. C. Ahuja, *On certain properties of the generalized Gompertz distribution.* Sankhya, Ser.B , vol. 31 nr. 3-4 (1969) pp.541-544.
3. R. E. Barlow and F. Proschan, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing (1975)*. Holt, Rinehart and Wiston, New York.
4. N. Bârsan-Pipu, Al.Isaic-Maniu and V. Gh. Vodă, *Defectarea. Modele statistice cu aplicații (The Failure. Statistical Models with Applications)* – In Romanian with the content and an abstract in English (1999). Editura Economică, București.
5. W. R. Blischke and D. N. P Murthy, *Reliability. Modeling, Prediction and Optimization (2000)* John Willy and Sons, Inc. New York.
6. K. Ciechanowicz, *Uogólniony rozkład Gamma i rozkład potęgowy jako rozkłady trwałości elementów (Generalized Gamma distribution and power distribution as models for component durability.* In Polish). Archiwum Electrotechniki (1972), vol. XXI, nr.3. pp. 489-512.
7. A. Dobó, *Reliability of ageing components "Quality and Reliability"* (Budapest) (1976), Special Edition pp. 53-56.
8. Sz. Firkowicz, *O potęgowym rozkładzie trwałości* (On the power distribution – in Polish). Archiwum Electrotechniki, (1969) vol. XVIII, nr, 1, pp. 29-40.
9. A. C. Giorski, *Beware of the Weibull euphoria* (1968) IEEE Transactions on Reliability, vol. R-17, pp. 202-203.
10. M. Iosifescu, C. Moineagu, Vl. Trebici and E. Ursianu, *Mică Enciclopedie de Statistică (1985) (A Little Statistical Encyclopedia – in Romanian)*. Editura Științifică și Enciclopedică, București.
11. Al. Isaic-Maniu and V. Gh. Vodă, *O nouă generalizare a repartiției putere* (A new generalization of power distribution - in Romanian) Stud. Cerc. Calc. Econ. Cib. Econ., (1995) vol. XXIX, nr. 1, pp. 19-26.
12. Al. Isaic-Maniu and V. Gh. Vodă, *O nouă generalizare a repartiției exponențiale* (A new generalization of exponential distribution - in Romanian) Stud. Cerc. Calc. Econ. Cib. Econ., (1996) vol. XXX, nr. 4, pp. 9-2.
13. Al. Isaic-Maniu and V. Gh. Vodă, *Aspecte privind repartiția Rayleigh* (Some aspects regarding Rayleigh distribution-in Romanian) Stud. Cerc. Calc. Econ. Cib. Econ., (1998) vol. XXXII, nr. 1, pp. 5-13.
14. N. L. Johnson, S. Kotz and N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions* (1994) Vol.1, Second Edition, John Wiley and Sons Inc. New York.
15. U. Hjorth, *A reliability distribution with increasing, decreasing and bath-tub shaped failure rates* (1980), Technometrics, vol. 22, nr.1, pp. 99-112.
16. M. S. H. Khan, *A generalized exponential distribution.*(1987) Biometrical Journal, vol. 29, nr.1, pp. 121-127.
17. E. S. Pereverzev, *Random Processes in Parametric Models of Reliability* (in Russian), (1987), Academy of Ukraine, Institute of Technical Mechanics, Kiev, NAUKOVA DUMKA Publ. House.

18. J. V. Ravis, II, *A potentially universal probability density function for scientists and engineer* Proceedings of the International Conference on Quality Control, Tokyo, Sept. 1969, pp. 523-526.
19. I. M. Ryzhyk and I. S. Gradsteyn, *Tables of Integrals, Series and Products*, (1965), 4<sup>th</sup> Edition; Yu. V. Geronimus and M. Yu. Tseylin (Editors) (translation from Russian), edited by A. Jeffrey, Academic Press, New York
20. Silvia Spătaru and Angela Galupa, *Generalizarea unei repartiții cu aplicații în teoria siguranței (Generalization of a distribution with applications in reliability theory - in Romanian)* (1998) Stud. Cerc. Econ. Cib. Econ., vol XXXII, nr. 1, pp. 77-82.
21. E. W. Stacy, *A generalization of the Gamma distribution* (1962), Annals of Mathematical Statistics, vol. 28, pp. 1187-1192.
22. T. Taguchi, *On a generalization of Gaussian distribution* (1978), Ann. Inst. Statist. Math. (Tokyo), vol. 30, part.A, pp. 221-242.
23. V. Gh. Vodă, *Inferential procedures on a generalized Rayleigh variate (I)* Aplikace Matematiky, Svazek, 21(1976), číslo 6, pp. 395-412.
24. V. Gh. Vodă, *Inferential procedures on a generalized Rayleigh variate (II)* Aplikace Matematiky, Svazek, 21(1976), číslo 6, pp. 413-419.
25. V. Gh. Vodă, *Some inferences on the generalized Gompertz distribution* (1980), Rev. Roum. Math. Pures. Et Appl., tome XXV, nr. 8, pp. 1267-1278.
26. V. Gh. Vodă, *New models in durability tool-testing: pseudo-Weibull distribution* Kybernetika (Praha), vol. 25 (1989) no. 3, pp. 209-215.



# OPTIMISATION OF RELIABILITY OF POWER SUPPLY TO CONSUMERS

---

*Galina Fedotova, Nikolai Voropai*

●  
*Melentiev Energy Systems Institute,  
SB RAS, Irkutsk, Russia*

e-mail: [fedotova@isem.sei.irk.ru](mailto:fedotova@isem.sei.irk.ru), [voropai@isem.sei.irk.ru](mailto:voropai@isem.sei.irk.ru)

## Abstract

An approach of solution of the problem of consumers' power supply reliability is presented. The electric power systems is assumed operating in a market environment.

## Introduction

Historically, the electric power industry of Russia was developed step-by-step interconnecting and parallel operating of regional electric power systems (EPS), creating interconnected power systems (IPSs) and forming the Unified power system (UPS). The UPS of the former Soviet Union guaranteed a high level of coordination of electric power production, transmission and consumption, an effective operation of the whole industry and a high reliability of consumer power supply. The efficiency of parallel operation of EPSs within the UPS prior to the electric power industry restructuring resulted in saving of 10-15 mln. kW of installed capacity. It was reached due to the coincidence of load curves and emergency assistance of EPSs and 12-14 mln. ton of standard fuel per year.

There existed a hierarchical system of reliability control which was typical for the so-called industrial model of the electric power industry structure. The relationships between electric power producers and consumers were based on the normative approach, i.e. on fulfillment of obligations, instructions and regulations regardless the expenses, since everything was paid the state. At the end of the last century the deficiency of such structure of electric power industry became obvious, especially due to transition to market environments.

Transition to the market economy changes dramatically relations between electric power producers and consumers. Electric power producers began to compete in electricity sale, contradictions arose between the market subjects that led to heavy operational regime of electric power systems and complicated their managing. The problems of mutual assistance of EPSs in critical situations has been arisen. Transition of the electric power industry to market relations in Russia led to the change of ownership relations with consumers and to restructuring the industry management system. Now relationship between producers and consumers of electric power is based on contractual obligations and mutual financial settlements.

In these conditions, the key objective is to eliminate decrease in reliability level that existed under the centralized management and adapt it to the requirements of each consumer. For this purpose, a new system of reliability control is to be implemented that combines normative approaches and economic mechanisms.

## Initial concepts

The proposed technique of power supply reliability optimization is based on the combination of normative and market approaches and the following initial concepts.

*Reliability* is an object ability to perform its functions under certain operation conditions [1]. Object in this case is a network of electric power systems, and its function is consumer power supply.

*System reliability* is a power system ability to successfully perform its functions keeping operating parameters in required limits the values of all parameters, characterizing the system ability to perform the set functions.

*Consumer power supply reliability* is an ability of a power system to deliver required electric power to consumers without limitations and in accordance to contractual obligations. Of course, all qualitative and quantitative requirements to EPS operation reliability and all requirements to power quality established by technical regulations have to be satisfied [2].

Consumer power supply reliability depends on the system reliability level and consists of reliability of power supply to feeding nodes that is maintained by the system means (system structure, capacity reserves, reserves of energy resources and transfer capability margins of tie lines, control devices, etc.) and reliability of power supply systems. In a market environment the power supply reliability is a commodity that has its price and is realized through the market services, is assured by all market subjects in the area of responsibility for reliability with their technological and economic interaction [3]. A system operator (SO) plays a leading role in management and coordination of reliability problems in a market environment. Its task is to assure system reliability, i.e. to create such conditions of EPS operation and control, in which electric power is produced, transmitted, distributed and consumed according to the contractual obligations between management subjects and market participants by means of technological interaction of generating units, electric networks and electric installations of consumers. The system operator is responsible for reliable power supply to nodes of the main grid, which supply feeding nodes with electric power. Power supply companies (PC), delivering electric power to consumers in the required volume in accordance with the consumption schedule foreseen in the project for a long-term operation, if consumers fulfil all technical and financial obligations, bear responsibility for reliability of power supply systems and power supply to consumers on the whole. Such sharing of responsibility makes it possible to solve the problem of power supply reliability stage-by-stage: at first at the system level for feeding nodes, then at the level of feeding nodes for individual consumers.

## Problem statement and its mathematical model

Solution of the problem of power supply reliability of interconnected power system (IPS) with weak ties is suggested. The annual planning of EPS operation under the industry restructuring and transition to the market is taken in consideration. Due to large dimension and high complexity of the problem, IPS is represented as a numerical model. Each node of the network includes points of connection to an electric systems of generation companies (GC) and each supply nodes connected to consumers. The electric power companies and consumers are supposed to have advance contracts. The applications for connection to the network are submitted to SO. The system operator jointly with the network companies approves the points of electric power supply from the generation companies to

feeding load nodes, which supply electric power to consumers. On the basis of known requests for the forthcoming year and the information from the electric generation companies about available capacities, knowledge of electric networks configuration and power transfer capabilities are laid in the basis of calculating scheme for solving the following problem.

*Let the interconnection be represented by the model where nodes contain generation companies and feeding nodes connected to the market network. A year is the calculated period that is divided into discrete time intervals of equal duration. At each node of the calculated scheme, one knows:*

- *generating unit commitment and its changes in time because of commissioning of new capacities and removal of operating facilities from operation for reconstruction (updating) or some other reasons;*
- *characteristics of equipment (unit capacity, emergency rate);*
- *total available generation capacity of the node and its generation companies at each time interval;*
- *total consumers load in the feeding nodes at each time interval;*
- *annual volume of scheduled maintenances of generating facilities.*

*Transfer capabilities are given for each tie line between the nodes of the calculated scheme.*

***Under these initial conditions, the maximum possible reliability level of power supply to consumers, connected to the network, for the whole interconnection should be ensured based on the normative requirements to the reliability level of power supply of the feeding nodes which supply electric power to consumers; power balance at the nodes of the calculated scheme and constraints on its components; transfer capabilities of tie lines between the scheme nodes.***

At the annual planning of EPS operation, when available capacities of power plants and consumer loads are known and hence, the value of the total reserve capacity is determined, the reliability is achieved primarily by its rational use. It is known that some part of the reserve is intended to compensate power losses due to failures of power plant equipment and to cover random unforeseen load growth, i.e. **operating reserve**. Another part of the reserve is used to compensate power decrease because of scheduled maintenance of equipment, i.e. **maintenance reserve**. The stated above problem can be solved on the base of the optimal (by the reliability criterion) division of the total reserve capacity between these parts. The reliability level may be estimated by the index of consumer provision with electric power that takes into account failure frequency, duration and severity in the system in an integral way. Application of this index is justified by the long advance time (a year) and the scales of the studied object (interconnection), where large load nodes are consumers, whose power supply reliability can be validly estimated by the integrated index. The chosen index has a simple physical sense and is rather sensitive to different disturbances, leading to reliability decrease (emergency power fall, random load growth, equipment repair, etc.) and to measures improving reliability (commissioning of new facilities, increasing transfer capabilities of tie lines, redundancy, etc.). It belongs to normalized integrated reliability indices.

The formulated problem is reduced to solution of an optimization problem.

### Determine the maximum of reliability function

$$\frac{1}{W} \sum_{\mu=1}^M \sum_{j=1}^G \pi_{\mu j} \cdot W_{\mu j} \rightarrow \max \quad (1)$$

#### subject to constraints on its parameters,

where:  $M$  – the number of nodes of the calculated scheme;

$G$  – the number of discrete time intervals;

$W_{\mu j}, W$  – the forecast power consumption volumes of the  $\mu$ -the node of the calculated scheme at the  $j$ -th time interval and the interconnection as a whole for a year;

$\pi_{\mu j}$  – the index of consumer provision with electric power of the  $\mu$ -the node at the  $j$ -th time

interval that is determined from the expression:  $\pi_{\mu j} = \frac{W_{\mu j} - \Delta W_{\mu j}}{W_{\mu j}}$ ;

$\Delta W_{\mu j}$  – the mathematical expectation of power undersupply for consumers of the  $\mu$ -the node at the  $j$ -th time interval.

The mathematical expectation of power undersupply is calculated based on the power shortage probabilities by the formula:

$$\Delta W = \sum_{\psi=r+1}^{\Psi} P_{(\psi-r)\varepsilon}^g (\psi-r)\varepsilon T, \quad (2)$$

where:  $T$  – the duration of the studied period;

$\varepsilon$  – the calculated power stage;

$r$  – the number of standby units of the capacity  $\varepsilon$ ;

$\psi$  – the number of units of the capacity  $\varepsilon$  that are needed to cover the maximum power shortage;

$P_{\psi\varepsilon}^g$  – the probability of power shortage  $\psi\varepsilon$ .

In the case of reserve unavailability, the power shortage is supposed to be the result of both emergency failure of power plant facilities and sudden load increase under the influence of random factors. All possible values of power shortage probabilities  $P_{(\psi-r)\varepsilon}^g$  are determined by multiplying the series of probability distribution of emergency power fall and load deviation from its predicted level. The value of predicted electric power in view of the error in load forecast is

$$W = \sum_{m=-v}^{\chi} P_{m\varepsilon}^h m\varepsilon T + N^0 \varepsilon T, \quad (3)$$

where:  $N^0$  – the number of units of the capacity  $\varepsilon$  that are needed to meet load without reserve;

$P_{m\varepsilon}^h$  – the probability of load deviation from its predicted value by  $m\varepsilon$ .

The reliability level depends on numerous parameters and factors, in particular on the unit commitment and its emergency rate, load and error of its forecast, operating reserve and mutual assistance of nodes. If the reliability index  $\pi_{\mu j}$  is represented as a function of load, operating reserve and power flows by tie lines that vary in time,

$$\pi_{\mu j} = F(N_{\mu j}, RO_{\mu j}, PL_{lj}), \quad (4)$$

where:  $N_{\mu j}$  – the load of the  $\mu$ -th node at the  $j$ -th time interval;

$RO_{\mu j}$  – the operating reserve of the  $\mu$ -th node at the  $j$ -th time interval;

$PL_{lj}$  – the power flow by tie line  $l$  at the  $j$ -th time interval,

then in the process of optimization because of laborious calculations for a large-dimensional problem the use can be made of the approximation of this function by the polynomial

$$\pi_{\mu j} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} A_{\mu\alpha\beta} \left( N_{\mu j} \pm \sum_l PL_{lj} \right)^{\alpha} RO_{\mu j}^{\beta}, \quad \alpha = \overline{0, s}; \beta = \overline{0, s}; \alpha + \beta \leq s; l \in L_{\mu}, \quad (5)$$

where:  $s$  – the polynomial power;

$A_{\mu\alpha\beta}$  – the polynomial coefficients;

$L_{\mu}$  – the set of tie lines in the calculated scheme that are adjacent to the  $\mu$ -th node.

The results of studies performed to estimate an error introduced with the approximation of function (4) by polynomial (5) of different powers have shown the admissibility to apply in this case a quadratic polynomial [4]. The polynomial coefficients  $A_{\mu\alpha\beta}$  are selected by the least-squares method based on the set of values for  $\pi$  at different loads of the nodes, considering their mutual assistance and operating capacity reserve.

Solution to the problem by criterion (1) assures the maximum reliability at the minimum annual losses caused by power shortage, if the losses are proportional to the volume of power undersupply. The normative requirements to reliability of power supply to the feeding nodes are taken into account by the constraint on the reliability index  $\pi$

$$\underline{\pi}_{\mu} \leq \pi_{\mu j} \leq \overline{\pi}_{\mu}, \quad (6)$$

где:  $\pi_{\mu j}$ ,  $\underline{\pi}_{\mu}$ ,  $\overline{\pi}_{\mu}$  – the calculated value of reliability index of power supply to the feeding nodes of the  $\mu$ -th node at the  $j$ -th time interval, its normative value and the maximum possible value, respectively.

The normative reliability level of power supply to the feeding nodes is achieved by the system means intended for all consumers to the same extent (the principle of equality and non-discrimination). The deficient nodes can experience difficulties with assurance of the normative reliability level and in this case reliability becomes a problem of SO and an object of its market relations with the market subjects. The system operator can solve this problem by using additional system services, purchasing the lacking electric power from surplus nodes and transmitting it to deficient nodes on the base of reserve capabilities of networks. This is done on account of the means of market subjects, guilty of the problem arisen. The means of the system fund of reliability or the insurance funds can be used, if necessary. Thus, at this stage the market mechanism of interaction between the market subjects to maintain power supply reliability comes into play in parallel with the normative approach.

Constraints (7)-(11) added to the model provide power balance at the nodes of the calculated scheme and take into consideration constraints on its components.

$$P_{\mu j} - N_{\mu j} \pm \sum_l PL_{lj} - RO_{\mu j} - RP_{\mu j} - RK_{\mu j} = 0, \quad l \in L_{\mu}, \quad (7)$$

where:  $P_{\mu j}$  – the available generation capacity of the  $\mu$ -th node at the  $j$ -th time interval

( $P_{\mu j} = \sum_{k=1}^{K_{\mu}} P_{\mu kj}$ ,  $P_{\mu kj}$  – the available generation capacity offered by the  $k$ -th generation company of the  $\mu$ -th node at the  $j$ -th time interval to the market,  $K_{\mu}$  – the number of GCs at the  $\mu$ -th node of the studied scheme);

$N_{\mu j}$  – the total load of the  $\mu$ -th node at the  $j$ -th time interval ( $N_{\mu j} = \sum_{n=1}^{U_{\mu}} N_{\mu nj}$ ,  $N_{\mu nj}$  – the load of the  $n$ -th feeding node at the  $\mu$ -th node of the calculated scheme at the  $j$ -th time interval,  $U_{\mu}$  – the number of feeding nodes at the  $\mu$ -th node of the calculated scheme);

$PL_{lj}$  – the power flow by tie line  $l$ , neighboring to the  $\mu$ -th node at the  $j$ -th time interval;

$L_{\mu}$  – the set of tie lines, neighboring to the  $\mu$ -th node;

$RO_{\mu j}$ ,  $RP_{\mu j}$ ,  $RK_{\mu j}$  – the operating, maintenance and commercial capacity reserves, respectively, at the  $\mu$ -th node at the  $j$ -th time interval, constraints on whose value is set by inequalities (8), (9), (10).

$$\underline{RO}_{\mu} \leq RO_{\mu j} \leq \overline{RO}_{\mu} \quad (8)$$

where:  $RO_{\mu j}$ ,  $\underline{RO}_{\mu}$ ,  $\overline{RO}_{\mu}$  – the operating reserve at the  $\mu$ -th node at the  $j$ -th time interval and its maximum possible values specified by the normative requirements to the operating reserve value. At negligible differences between the right and left limits of inequality (8) the calculated value of operating reserve is leveled in time, which involves leveling of the calculated reliability level during a year.

$$\sum_{j=1}^G RP_{\mu j} \Delta T_j = V_{\mu}, \quad (9)$$

where:  $RP_{\mu j}$  – the maintenance reserve required to replace equipment capacity of the  $\mu$ -th node that can be removed for scheduled maintenance at the  $j$ -th time interval without loss for reliability;  
 $\Delta T_j$  – the length of the  $j$ -th discrete time interval;

$V_{\mu}$  – the annual volume of scheduled maintenances of generating facilities of the  $\mu$ -th node, that is obtained based on the standard durations of maintenances.

$$RK_{\mu j} \geq 0 \quad (10)$$

Commercial reserve capacity  $RK_{\mu j}$  was entered into the balance equation for the nodes with redundant power which can be used at the discretion of generation companies. The following equation is used to set the constraints on the value of power to be transmitted along the electric ties between the nodes.

$$\underline{PL}_1 \leq PL_{1j} \leq \overline{PL}_1, \quad 1 = \overline{1, L}, \quad (11)$$

where:  $L$  – the number of ties between the nodes of the calculated scheme;

$PL_{1j}, \underline{PL}_1, \overline{PL}_1$  – the power flow by tie line 1 at the  $j$ -th time interval and its transfer capabilities, respectively. Network company that owns or manages the network equipment of the tie line should coordinate with system operator and provide transfer capabilities of all elements and cutsets during normal operating conditions and during maintenance periods.

*Problem (1)–(11) consists in the choice of optimal values for operating reserve capacity at the nodes of the calculated scheme, taking into account their interaction, at each discrete time interval, in order to provide maximum possible reliability of power supply to consumers throughout the entire interconnection, and reliability of power supply to the feeding nodes not below the standard level, let us call it guaranteed. The maintenance reserve capacity obtained after optimization at each time interval provides during a year full planned maintenance of generating equipment without reliability violation. Meeting the constraints on capacity balance, on the value of operating and maintenance reserve capacity at the nodes and on transfer capabilities of tie lines makes it possible in the process of optimization to take into account the interests of system operator and consumers, possibilities of generation and network companies.*

Solving the problem at the set values of  $P_{\mu j}, N_{\mu j}, \underline{PL}_1, \overline{PL}_1, \underline{RO}_{\mu}, \overline{RO}_{\mu}, V_{\mu}, \underline{\pi}_{\mu}, \overline{\pi}_{\mu}$  we determine optimal, in terms of reliability, values of  $\underline{RO}_{\mu j}, \overline{RO}_{\mu j}, PL_{1j}$  and the values of the

guaranteed reliability index  $\pi_{\mu_j}$  in the feeding nodes by time intervals. For consumers connected to the feeding nodes the level of guaranteed reliability will be average weighted. Here the system operator receives information on: what maximum possible level of power supply reliability throughout the entire interconnection and what level of guaranteed reliability at the feeding nodes under given conditions can be provided in the coming year; what nodes in the calculated scheme are surplus and what are deficient; what amount of electric power and at what time interval should be transmitted to the deficient nodes to ensure there the reliability of power supply to the feeding nodes no lower than the standard level and what nodes from the view point of reliability in the interconnection should be involved. This information can be used to conclude the contracts for selling-buying electric power and system services between the participants of the market (system operator, generation, network and power supply companies and consumers).

As a result, the maximum possible reliability of power supply provides to consumers in the interconnection, and guaranteed reliability of power supply to the feeding nodes at each node in the calculated scheme. Thus, using the system means the problem of maintaining reliable power supply to consumers is solved at a system level. Further the problem of maintaining reliable power supply at the level of feeding nodes is solved for each individual consumer. In a market environment this problem should be solved by power supply companies. Estimating power supply reliability for an individual consumer connected to the feeding node the latter is considered as the basic power source.

Having received the system operator's forecast on the guaranteed reliability level for power supply to the feeding nodes for the coming year power supply, companies analyze if it meets the reliability requirements of consumers served by them. Taking into account the current situation in the industry and high reliability requirements the level of guaranteed reliability may turn out to be insufficient for all the consumers connected to the feeding nodes. As a result power undersupply and its consequences may cause huge losses for large consumers. In a market environment consumers may affect the power supply reliability level. Having estimated potential losses from insufficient reliability they decide what is more profitable – to have a required power supply reliability level or take a risk of possible losses. Taking into account the price of reliability and their financial capacities consumers specify the desired reliability level.

In their turn, power supply companies group consumers on the basis of the reliability levels they require. The consumers can be divided, for example, into three main groups. The first group includes the consumers asking for the reliability level lower than the standard reliability level of power supply to the feeding nodes, the second – those with the level above the standard one but not exceeding the level of guaranteed reliability, and the third – the consumers with the reliability level higher than the guaranteed reliability level. Ensuring the reliability level specified by consumers from each group calls for different means and expenses on the part of power companies that in a market environment have to be compensated by consumers for example via surcharge to the base tariff<sup>1</sup> [5,6]. Here the consumers pay only for additional services related to the increase of the reliability level of power supply to them. Direct participation of consumers in funding the measures on ensuring system reliability (introduction of new technological equipment and modernization of operating equipment, construction (reconstruction) of electric networks and reconstruction of power supply schemes, etc.) is not foreseen. These measures are funded in a centralized manner through the investment component in the base tariff, consumer's payment for electricity, fee for connection to the network and its use.

For consumers of the first group with low reliability requirements power supply companies choose measures to decrease reliability (change in the order, periodicity and duration of disconnections or limitations of consumers in the hours of maximum loads, in the post-emergency conditions, etc.),

---

<sup>1</sup> In this case base tariff corresponds the standard reliability level of power supply to the feeding nodes.



estimate savings on costs required for these measures and give a discount on the electricity tariff. Should the consumers be satisfied with the standard level of power supply reliability, surcharges to the base tariff are not established. The tariff surcharges are established for the consumers that require the reliability level of power supply higher than the standard one, i.e. for the consumers of the second and third groups. For each of the groups the costs (saving) are estimated and the scale of surcharges (discounts) to base tariff is developed. It should be noted that the consumers of the third group will have higher surcharges than the consumers of the second group because ensuring reliability required for them may call for additional expenses related to the improvement of reliability of power supply to feeding nodes or introduction of additional power sources.

Tariff discounts are introduced in the contract between a power supply company and consumers. Payment for reliability organizes the activity of both parties. Power supply companies become more responsible for timely supply of electric power in a required volume to each specific consumer taking into account the requirements to power supply reliability. Consumers get opportunity to participate in the process of tariff formation and through the tariffs protect themselves from power supply interruption and potential losses. However, the system operator and federal agencies for tariffs should control the payment for reliability and the use of these funds as well as the settlement of conflicts and disputes between consumers and power supply companies. Thus, by using different methods and means power companies provide consumers with the desired level of power supply reliability for a certain payment. In doing so the consumers that are satisfied with the standard level of power supply reliability pay for electric power according to a base tariff. If the specified reliability level is lower than the standard one the consumers are given a discount, if higher – the consumers have a surcharge to the tariff. The value of the surcharge is determined by the cost of reliability improvement. For the calculation of surcharges (discounts) to the tariff in a market environment there should be a mechanism allowing power companies and consumers to take into account the interests and requirements of each other while pursuing their own interests [7]. Consumers requiring higher reliability should realistically assess the costs necessary to ensure it and their own financial capacities. Power supply companies should not overstate the price for reliability not to lose their consumers since in a market environment consumers have a right to choose power company according to their financial capacities and offers of power companies.

### **Mechanism of coordination power supply company and consumer's interests**

Reliability is a characteristic that determines the quality of an object, therefore ensuring some level of reliability requires resources and efforts that have certain utility for power supply company. The company is ready to invest these resources and efforts since it understands that consumer will pay for electricity provided the required power supply reliability is ensured. Otherwise consumer will search for another power supply company or construct its own power source. The power supply company should receive certain compensation for the efforts and resources on maintaining power supply reliability. Power consumer buying electricity from the power supply company understands that he has to pay for power supply reliability since insufficient reliability of power supply may lead to losses. If power supply company is unable to provide the consumer with the required reliability it can compensate consumer's losses due to insufficient reliability.

In a general case both subjects of relations – a power supply company and a consumer have different economic criteria for reliability and the criteria do not coincide. Let us consider possible mechanism of interrelations between the subjects of relations in order to find a compromise solution on power supply reliability. The criterion of maximum net present value is the most common criterion for

all subjects. For the power supply company the economic criterion of power supply reliability can be written as follows:

$$NPV_S = I_E + I_R - C - D^* \rightarrow \max, \quad (12)$$

where:  $NPV_S$  – a net present value of power supply company;

$I_E$  – the total reduced revenue from selling electric power in time period T;

$I_R$  – the total reduced revenue from consumer's payment for reliability in time period T;

$C$  – the total reduced costs of power supply company operation that include a reduced share of capital investments and current costs in time period T;

$D^*$  – the total reduced loss (payment to consumer for an insufficient power supply reliability level against the level stipulated in the contract for power supply between power supply company and consumer) in time period T.

For consumers the criterion is the following form:

$$NPV_C = P_C - C_E - C_R - D + D^* \rightarrow \max, \quad (13)$$

where:  $NPV_C$  – a net present value of a consumer;

$P_C$  – the total reduced profit of a consumer excluding power supply costs;

$C_E$  – the total reduced costs of power supply taking into account the fact that the consumer not only buys electric power but takes some measures to receive it;

$C_R$  – the total reduced costs of power supply reliability payment;

$D$  – the full total reduced losses of consumer due to unreliable power supply;

$D^*$  – the total reduced losses due to unreliable power supply compensated by power supply company.

From (13) it follows that the part of full losses due to unreliable power supply to consumers, that corresponds to the insufficient level of power supply reliability with respect to an agreed level stipulated in the contract for power supply between a power supply company and a consumer is compensated by the power supply company. With the set amount of electricity to be sold and costs the interest of power supply company will be determined by the criterion

$$I_R - D^* \rightarrow \max, \quad (14)$$

the interest of a consumer by

$$D^* - D - C_R \rightarrow \max. \quad (15)$$

For aggregate consumer, that totally represents all consumers, served by the given power supply company,

$$I_R = C_R \quad (16)$$

From the analysis of the reduced relationships from the view point of the interests of power supply company and aggregate consumer it follows that if power supply company is able to efficiently use the funds  $I_R$  and improve reliability of power supply and while decreasing the losses to a greater extent than the costs incurred to provide reliability from the funds  $I_R$ , the company will gain additional profit. Hence, there appears an incentive for the power supply company to improve reliability. Consumer is interested in receiving larger compensation  $D^*$ , than the costs of reliability  $C_R$ . If consumer establishes the required reliability through the value of specific losses due to sudden disconnection of power,  $d_p$  (rub/kW), and due to power undersupply,  $d_e$  (rub/kWh), then the rise in compensation  $D^*$  can be provided by increasing  $d_p$  and  $d_e$ . However, in this case the payment for reliability, that depends on  $d_p$  and  $d_e$ , will grow for consumer. In its turn power supply company will try to improve power supply reliability of exactly this consumer, in order to decrease  $D^*$ .

Thus, the suggested mechanism of interrelations between power supply company and consumer provides an economic balance of their interests. Consumer may specify any level of reliability by setting the values of specific losses  $d_p$  and  $d_e$ . Power supply company may stimulate the consumer to set real values of  $d_p$  and  $d_e$  by appropriately establishing payment for power supply reliability for consumers, since their overstatement calls for higher payment for reliability, whereas their understatement does not completely compensate the losses due to insufficient power supply reliability level.

## Conclusion

Taking into account the increased power supply reliability requirements in a new economic environment it is possible to formulate the main difficulties in solving the changing and newly appearing reliability problems.

The problem occurred during coordination of the economic solutions taking into account different interests of different subjects of the EPS control. It is necessary to revise the criteria of choosing the optimal control solutions taking into account the reliability factor. There is a need for a new system of reliability control that should be based on combination of normative approaches and economic mechanisms. Economic control of reliability can be organized by different methods including differentiation of electricity tariffs for consumers, creation of insurance reliability funds, etc. Thus, it is necessary to develop the mechanisms of economic relations between different subjects of electricity market and put them into practice.

The current reliability standards should be revised, in particular the standards for reserves and maintenance. There is a need for the expanded legal framework for the power supply reliability indices,

uniformity of all reliability standards for all power systems operating on the territory of Russia and their approaching to the international ones.

The existing models of reliability analysis, remaining operable in principle, can in some cases be upgraded in the context of new conditions. First of all, this concerns the market participants interrelations to be taken into account. Here it is necessary to be able to determine and take into account fair distribution of costs and profit among the market participants. Previously developed models of reliability synthesis should be improved taking into account the conditions and criteria of reliability control problems, methodical approaches, legal frameworks that will be implemented in practice. These models should be based on the new mathematical methods and information technologies. The newly developed approaches to the analysis and synthesis of reliability when controlling expansion and operation of EPS should be based on the need to coordinate the actions of jointly operating subjects in the competitive environment.

For the power supply reliability to be ensured in a market environment it is necessary to coordinate different interests of power supply companies and consumers, develop an applicable economic mechanism for their interrelations.

## References

1. Reliability of power systems and their equipment/ Ed. by Yu.N. Rudenko: In 4 vol. Vol.1: Reference book on general models for analysis and synthesis of power system reliability / Ed. By Yu.N. Rudenko. – M.: Energoatomizdat, 1994. – 480 p.
2. Osika L.K. Ways of maintaining power supply reliability for consumers – subjects of wholesale and retail electricity markets at a modern stage of energy restructuring. – [www.np-ats.ru/getfile.jsp?fid=177](http://www.np-ats.ru/getfile.jsp?fid=177).
3. Federal law "On electric power industry" adopted by the State Duma on February 21, 2003.
4. Dubitsky M.A., Rudenko Yu.N., Cheltsov M.B. Choice and use of reserve generation capacity in electric power systems. – M.: Energoatomizdat, 1988 – P. 234-250.
5. Voropai N.I., Sobolevsky V.M., Fedotova G.A., Chernikova L.I. Differentiation of electricity tariffs in terms of power supply reliability // Methodical issues of the study on reliability of large power systems. Issue 49: Reliability of power systems: economic and information aspects – St.P, 1997. – P. 104-117.
6. Electricity and capacity market in Russia: what will it be / Ed. by V.I. Edelman. – M.: Energoatomizdat, 2000. – 364 p.
7. Voropai N.I. Reliability of power supply systems. – Novosibirsk: Nauka, 2006. – 205 p.

# SENSITIVITY ANALYSIS OF OPTIMAL COUNTER-TERRORISM RESOURCES ALLOCATION UNDER SUBJECTIVE EXPERT ESTIMATES

**Alexander V. Bochkov, Igor A. Ushakov**

e-mail: [a.bochkov@google.com](mailto:a.bochkov@google.com), [igorushakov@gmail.com](mailto:igorushakov@gmail.com)

## 1. Preliminary

The problem of optimal resources allocation for counter-terrorism measures is naturally based on subjective estimates made by experts in this area. In the future we will continue the word "optimal allocation" though in this case it would be more correct to say about "rational allocation" due to not accurate mathematical model and unreliable input data. Nevertheless, dealing with a mathematical model we will continue to say about "optimal allocation".

Unreliability of the data is inevitable: there is no possibility of "experiments" to get, for instance, such parameters like expected damage of a terrorist act or level of protection of an object due to using some defending measures.

So, making decision for planning counter-terrorism operations we are forced to rely on experts' opinions that could supply us with extremely uncertain input data.

The objective of this presentation is analysis of sensitivity of solutions of the optimal allocation problem under uncertainty of experts' estimates.

## 2. Analysis of solution sensitivity: Expenses estimates variation

Let us analyze first how variation of expenses estimates influence on the solution on the level of a single object. For simplicity, we avoid to consider the influence of defense on the Federal and State levels. Assume that we have three variants of estimates: lower, middle and upper as it presented in the table below. Here the lower estimates are 20% lower of the corresponding middle estimates, and the upper ones are 20% higher.

Case of lower estimates

OBJECT-1		Vuln.	$\Delta E$
Act-1	Measure-11	0,25	0,8
	Measure-12	0,2	2
	Measure-13	0,1	4
	Measure-14	0,01	3,2
Act-2	Measure-21	0,2	1,6
	Measure-22	0,16	0,8
	Measure-23	0,07	3,2
	Measure-24	0,02	5,6
Act-3	Measure-31	0,11	4
	Measure-32	0,1	2
	Measure-33	0,05	2,4
	Measure-34	0,04	1,6
	Measure-35	0,01	5,6

Case of middle estimates

OBJECT-1		Vuln.	$\Delta E$
Act-1	Measure-11	0,25	1
	Measure-12	0,2	2,5
	Measure-13	0,1	5
	Measure-14	0,01	4
Act-2	Measure-21	0,2	2
	Measure-22	0,16	1
	Measure-23	0,07	4
	Measure-24	0,02	7
Act-3	Measure-31	0,11	5
	Measure-32	0,1	2,5
	Measure-33	0,05	3
	Measure-34	0,04	2
	Measure-35	0,01	7

Case of upper estimates

OBJECT-1		Vuln.	$\Delta E$
Act-1	Measure-11	0,25	1,2
	Measure-12	0,2	3
	Measure-13	0,1	6
	Measure-14	0,01	4,8
Act-2	Measure-21	0,2	2,4
	Measure-22	0,16	1,2
	Measure-23	0,07	4,8
	Measure-24	0,02	8,4
Act-3	Measure-31	0,11	6
	Measure-32	0,1	3
	Measure-33	0,05	3,6
	Measure-34	0,04	2,4
	Measure-35	0,01	8,4

In these tables the last column contains expenses increments for applying the current protection measure.

Using the method of equal defense levels against every type of terrorist attack, suggested in the previous presentation, we build the "trajectory" of object protection improvement. For the sake of brevity, we consider only the case of middle estimates.

### *Case of lower estimates*

Object 1			
Step Number	Undertaken measures	Resulting Vulnerability	Total Expenses
1	M-11, M-21, M-31	$\max \{0.25, 0.2, 0.11\}=0.25$	$0.8+1.6+4=6.4$
2	<b>M-12</b> , M-21, M-31	$\max \{0.2, 0.2, 0.11\}=0.2$	$6.4+2=8.4$
3	<b>M-13</b> , <b>M-22</b> , M-31	$\max \{0.1, 0.16, 0.11\}=0.16$	$8.4+4+0.8=13.2$
4	M-13, <b>M-23</b> , M-31	$\max \{0.1, 0.07, 0.11\}=0.11$	$13.2+3.2=16.4$
5	M-13, M-23, <b>M-32</b>	$\max \{0.1, 0.07, 0.1\}=0.1$	$16.4+2=18.4$
6	<b>M-14</b> , M-23, <b>M-33</b>	$\max \{0.01, 0.07, 0.05\}=0.07$	$18.4+3.2+2.4=24$
7	M-14, <b>M-24</b> , M-33	$\max \{0.01, 0.02, 0.05\}=0.05$	$24+5.6=29.6$
8	M-14, M-24, <b>M-34</b>	$\max \{0.01, 0.02, 0.04\}=0.04$	$29.6+1.6=31.2$
9	M-14, M-24, <b>M-35</b>	$\max \{0.01, 0.02, 0.01\}=0.02$	$31.2+5.6=36.8$

### *Case of middle estimates*

Object 1			
Step Number	Undertaken measures	Resulting Vulnerability	Total Expenses
1	M-11, M-21, M-31	$\max \{0.25, 0.2, 0.11\}=0.25$	$1+2+5=8$
2	<b>M-12</b> , M-21, M-31	$\max \{0.2, 0.2, 0.11\}=0.2$	$8+2.5=10.5$
3	<b>M-13</b> , <b>M-22</b> , M-31	$\max \{0.1, 0.16, 0.11\}=0.16$	$10.5+1+5=16.5$
4	M-13, <b>M-23</b> , M-31	$\max \{0.1, 0.07, 0.11\}=0.11$	$16.5+4=20.5$
5	M-13, M-23, <b>M-32</b>	$\max \{0.1, 0.07, 0.1\}=0.1$	$20.5+2.5=23$
6	<b>M-14</b> , M-23, <b>M-33</b>	$\max \{0.01, 0.07, 0.05\}=0.07$	$23+4+3=30$
7	M-14, <b>M-24</b> , M-33	$\max \{0.01, 0.02, 0.05\}=0.05$	$30+7=37$
8	M-14, M-24, <b>M-34</b>	$\max \{0.01, 0.02, 0.04\}=0.04$	$37+2=39$
9	M-14, M-24, <b>M-35</b>	$\max \{0.01, 0.02, 0.01\}=0.02$	$39+7=46$

### *Case of upper estimates*

Object 1			
Step Number	Undertaken measures	Resulting Vulnerability	Total Expenses
1	M-11, M-21, M-31	$\max \{0.25, 0.2, 0.11\}=0.25$	$1.2+2.4+6=9.6$
2	<b>M-12</b> , M-21, M-31	$\max \{0.2, 0.2, 0.11\}=0.2$	$9.6+3=12.6$
3	<b>M-13</b> , <b>M-22</b> , M-31	$\max \{0.1, 0.16, 0.11\}=0.16$	$12.6+6+1.2=19.8$
4	M-13, <b>M-23</b> , M-31	$\max \{0.1, 0.07, 0.11\}=0.11$	$19.8+4.8=24.6$
5	M-13, M-23, <b>M-32</b>	$\max \{0.1, 0.07, 0.1\}=0.1$	$24.6+3=27.6$
6	<b>M-14</b> , M-23, <b>M-33</b>	$\max \{0.01, 0.07, 0.05\}=0.07$	$27.6+4.8+3.6=36$
7	M-14, <b>M-24</b> , M-33	$\max \{0.01, 0.02, 0.05\}=0.05$	$36+8.4=44.4$
8	M-14, M-24, <b>M-34</b>	$\max \{0.01, 0.02, 0.04\}=0.04$	$44.4+2.4=46.8$
9	M-14, M-24, <b>M-35</b>	$\max \{0.01, 0.02, 0.01\}=0.02$	$46.8+8.4=55.2$

Such a table gives a possibility to find what measures should be undertaken for each required level of protection (or admissible level of vulnerability) and given limited resources.

The final "trajectory" of the "Expenses vs. Vulnerability" dependency is presented below.

*Case of lower estimates*

Sum. Exp.	Vulnerability
6,4	0,25
8,4	0,2
13,2	0,16
16,4	0,11
18,4	0,1
24	0,07
29,6	0,05
31,2	0,04
36,8	0,02

*Case of middle estimates*

Sum. Exp.	Vulnerability
8	0,25
10,5	0,2
16,5	0,16
20,5	0,11
23	0,1
30	0,07
37	0,05
39	0,04
46	0,02

*Case of upper estimates*

Sum. Exp.	Vulnerability
9,6	0,25
12,6	0,2
19,8	0,16
24,6	0,11
27,6	0,1
36	0,07
44,4	0,05
46,8	0,04
55,2	0,02

Using the tables above, consider two solutions of the **Direct Problem** with required levels of vulnerability 0.1 and 0.02.

**Lower estimates**

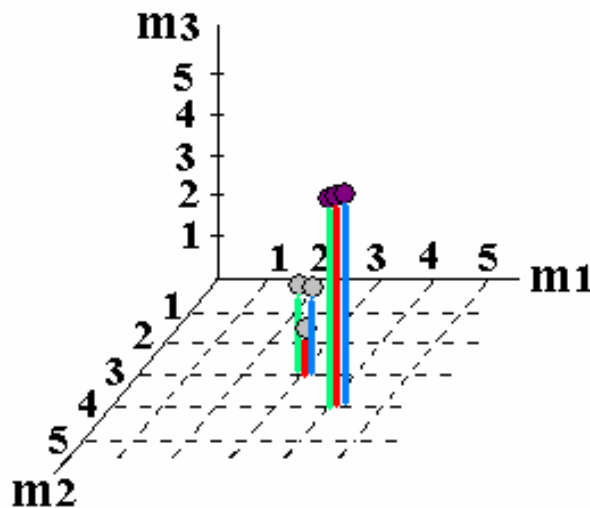
- 0.1 → 18.4 → m13, m23, m32
- 0.02 → 36.8 → m14, m24, m35

**Middle estimates**

- 0.1 → 23 → m13, m23, m31
- 0.02 → 46 → m14, m24, m35

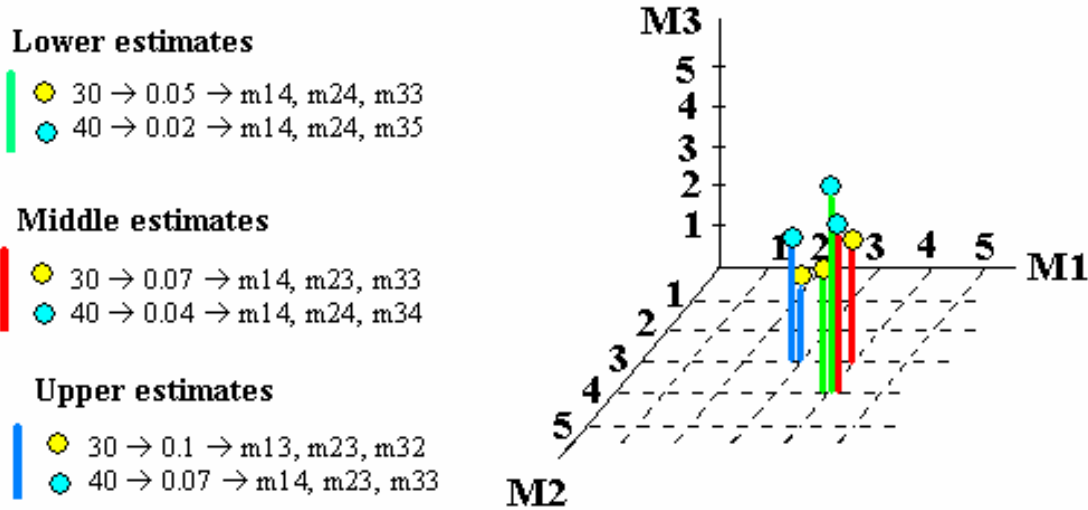
**Upper estimates**

- 0.1 → 27.6 → m13, m23, m32
- 0.02 → 55.2 → m14, m24, m35



On the right, it is shown what measures correspond to these two solutions of the Direct Problem. One can see that with  $\pm 20\%$  variation of the values of expenses, vectors of solutions (that is, chosen measures) remain the same.

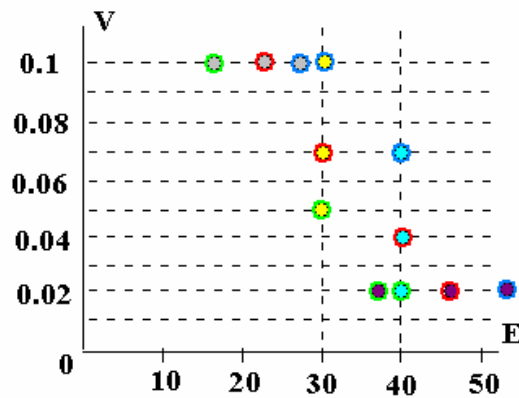
For the **Inverse Problem**, let us choose two fixed levels of admissible expenses: 30 c.c.u. and 40 c.c.u.



On the right, it is shown what measures correspond to these two solutions of the Inverse Problem. One can see that with the same variation of the values of expenses, vectors of solutions remain the same.

It means that relatively large dispersion of input data practically does not influence on the choice of the set of counter-terrorist measures.

Of course it does not mean that "Vulnerability-Expenses" dependence stays the same: it varies significantly.



It means that, for instance, when the upper estimates of expenses are used, the calculated level of protection will be low and a decision-maker could ask for more resources though it is, probably, unnecessary.

Naturally, for the direct problem solutions the difference between the final expenses remains  $\pm 20\%$ . At the same time the Inverse Problem solutions have significant dispersion due to a non-linear character of the "Vulnerability-Expenses" dependence. It can be seen from the figure above that corresponding "horizontal" dots lay closer than "vertical" ones. However, if one choose more natural scale for vulnerability, namely, logarithmical one, then "linear distance" between vertical dots on such a scale will be less significant.



The simple qualitative analysis of obtained data shows us that the solutions of both Direct and Inverse Problems in the case of expenses variation is stable enough.

### 3. Analysis of solution sensitivity: Vulnerability estimates variation

Let us conduct analogous reasoning for the case, when the estimations of vulnerability level of object are overstated (they are understated) by experts.

#### Case of lower estimates

#### Case of middle estimates

#### Case of upper estimates

OBJECT-1		Vuln.	Exp.
Act-1	Measure-11	0,200	1
	Measure-12	0,160	2.5
	Measure-13	0,080	5
	Measure-14	0,008	4
Act-2	Measure-21	0,160	2
	Measure-22	0,128	1
	Measure-23	0,056	4
	Measure-24	0,016	7
Act-3	Measure-31	0,088	5
	Measure-32	0,080	2.5
	Measure-33	0,040	3
	Measure-34	0,032	2
	Measure-35	0,008	7

OBJECT-1		Vuln.	Exp.
Act-1	Measure-11	0,25	1
	Measure-12	0,2	2.5
	Measure-13	0,1	5
	Measure-14	0,01	4
Act-2	Measure-21	0,2	2
	Measure-22	0,16	1
	Measure-23	0,07	4
	Measure-24	0,02	7
Act-3	Measure-31	0,11	5
	Measure-32	0,1	2.5
	Measure-33	0,05	3
	Measure-34	0,04	2
	Measure-35	0,01	7

OBJECT-1		Vuln.	Exp.
Act-1	Measure-11	0,3	1
	Measure-12	0,24	2.5
	Measure-13	0,12	5
	Measure-14	0,012	4
Act-2	Measure-21	0,24	2
	Measure-22	0,192	1
	Measure-23	0,084	4
	Measure-24	0,024	7
Act-3	Measure-31	0,132	5
	Measure-32	0,12	2.5
	Measure-33	0,06	3
	Measure-34	0,048	2
	Measure-35	0,012	7

#### Case of lower estimates

Object 1			
Step Number	Undertaken measures	Resulting Vulnerability	Total Expenses
1	M-11, M-21, M-31	max {0.2, 0.16, 0.088}=0.2	1+2+5=8
2	M-12, M-21, M-31	max {0.16, 0.16, 0.088}=0.16	8+2.5=10.5
3	M-13, M-22, M-31	max {0.08, 0.128, 0.088}=0.128	10.5+5+1=16.5
4	M-13, M-23, M-31	max {0.08, 0.056, 0.088}=0.088	16.5+4=20.5
5	M-13, M-23, M-32	max {0.08, 0.056, 0.08}=0.08	20.5+2.5=23
6	M-14, M-23, M-33	max {0.008, 0.056, 0.04}=0.056	23+4+3=30
7	M-14, M-24, M-33	max {0.008, 0.016, 0.04}=0.04	30+7=37
8	M-14, M-24, M-34	max {0.008, 0.016, 0.032}=0.032	37+2=39
9	M-14, M-24, M-35	max {0.008, 0.016, 0.008}=0.016	39+7=46

#### Case of middle estimates

Object 1			
Step Number	Undertaken measures	Resulting Vulnerability	Total Expenses
1	M-11, M-21, M-31	max {0.25, 0.2, 0.11}=0.25	1+2+5=8
2	M-12, M-21, M-31	max {0.2, 0.2, 0.11}=0.2	8+2.5=10.5
3	M-13, M-22, M-31	max {0.1, 0.16, 0.11}=0.16	10.5+1+5=16.5
4	M-13, M-23, M-31	max {0.1, 0.07, 0.11}=0.11	16.5+4=20.5
5	M-13, M-23, M-32	max {0.1, 0.07, 0.1}=0.1	20.5+2.5=23
6	M-14, M-23, M-33	max {0.01, 0.07, 0.05}=0.07	23+4+3=30
7	M-14, M-24, M-33	max {0.01, 0.02, 0.05}=0.05	30+7=37
8	M-14, M-24, M-34	max {0.01, 0.02, 0.04}=0.04	37+2=39
9	M-14, M-24, M-35	max {0.01, 0.02, 0.01}=0.02	39+7=46

*Case of upper estimates*

Object 1			
Step Number	Undertaken measures	Resulting Vulnerability	Total Expenses
1	M-11, M-21, M-31	max { <b>0.3</b> , 0.24, 0.132}=0.3	1+2+5=8
2	<b>M-12</b> , M-21, M-31	max { <b>0.24</b> , <b>0.24</b> , 0.132}=0.24	8+2.5=10.5
3	<b>M-13</b> , <b>M-22</b> , M-31	max {0.12, <b>0.192</b> , 0.132}=0.192	10.5++1+5=16.5
4	M-13, <b>M-23</b> , M-31	max {0.12, 0.084, <b>0.132</b> }=0.132	16.5+4=20.5
5	M-13, M-23, <b>M-32</b>	max {0.12, 0.084, <b>0.12</b> }=0.12	20.5+2.5=23
6	<b>M-14</b> , M-23, <b>M-33</b>	max {0.012, <b>0.084</b> , 0.06}=0.084	23+4+3=30
7	M-14, <b>M-24</b> , M-33	max {0.012, 0.024, <b>0.06</b> }=0.06	30+7=37
8	M-14, M-24, <b>M-34</b>	max {0.012, 0.024, <b>0.048</b> }=0.048	37+2=39
9	M-14, M-24, <b>M-35</b>	max {0.012, <b>0.024</b> , 0.012}=0.024	39+7=46

*Case of lower estimates*

Sum. Exp.	Vulnerability
8	0,200
10,5	0,160
16,5	0,128
20,5	0,088
23	0,080
30	0,056
37	0,040
39	0,032
46	0,016

*Case of middle estimates*

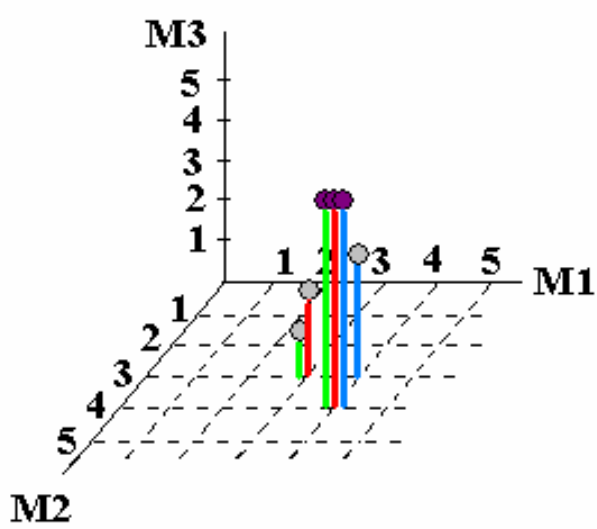
Sum. Exp.	Vulnerability
8	0,25
10,5	0,2
16,5	0,16
20,5	0,11
23	0,1
30	0,07
37	0,05
39	0,04
46	0,02

*Case of upper estimates*

Sum. Exp.	Vulnerability
8	0,3
10,5	0,24
16,5	0,192
20,5	0,132
23	0,12
30	0,084
37	0,06
39	0,048
46	0,024

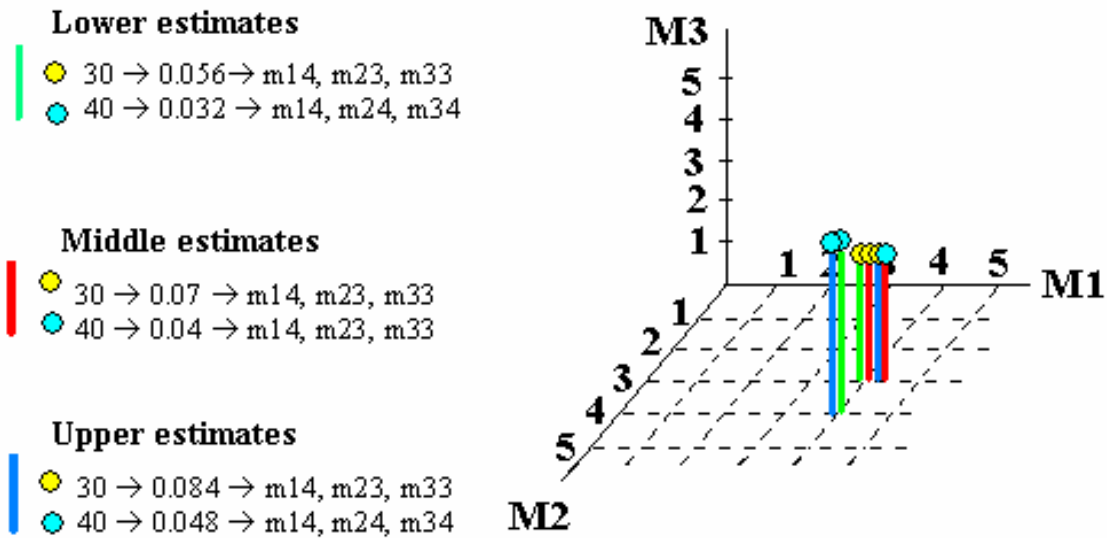
Using the tables above, consider two solutions of the **Direct Problem** with the same required levels of vulnerability 0.1 and 0.02, as it was in the previous section.

- Lower estimates**
  - 0.1 → 20.5 → m13, m23, m31
  - 0.02 → 46 → m14, m24, m35
- Middle estimates**
  - 0.1 → 23 → m13, m23, m32
  - 0.02 → 46 → m14, m24, m35
- Upper estimates**
  - 0.1 → 30 → m14, m23, m33
  - 0.02 → 46 → m14, m24, m35



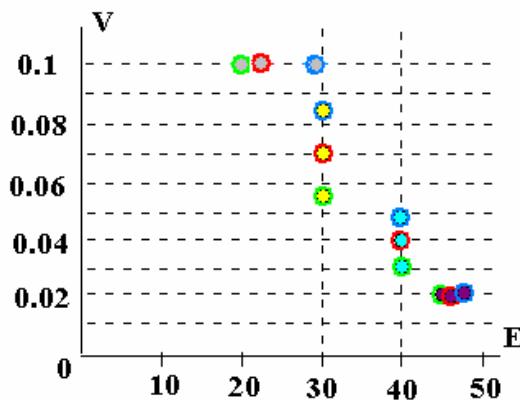
On the right, it is shown what measures correspond to these two solutions of the Direct Problem. One can see that with  $\pm 20\%$  variation of the values of vulnerability, vectors of solutions remain almost the same.

For the **Inverse Problem**, let us choose again the same two fixed levels of admissible expenses: 30 c.c.u. and 40 c.c.u.



On the right, it is shown what measures correspond to these two solutions of the Inverse Problem. One can see that again, as in the previous section,  $\pm 20\%$  variation of the values of vulnerability, vectors of solutions remain almost the same.

In this case, "Vulnerability-Expenses" dependence also varies significantly, especially for the solutions of the Inverse Problem.



For this case, one can make approximately the same conclusions, as in the previous case.

#### 4. Conclusion

The presented analysis shows that presented model of optimal allocation of counter-terrorism resources, suggested in the previous report, is working stably enough.

Development of improved computer model will allow analyzing more realistic situations, including random insensitivity of input data. However, it seems that such "one-side biased" expert estimates should lead to more serious errors than random variations of the parameters.

#### References

1. **I.Ushakov.** Counter-terrorism: Protection Resources Allocation. Part I. Minimax Criterion. *Reliability: Theory and Applications*" (vol.1, No.2), 2006.
2. **I.Ushakov.** "Counter-terrorism: Protection Resources Allocation. Part II. Branching System. *Reliability: Theory and Applications* (vol.1, No.3), 2006.

***OR/MS Today*** - October 2006  
**Computerized Third Party**

## WHEN THREE'S NOT A CROWD

---

**John Kettelle**



e-mail: [kettelle@earthlink.net](mailto:kettelle@earthlink.net)

*From peace treaties to labor contracts: The case for employing a computerized third party for group decision-making and negotiations.*

One of the most frustrating things about a negotiation is that each party has private information that is central to a sound agreement, but it can at the same time be folly for either party to share that information directly with the other party. A simple example is a sales transaction. The seller should not start by telling his prospect the lowest price he is prepared to accept, nor should the buyer start by telling the seller the highest price he is prepared to pay. Clearly, if there is, in fact, room for a deal, whoever first conveys this information is conceding the entire room to the other party.

In many negotiations, there will be an array of issues and corresponding sets of values placed by either side on the associated possible deals that might be struck. For either side to convey its version of these values directly to the other can be similarly damaging. Obviously, some kind of a third party can be helpful.

A traditional solution to this frustrating situation is for the two principals to find a human third party (HTP) with whom they can both confide. But HTPs have four well-known problems:

- Either side has to be concerned about the risk that the HTP may be a secret ally with the other side.
- Even if that risk can be accepted, there is a hazard that the HTP, who needs to be intimately familiar with the relevant secrets of both sides, may reveal clues about those secrets by accident.
- If the issue has any real complexity, the HTP will need a corresponding amount of prior expertise, not only on how to negotiate, but also on details of the issues peculiar to that particular problem.
- Real complexity can put a serious burden on the HTP, and any large staff that he may require multiplies all the above problems.

Before we attempt a general description of the CTP process, let us start with a rather simple example — what we call the pizza problem.

Suppose two nerds (Tom and Dick) enter a pizza parlor and thoughtlessly order a pizza, specifying that one side be mushrooms and the other side pepperoni. When they sit down to eat, they decide to make a real problem of just how to share it. They start by agreeing to require an "equi-max" solution, to wit:

1. Each man should get the same fraction of his own perceived value of the whole pizza, and
2. This common fraction should be maximized.

Now suppose their values about mushrooms and pepperoni are as follows:

### Individual Values of Ingredients

	Mushrooms	Pepperoni
Tom	.6	.4
Dick	.1	.9

If Tom and Dick were normal, they would likely end up with Tom simply getting the mushroom side and Dick the pepperoni. But they are indeed nerds, and they never leave home without a computer that can satisfy the above equi-max sharing conditions. It gives them the following result:

### Equi-Max Sharing Conditions

	Mushrooms	Pepperoni	Total Value
Tom	1.0	.23	.69
Dick	None	.77	.69
	<b>Total</b>		<b>1.38</b>

### Comments:

- It turns out that a computer can solve this problem, for any number of different flavors, and for any number of people who have a claim on the pizza, with a typical linear programming package. For the two-person problem, the computer can generate what is called a Pareto frontier — a plot of the most value Tom can get as a function of what Dick would get ([see box, page 23](#)).
- The "normal" resolution, Tom getting all the mushrooms and Dick all the pepperoni, gives a larger total (but obviously not one equally shared) value of 1.5. This suggests the issue of side-payments.
- If Dick really enters into the competitive spirit of this game, and furthermore knows Tom well enough to predict exactly what values Tom will enter, Dick can mimic Tom's preferences, except with an insignificantly larger value for the pepperoni (and a correspondingly smaller value for the mushrooms). The computer's solution will then be to give Dick all the pepperoni (which the computer thinks is worth only .6 to Tom, instead of the actual .9), plus one-sixth of the mushrooms, for a total treat worth over 90 percent to Dick, and only 33 percent to poor Tom.
- It is amusing what happens if *both* players use this gambit. The computer then dutifully gives each what the other really should have received, thereby providing what might be called the "pessimum" (worst possible) solution. Of course, even though they are both nerds, they would be likely to trade.

If one player happens to be a lot hungrier — or richer — than the other, there may be room for a side payment.

## Operation of the CTP

---

### First phase — the feasibility mode:

1. Each side submits a list of issues to be addressed.
2. The computer then reports the combined list to both sides. Because learning what one side deems relevant may be exploited by the other, each side will have been free to include some factors that were in fact unimportant to him.
3. Each side then submits to the computer his value function defined on all the factors in the combined list (the irrelevant ones being ignored, because *this* set of inputs will *not* be automatically revealed to the other side), and also enters the minimum acceptable value that it requires for a deal. Defining this value function is indeed a logical component of any negotiation.
4. The computer then derives the Pareto frontier — the set of deals in which any payoff for one side is accompanied by the largest possible payoff for the other.
5. It then reports to both sides whether there is "room for a deal" — whether there are *any* deals on the frontier that meet the minimum requirements of both sides.

**No room for a deal.** If the computer reports there *isn't* room for a deal, then the sides can either break off the negotiation altogether or cycle back to step 3, presumably with lower requirements. (A central point here is the possible inclusion of an additional party — one who has an exogenous stake in the success of an agreement. This issue can be dealt with either by including him in the negotiation from the beginning or by appealing to him *post hoc* — only after this current step. In the *post hoc* case, the two principals may form an alliance, and negotiate as a team with the newcomer.)

If we have departed the above steps via the "No" exit, this will indeed be bad news. (If it *weren't* news, there would have been no point in starting the negotiations.) The obvious question will be whether the parties could have learned this more easily, without all the detailed homework defined above. There are indeed buffered ways to do this, typically based on each side supplying *boundaries* of acceptability (below which the value of an agreement would be worse than no agreement at all), rather than the more complex value functions. This is normally done, at least implicitly, in "usual" situations. Unfortunately, this very "implicit" decision is often flawed, for the simple reason that rhetoric often misleads the other party about the real levels of acceptability. This is even further complicated by there being two kinds of "rhetoric" (in the misleading sense of the word): 1. rhetoric that is truly public, meant to gather public support; and 2. direct "private" communications with the other party, in which unfiltered truth-telling can still be counter-productive.

**Room for a deal.** But suppose the answer is "Yes." If we have indeed left via the "Yes" exit, the first thing is to recognize a positive change of mood for both parties — the news that there is at least one deal preferable to "no agreement." They are both left with the cheerful project of sharing the excesses over their minimum requirements. (In the negotiation community a popular acronym is BATNA — the "best alternative to no action." In the context of the CTP, BATNA gets parsed in two — the existence of at least one deal better than no action, and a logical cooperative search for the sides to choose one.

Clearly, among an array of alternatives both sides might prefer to "no action"; what is "best" for one is likely to be "worst" for the other, leaving BATNA poorly defined.)

**Collaborative phase.** The objective in this phase is for the two players to agree on how to share the excess beyond the minimally acceptable payoffs that have already been assured. On the way to this objective, either side may request information outputs (and who should get them) from the computer. The request itself (but not the requested output) will be automatically relayed to the other side, and will be granted only with his concurrence. A search for good strategies for the two sides promises to be fascinating, but here are a few thoughts:

- By now, the only relevant data may be the points on the feasible portion of the Pareto frontier.
- The two sides could agree to share that entire set of Pareto points (that is, the sets of conditions that generate the payoffs, not the payoffs themselves).
- Each could allow the other side to see only the array of its own payoffs, reducing what might some call the "jealousy" factor.
- The two sides could start by asking to see only one candidate point, for example the one somehow closest to the midpoint of the acceptable solutions, and by mutual agreement explore the frontier step by step.

**The "digesting" phase.** If things have gone well, this "mating dance" will by now have generated what might be called a "presumable" deal. Before this deal is finally ratified, you can make a case for what might be called a *digesting* period. Whether it deserves minutes, hours, days or weeks depends on the circumstances (minutes for the response to an accidental nuclear missile launch, months for a deal on non-proliferation); but in any case the deal's payoff, and its very structure, may have turned out to be somewhat of a surprise. This may warrant some additional thoughts that could lead to an even better deal (or avoidance of an unforeseen flaw in somebody's logic).

There may be a modification that would provide a very large gain for one side in exchange for a much smaller loss for the other. This might be addressed by some kind of a side payment beyond those already embedded in the frontier, or simply by giving the conceding party a chance to be generous.

**Implementation and publication.** If security permits, the negotiation can be completed remotely and secretly — perhaps to be executed only when something else happens. A secret alliance.

Once the basic agreement has been made, the parties can then use the CTP to work out second-order details of implementation — details not worth the effort before the basic agreement was assured.

**Penalties for backing out.** It is conceivable that one side could simply be using the buffer negotiation as a fishing expedition — simply to learn more about the other side's attitudes. An inherent protection against this will be the cost and time expended on the sham negotiation itself. If this is not enough deterrent, each side might be required to put in some kind of an initial deposit, which would be forfeited if one person arbitrarily rejected an agreement which had met all of the criteria that he himself had entered during the course of the process.



## Applications

---

For us, the most exciting thing about the CTP concept has been the apparent payoffs of specific applications. Here is a sampling of governmental and commercial applications. Personal ones, like managing romantic relationships are left as exercises for the reader.

### • **The Israeli-Palestinian problem**

This is a predicament replete with the kind of issues we have already mentioned. A partial list of issues includes:

- the boundary between Palestine and Israel;
- the fate of various settlements;
- sharing of water resources;
- convenient routes between Gaza and the West Bank, and (presuming that Israeli settlements in the West Bank survive), convenient connections between those settlements and Israel; and
- limits on the military capabilities of Palestine, and corresponding cooperation from Israel in case Palestine gets threatened by its other neighbors.

A frequent issue in a negotiation between two parties is the interest of another significant party or stakeholder. In this case the United States is clearly such a party. For that matter, the Middle East Arab community (somehow defined) is another. Theoretically these stakeholders can be, from the beginning, an inherent part of the computer-oriented negotiation. Or they can be added after the two principals have completed a preliminary round.

### • **Military conflict terminations**

The termination of a war is typically a two-step process:

1. The cessation of fighting, typically called an armistice, which is to a first approximation often surrender by one side.
2. A follow-on detailed set of actions, a subset of which is sometimes called a peace treaty.

As the CTP process gets established it can help with each step, and provide a smoother connection between them. Examples from both World Wars suggest payoffs that are so dramatic that even a small chance of success can argue for a current "war avoidance" CTP system.

*WWI* — Only a few months after the U.S. intercession in April 1917, it should have been clear to both sides that an Allied victory was only a question of time. A short set of agreed conditions could very likely have led to an armistice a full year before November 1918. The nature of this armistice agreement might well have included:

- details about boundaries;

- first-order agreements about the nature of the surviving German government; and
- some preliminary provision for reparations (and post-war reconstruction).

In fact, a CTP might well have made U.S. intervention unnecessary, and even averted the war itself — a war that was a totally irrational response to the assassination of Archduke Ferdinand by a Bosnian Serb in 1914.

**WWII** — A RAND study ["Strategic Surrender," by Paul Kecskemeti, Stanford University Press, 1958] examined in detail the three successive WWII surrenders — of the Italians, the Germans and the Japanese. What follows draws heavily on that excellent book.

**Italy:** It may be an open question whether the armistice with Italy could have been with Mussolini or only with the putative post-Mussolini Italian government. In either case, the armistice needed to have been negotiated more quickly. It might well have provided for an effective "flip-flop" of the Italian military (including its battleship "Roma") to join the Allies in the continuing war against Germany.

**Germany:** With respect to the fall of Germany, there would have been a number of dramatic uses for the CTP:

- There just *might* have been an opportunity to make a deal with the general staff, and for example with the adherents of General Rommel, that could have obviated the Normandy invasion.
- Perhaps even more important, a viable CTP could have been used in the Yalta negotiations, for an agreement among the Western allies and the Soviet Union regarding the fate of the eastern European countries and of Germany itself. One "detail" of this could have been a better partition of Germany or some alternative to *any* partition.

**Japan:** Our own war began on Dec. 7, 1941, when the Japanese bombed Pearl Harbor — "A day that will live in infamy." As early as five months later (just after the Battle of Midway), Japan sent an envoy to Switzerland (a kind of no-man's-land), looking for early opportunities to end the war. In November 1943, Roosevelt, Churchill and Chiang Kai-shek published the Cairo declaration — that all Japan's recent conquests would have to be forfeited, but that its prior territory would survive — *better for Japan than the eventual result*.

As early as 18 months before Hiroshima, the Japanese military had recognized that Japan was going to lose the war. They approached Stalin to act somehow as a third party — a classic example of the hazards of using an HTP! Stalin just kept his mouth shut, never relaying Japan's interest in any kind of a surrender.

In the months before Hiroshima, the firebomb raids on Tokyo, coupled with our (submarine) naval blockade, were making the Japanese increasingly frustrated. In necessarily (lacking a CPT!) awkward ways, Japan conveyed directly to Washington its interest in some kind of a peace treaty, indicating that the survival of the emperor was a central issue.

Communications were so bad that Truman's reply, which tried to imply that this issue was indeed negotiable, was awkwardly delivered by an airdrop (over the royal palace) of a cluster of leaflets. The

Japanese reply (in spite of their desperate desire for some kind of a surrender) was misinterpreted as haughty defiance, prompting Truman to abandon the negotiation and immediately drop the bomb. The most elementary version of a CTP could well have avoided Hiroshima. (Some have made the case that the world has been better off to have been so dramatically confronted with the consequences of nuclear warfare, but it was not a demonstration that Truman would have made just for that reason.)

***MAD (mutually assured destruction)*** — As one survivor of the Cold War, this concept is still a central component of our military posture. But it probably still has a significant chink in it — an accidentally launched single missile from one side might trigger the carefully planned MAD event by the other. The travel time of a ballistic missile between the United States and Russia is only about 70 minutes. If an accidental launch (from Russia, China or even the United States) is still an even remotely conceivable tragedy — and the possibility that a CTP just might avert it — could be well worth such an arrangement. The computer itself might be kept in a stationary orbit. Each country would maintain continuous contact with the CTP, and exercise frequent drills.

A well-thought out structure for making some deal will have been established within the CTP. An awkward (but far better to the ultimate "no deal"!) might be that the launching side will accept a single retaliatory missile from some list of possible targets of the other side. If a quick deal is made, wonderful. Otherwise the two sides could "destroy each other with a clear conscience."

***Peace Treaties*** — The WWI Treaty of Versailles is normally considered to have been a primary condition that led to the rise of Hitler and the consequent initiation of WWII. The peace arrangements as WWII ended had differences and similarities. The differences included the cooperative restructuring of both Germany and Japan by the Western Allies and particularly by the United States. One can make a case that these successful arrangements (such as the Marshall Plan in Europe and benevolent administration of Japan by McArthur's temporary government) could well have been further enhanced by a CTP arrangement in which the resulting deals could have even more cooperatively fashioned.

A closely related issue, involving the United States and the Soviet Union right after Hiroshima, might have been some kind of a quick negotiation between them that could have led to a really great non-proliferation treaty, where the United States would have been left as the *only* country in the world with nuclear weapons.

#### • **Tactical Negotiations**

There is a tragic supply of battles that should never have been fought, or at least should have been terminated before their predictable conclusions. One set would include some of the WWII land battles in the Pacific, such as Iwo Jima and Okinawa. There is another set of examples whose resolution seems less feasible but is exceedingly frustrating. It is typified by the remarkably accurate loss predictions for deaths in both sides in the half dozen large battles of the Civil War, and also for much of the trench warfare in WWI. Instead of completing such battles whose outcomes are so predictable, the opposing forces might use the CTP to compute the expected deaths for each side (deaths typically very painful and agonizing) and then let each side randomly choose the same numbers of soldiers and render them more mercifully *hors de combat* (for example in some "joint" POW camp).

•

## Non-Government

**Labor-management contracts.** These are gold mines for non-zero-sum elements. For each element of a deal, the values to the union typically have a very different structure from the costs to management. One central set of issues — salaries and hourly rates — can be an exception to this, but retirement benefits, vacations and holidays, sick leave, health benefits and overtime premiums typically have significant differences in costs to management versus values to labor. We have already noted that it can be counterproductive for one side to tell the other the values it assigns to various components of a deal, so here is indeed a good role for CTP.

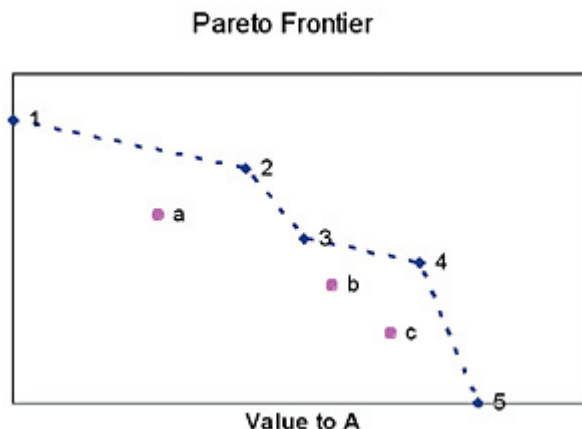
Explicitly facing this labor issue in the CTP context highlights another well-known aspect of labor-management contracts — mainly, different contracts for different categories of labor. For example, retirement benefits versus current income may have different relative values for airline flight personnel versus maintenance workers. This illustrates the need for a many-sided (rather than two-sided) negotiation structure.

**Acquisitions and mergers.** There are a many obvious components of a merger transaction:

- How much of the stock of the acquired company will be paid for in cash or in stock of the acquiring company?
- What happens to key figures of the acquired company? (For example, the very people negotiating the purchase.)
- A central element of a merger discussion is each side's estimate of the synergy of the merger — the extent to which the new entity will be worth more than the sum of the original parts. The CTP may provide an efficient way for the two companies to share enough information so that each can separately form its own estimate of the overall payoff of the merger, without directly giving each other information that can hurt them if the merger doesn't go through. The formation of coalitions among several companies (consistent with monopoly problems) would be a fascinating CTP application.

### Pareto Frontier

Possible outcomes of a negotiation between parties A and B are plotted in the figure below.



For each lettered point, there is at least one numbered point that is better for both A and B. For example, 2-5 is better than "a," and 4 is better than both "b" and "c." The numbered points are called "undominated," and constitute the Pareto Frontier. To the extent assets can be continuously divided (such as in the Pizza Problem), the Pareto Frontier can be a continuous curve. When there are only two parties, the resolution obviously wants to be on the Pareto Frontier. When there are more than two, there can be all kinds of ways that a subset of the parties can cooperate to the detriment of the other parties.

*John D. Kettle (kettle@comcast.net) has been an active member of the operations research/management science community since 1953. In addition to his work in negotiation, he has been examining ways to apply operations research to whole industries (rather than just individual companies). In his work on computerized third parties, the author is particularly indebted to professors Howard Raiffa, Steven Brams and Melvin Shakun.*

## MORE ABOUT RIGA'S RELIABILITY SCHOOL<sup>2</sup>

Ilya Gertsbakh

e-mail: [elyager@bezeqint.net](mailto:elyager@bezeqint.net)

Most outstanding features of Riga's Reliability School were its applied orientation and stress on real-life data statistical analysis. A very important work was the monograph of Kh. B. Kordonsky and I. Gertsbakh, *Models of Failure*, published by *Sovietskoe Radio* (1966) in the Engineering Science Library series under B. V. Gnedenko editorship. It was translated later into English (1969) and Polish (1970).

This book investigates the connection between the lifetime distribution and failure model based on wear (fatigue) damage accumulation process. It stressed the necessity to analyze statistically the wear processes. Besides, *Models of Failure* presented a rather simple estimation approach of the parameters for a large family of lifetime distributions, and the use of probabilistic paper. (Normal, Lognormal, Gnedenko-Weibull).

Well ahead of time was Kordonsky's joint paper with Artamanovsky (for more details see *Kh. Kordonsky: Recollections and Short Review of Scientific Results* by I. Gertsbakh in No 1, 2006, of this journal).

Kh. Kordonsky's Ph.D. students (A.M. Andronov, I. Gertsbakh, Yu.M. Paramonov, P.Ya. Rozenblit) made important contributions to the Statistical Reliability Theory.

Below is a concise list of their most important publications related to the period 1970-1988 (in alphabetical order).

### A.M. Andronov:

- [1] Andronov A.M. (1970). On some generalization of Erlang's formulas. *Engrg. Cybern.*, **6**, 93 - 100.
- [2] Andronov A.M. (1971). Generalised reliability model with accumulation of damages. *Engrg. Cybern.*, **4**, 67 - 75.  
*For the first time a reliability model with accumulation of damages has been considered that later was rediscovered repeatedly.*
- [3]. Andronov A.M. and I. Gertsbakh. (1972). Optimum Maintenance in a Certain Model of accumulation of damages. *Engrg. Cybern.*, **10(5)**, 620 - 628.
- [4]. Andronov A.M., Kordonsky Kh.B., Rosenblit P.Y. (1972). Applications of unbiased estimate's theory to queuing problems. *Engrg. Cybern.*, **2**, 60 - 68.  
*It was the first paper that used nonbiased estimate's theory for statistical problems in queuing and reliability theory.*
- [5]. Andronov A.M. (1972). Load estimate of queuing systems with infinite numbers of servers. *Problems of Information Transmission*, **2**, 75 - 83.
- [6]. Andronov A.M., Rosenblit P.Y. (1972). Statistics of semi-Markov birth-death processes with applications to analysis of queueing systems. *Engrg. Cybern.*, **3**, 113 - 120.

<sup>2</sup> This is additional information to the paper by Igor Ushakov "IS RELIABILITY THEORY STILL ALIVE?" delivered by well-known reliability specialist Ilya Gertsbakh.

[5,6] show how to apply regenerative approach to statistical problem's solving of queuing and reliability models.

[7]. Andronov A.M. et al.. (1974). *Operational Reliability and Technical Maintenance of Aircraft*. Transport, Moscow, Russia, - 304 p. (In Russian.)

*This book was the first manual for aviation engineers that described how to analyse statistical data on aircraft reliability.*

### **I. Gertsbakh**

[18] I. Gertsbakh, *Models of Preventive Maintenance, North Holland*, 1977.

*An extended translation of Russian Modeli Profilaktiki (1969), a systematic and unified approach to a wide range of preventive maintenance problems.*

### **Yu. M. Paramonov**

[12] Yu.M. Paramonov, G.P. Mussonov. Probability boundary for guaranteed forecast. - *Economics and Math. Methods*, 1983, **5**, pp.922-924 (in Russian)

[13] Yu.M. Paramonov et al. Safe life at given reliability. In: "Reliability of Automatic System and Its Items", Riga: *Zinatne Press*, 1976, pp.3-12. (in Russian)

[14] Yu.M. Paramonov. Bayesian risk in two cases of sequential analysis. - *Probability Theory and Its Applications*, 1970, **2**, pp.364-370

[15] Yu.M. Paramonov. Unbiased quasi-bayesian estimation, - *Probability Theory and Its Applications*, 1977, **2**, pp.372-380

[16] Yu. M. Paramonov, *Applications of Mathematical Statistics to the Aircraft Fatigue Life*, Riga, *Zinatne*, 1992, 248 p. (in Russian)

### **P. Y. Rosenblit**

[8] Rozenblit, P, Ya. Statistical Estimation of Reliability and Efficiency Characteristics of Complex Systems, *Zinatne*, 275 p., Riga, 1979 (in Russian)

*An important and original monograph. Presents unique results on unbiased estimation of queuing and reliability system parameters, density functions, and distribution moments. Summarizes and generalizes the results of [4], [9],[10], [11].*

[9] Rozenblit, P. Unbiased estimation of some queuing system parameters, *Eng. Cybernetics*, 1972, **No 4**, 108-113.

[10] –P.Y. Rozenblit, A problem of estimating optimal maintenance policies, *Eng. Cybernetics*, 1963, **No 5**, 48-52.

[11] P.Ya. Rozenblit, Unbiased Estimation of reliability characteristics described by renewal processes, *Automatika i vychslit. Tehnika*, 1977, **3**, 36-43 (in Russian).

In the late 80-ies Kh. B. Kordonsky initiated the study of a very fundamental problem in Reliability Theory- the choice of the "best" time scale for reliability analysis and monitoring. In the period 1990-1999, he published on this issue (in coauthorship with I. Gertsbakh) a series of eight papers. For more detailed exposition and full list of references see the above mentioned "Recollections".







# НАДЁЖНОСТЬ:

вопросы теории и практики

том 2, № 2, июнь, 2007 г.

Электронный журнал  
Международной группы по теории надежности

# НАДЁЖНОСТЬ: ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ

№ 2 (Том 2)  
Июнь 2007

ISSN 1932-2321

Сан-Диего  
2007



ISSN 1932-2321

© "Reliability: Theory & Applications", 2007

© И.А.Ушаков, 2007

© А.В.Бочков, 2007

<http://www.gnedenko-forum.org/Journal/index.htm>

**Все права защищены**

Ссылка на журнал "Надёжность: вопросы теории и практики"  
при использовании опубликованных материалов обязательна

## Редакционная коллегия



**Главный редактор**  
Игорь Ушаков  
[igorushakov@gmail.com](mailto:igorushakov@gmail.com)



**Ответственный секретарь**  
Александр Бочков  
[a\\_bochkov@yahoo.com](mailto:a_bochkov@yahoo.com)



**Ответственный редактор**  
Юрий Беляев  
[yuri.belyaev@matstat.umu.se](mailto:yuri.belyaev@matstat.umu.se)



**Ответственный редактор**  
Илья Герцбах  
[elyager@bezeqint.net](mailto:elyager@bezeqint.net)



**Ответственный редактор**  
Игорь Коваленко  
[kovigo@yandex.ru](mailto:kovigo@yandex.ru)



**Ответственный редактор**  
Михаил Никулин  
[M.S.Nikouline@sm.u-bordeaux2.fr](mailto:M.S.Nikouline@sm.u-bordeaux2.fr)



**Английский  
технический редактор**  
Кристина Ушакова  
[kudesigns@yahoo.com](mailto:kudesigns@yahoo.com)

## Общая информация

Журнал "Надежность: вопросы теории и практики" принимает статьи, обзоры, рецензии, воспоминания, информационные и библиографические материалы по теоретическим и прикладным аспектам надежности и управления качеством, безопасности, живучести и техническому обслуживанию.

Статьи теоретического характера должны непременно содержать новые постановки задач, указание возможности практического применения и не должны быть перегружены формальными выкладками.

Приоритет будет отдаваться статьям, отражающим практическое применение методов.

Требования к оформлению статей: статьи должны быть представлены в формате MSWord на английском языке, желательно сопроводить их версией на русском языке, поскольку (по крайней мере, в настоящее время) большинство читателей журнала русскоязычные.

Объем статей (вместе с иллюстрациями) не должен превышать 15 стр. (шрифт Times New Roman - 12 пт - через 1,5 интервала).

Публикация в журнале приравнивается к публикации в международном научно-техническом журнале.

Статьи, рекомендованные членами редколлегии, на рецензирование не направляются.

Редакция оставляет за собой право изменить название статьи, а также провести редакторскую правку.

За авторами сохраняется полное право использовать свои материалы после публикации в журнале по своему усмотрению (посылать их в другие издания, представлять на конференции и т.п.)

Статьи направлять по e-mail

Главному редактору,  
Игорю Ушакову  
[iushakov2000@yahoo.com](mailto:iushakov2000@yahoo.com)

или

Ответственному секретарю,  
Александрю Бочкову  
[a\\_bochkov@yahoo.com](mailto:a_bochkov@yahoo.com)

## Содержание

Мы приносим свои извинения читателям за то, что ряд статей английской версии журнала не переведен на русский язык

### English

---

WORKSHOP ON ASYMPTOTIC STATISTICS AND ITS APPLICATIONS TO SURVIVAL ANALYSIS AND RELIABILITY IN HONOR OF ILDAR IBRAGIMOV .....	7
<b>IEEE 2007</b>	
INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRIAL ENGINEERING AND ENGINEERING MANAGEMENT, SINGAPORE, DECEMBER 2-5, 2007 .....	8
THE 7TH INTERNATIONAL CONFERENCE RELIABILITY AND STATISTICS IN TRANSPORTATION AND COMMUNICATION (RELSTAT'07) 24-27 OCTOBER 2007. RIGA, LATVIA .....	9
<b>B. Dimitrov, G. Hayrapetyan, and P. Stanchev</b> AGING AND LONGEVITY CONTROL OF BIOLOGICAL SYSTEMS VIA DRUGS – A RELIABILITY MODEL .....	10
<b>A. Krishnamorthy, Vishwanath C. Narayanan, T. G. Deepak</b> MAXIMIZATION OF RELIABILITY OF A K-OUT-OF-N SYSTEM WITH REPAIR BY A FACILITY ATTENDING EXTERNAL CUSTOMERS IN A RETRIAL QUEUE .....	21
<b>V.M. Abramov</b> CONFIDENCE INTERVALS ASSOCIATED WITH PERFORMANCE ANALYSIS OF SYMMETRIC LARGE CLOSED CLIENT/SERVER COMPUTER NETWORKS .....	32
<b>G.Sh. Tsitsiashvili</b> NARROW PLACES IN LOGICAL SYSTEMS WITH ANRELIABLE ELEMENTS .....	43
<b>V.Gh. VODĂ</b> A NEW GENERALIZATION OF RAYLEIGH DISTRIBUTION .....	47
<b>G.A. Fedotova, N.I. Voropai</b> OPTIMISATION OF RELIABILITY OF POWER SUPPLY TO CONSUMERS .....	57
<b>A.V. Bochkov, I.A. Ushakov</b> SENSITIVITY ANALYSIS OF OPTIMAL COUNTER-TERRORISM RESOURCES ALLOCATION UNDER SUBJECTIVE EXPERT ESTIMATES .....	69
<b>J. Kettelle</b> WHEN THREE'S NOT A CROWD .....	77
<b>I.B. Gertsbakh</b> MORE ABOUT RIGA'S RELIABILITY SCHOOL .....	86

**Russian**

---

<b>В.М. Абрамов</b> ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С АНАЛИЗОМ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИММЕТРИЧНЫХ БОЛЬШИХ ЗАМКНУТЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ.....	96
<b>Ю.К.Беляев</b> ВОСПОМИНАНИЯ О БОРИСЕ ВЛАДИМИРОВИЧЕ ГНЕДЕНКО.....	105
<b>Г.Ш. Цициашвили</b> УЗКИЕ МЕСТА В СИСТЕМЕ С НЕНАДЕЖНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ .....	112
<b>Г.А. Федотова, Н.И. Воропай</b> ОПТИМИЗАЦИЯ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ.....	117
<b>Г.А. Федотова</b> ОТЗЫВ НА ПУБЛИКАЦИЮ В ЖУРНАЛЕ «RELIABILITY: THEORY & APPLICATIONS» РЕФЕРАТИВНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ОБЗОРА В. ШЕРА.....	131
<b>Г. Ф. Ковалев</b> О ФЕДЕРАЛЬНОМ ЗАКОНЕ «О ТЕХНИЧЕСКОМ РЕГУЛИРОВАНИИ» И ПРОБЛЕМЕ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	132
<b>Журнал рекомендует:</b> КРУИЗНО-ПРОГУЛОЧНЫЙ КАТЕР «МИРАЖ» (BOAT "MIRAGE").....	134

# ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С АНАЛИЗОМ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИММЕТРИЧНЫХ БОЛЬШИХ ЗАМКНУТЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Вячеслав Абрамов

School of Mathematical Sciences, Monash University,  
Clayton Campus, Building 28, Level 4, Wellington road, Victoria 3800, Australia.  
e-mail: [vyacheslav.abramov@sci.monash.edu.au](mailto:vyacheslav.abramov@sci.monash.edu.au)

## Аннотация

В работе изучаются замкнутые сети обслуживания, состоящие из станции-сервера и  $k$  идентичных станций-клиентов. Станции-клиенты являются ненадежными. Время жизни станции-клиента не зависит от времен жизни других станций-клиентов и имеет одно и то же распределение  $G(x)$  для всех таких станций. Станция-сервер – это бесконечно-канальная система массового обслуживания. Станции-клиенты являются одноканальными системами массового обслуживания с автономным обслуживанием, т. е. каждая станция-клиент принимает на обслуживание требования в некоторые фиксированные моменты времени, порожденные стационарной (в узком смысле) и эргодичной последовательностью случайных величин. Общее число требований в системе равно  $N$ . Длительности обслуживания на станции-сервере являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром  $\lambda$ . Средние времена обслуживания на каждой станции-клиенте  $(N\mu)^{-1}$ . После завершения обслуживания на станции-сервере требование направляется равновероятно на одну из доступных (т. е. работоспособных) станций-клиентов, и будучи там обслужена, оно возвращается на станцию-сервер. Параметр  $N$  предполагается большим. Цель статьи – изучение перегруженных станций-клиентов и нахождение доверительных интервалов, связанных с достижением величины очереди некоторого высокого уровня, пропорционального величине  $N$ .

## 1. Введение

Рассматривается большая замкнутая сеть массового обслуживания состоящая из станции-сервера (бесконечно-канальной системы массового обслуживания) и  $k$  идентичных станций-клиентов (одноканальных систем обслуживания). Общее число требований в сети равно  $N$ . Величина  $N$  предполагается большой. Процесс обслуживания требований на станциях-клиентах предполагается автономным. Системы с автономным обслуживанием были введены Боровковым [6, 7]. Формальное определение этих систем в простейшем случае одиночных поступлений и обслуживаний требований является следующим. Пусть  $A(t)$  - точечный процесс поступления требований,  $S(t)$  - точечный процесс обслуживания. Обозначим  $Q(t)$  число требований в системе в момент  $t$  и предположим, что все эти процессы начинаются в нуле ( $A(0) = S(0) = Q(0) = 0$ ). Тогда, автономное обслуживание определяется уравнением:



$$Q(t) = A(t) - \int_0^{\infty} I\{Q(s-) > 0\} dS(t).$$

Системы с автономным обслуживанием изучались во многих работах (см. [1, 3, 4, 8, 9, 10]). В настоящей работе изучается замкнутая сеть типа client/server (см. Рисунок 1)

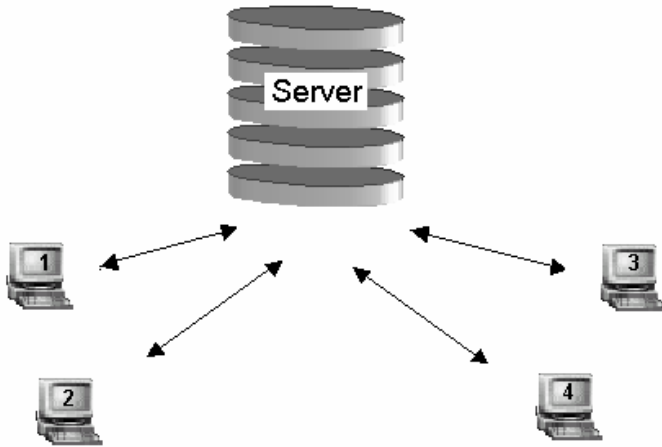


Рисунок 1. Пример сети типа client/server

Процесс поступления требований со станции-сервера на  $i$ -ю станцию-клиент обозначается  $A_{i,N}(t)$ . Время обслуживания каждого требования на станции-сервере распределено экспоненциально с параметром  $\lambda$ . Поэтому, скорость поступления на станции-клиенты зависит от числа требований, имеющих на станции-сервере. Если в момент времени  $t$  на станции-сервере имеется  $N_t$  требований,

то скорость выхода требований со станции-сервера равна  $\lambda N_t$ . Всего имеется  $k$  станций-клиентов, и каждая из них является ненадежной. Продолжительность работы до выхода из строя для каждой станции-клиента не зависит от продолжительностей работы других таких станции и имеет функцию распределения  $G(x)$ .

Все станции-клиенты предполагаются идентичными, и требования, отправляемые со станции-сервера, "выбирают" каждую станцию-клиент с равной вероятностью. (По этой причине сеть называется симметричной.) Поэтому, если имеется  $l$  работоспособных станций-клиентов в момент  $t$ , то скорость поступления к каждой из этих станций равна  $\lambda N_t / l$ .

Возможные моменты выхода требований из  $j$ -й станции-клиента ( $j = 1, 2, \dots, k$ )  $\xi_{j,N,1}, \xi_{j,N,1} + \xi_{j,N,2}, \xi_{j,N,1} + \xi_{j,N,2} + \xi_{j,N,3}, \dots$ , где каждая из последовательностей  $\xi_{j,N,1}, \xi_{j,N,2}, \dots$  является стационарной (в узком смысле) и эргодичной последовательностью случайных величин ( $N$  является параметром серии). Соответствующий точечный процесс, связанный с выходом требований с  $j$ -й станции-клиента, обозначается

$$S_{j,N}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I\left(\sum_{l=1}^i \xi_{j,N,l} \leq t\right),$$

и удовлетворяет условию

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{j,N}(t)}{t} = \mu N\right) = 1.$$

Тогда соотношения между параметрами  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $k$  предполагаются следующими:

$$(1.1) \quad \frac{\lambda}{k\mu} < 1,$$

и

$$(1.2) \quad \frac{\lambda}{\mu} > 1.$$

Условие (1.1) означает, что в начальный момент времени, когда все станции-клиенты работоспособны, скорость обслуживания на каждой станции-клиенте выше скорости поступления требований на эти станции. В свою очередь условие (1.2) означает, что после выхода из строя нескольких станций клиентов, скорость обслуживания на станциях-клиентах становятся ниже скоростей поступления требований на эти станции. Обозначим:

$$l_0 = \max\left(l: \frac{\lambda}{l\mu} > 1\right).$$

наибольшее число работоспособных станций, когда скорость обслуживания на станциях-клиентах ниже скоростей поступления требований. Тогда для всех  $l \leq l_0$  это также будет иметь место.

Длина очереди в момент времени  $t$  на  $j$ -й станции-клиенте определяется из уравнения

$$Q_{j,N}(t) = A_{j,N}(t) - \int_0^t I(Q_{j,N}(s-) > 0) \mu S_{j,N}(s),$$

где  $A_{j,N}(t)$  - это процесс поступления на  $j$ -ю станцию-клиент.

Пусть  $\alpha < 1$  некоторое положительное число. Будем говорить, что сеть обслуживания под угрозой риска, если общее число требований в станциях-клиентах превышает величину  $\alpha N$ . Предположим, что в начальный момент времени все требования находятся на станции-сервере. Цель статьи – найти доверительный интервал  $[0, \theta)$  такой, что с данной вероятностью  $P$  (например,  $P = 0.95$ ) сеть не будет в состоянии риска в течении этого интервала. Для сетей с произвольным числом станций-клиентов такая задача является сложной, потому, что поведение очередей в перегруженной сети является многовариантным. (См. следующий раздел, где приведены явные результаты.) Поэтому, в настоящей статье мы изучаем эту задачу только для двух станций-клиентов.

Большая замкнутая перегруженная сеть массового обслуживания изучалась во многих работах. Марковская перегруженная сеть анализировалась в [11]. В [1, 2, 3] результаты [11]

были обобщены на немарковские сети. В частности, в [1] изучался вариант сети с автономным механизмом обслуживания на станциях-клиентах. Результаты [1] затем были распространены на сети с двумя типами станций и многими классами требований в [4]. Однако, вклад всех упомянутых статей является чисто теоретическим. Во всех этих статьях анализ перегруженных сетей проводится в частном случае, когда имеется только одна перегруженная станция-клиент и когда в начальный момент времени все требования находятся на станции-сервере.

Детальный анализ перегруженных сетей, включающий все возможные случаи перегруженных станций-клиентов, а также произвольные начальные условия, касающиеся числа требований на станциях-клиентах в начальный момент времени, сделан в [5]. Результаты [5] являются многообещающими для решения многих прикладных задач. В частности, анализ [5] посвящен замкнутым сетям обслуживания в полумарковской среде, требующий изучения этих сетей при наиболее общих предположениях. Асимптотическое решение проблемы настоящей статьи, когда  $N$  неограниченно возрастает, основано на результатах статьи [5].

Следует отметить, что надежность самих компьютерных сетей изучалась во многих статьях. Мы цитируем книгу [12], где читатель может найти детальную информацию, относящуюся к данному вопросу. Доверительные интервалы, изучаемые в настоящей статье имеют отношение к надежности информации, которая зависит от надежности элементов сети.

Статья мотивирована важными практическими задачами в телекоммуникационных сетях. Поддержка и обмен информацией являются весьма дорогими и часто превышают стоимость самого оборудования. С другой стороны, надежная поддержка информации является производной от высоконадежного оборудования и непосредственно зависит от этой надежности. Особый цикл практических проблем относится к поддержке больших баз данных. Тогда "требование" ассоциируется с единицей информации (записью) в базе данных. "Станция-клиент" ассоциируется с пользователем базы данных. "Неисправная станция-клиент" ассоциируется с отсутствием связи или очень низкой скоростью обмена. Низкая скорость обмена на некоторых станциях становится причиной перегруженности сети и может привести к разрушению базы данных.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 напоминаются некоторые результаты [5], необходимые для цели настоящей работы, которые затем адаптированы для случая симметричной сети, рассмотренной здесь. В разделе 3 мы выводим соотношения для предельных распределений нормализованных длин очередей на исправных станциях-клиентах. В разделе 4 мы устанавливаем результаты для доверительных интервалов в частном случае двух станций клиентов. В разделе 5 приводится простой численный пример. Раздел 6 является заключением.

## 2. Перегруженные станции-клиенты

В этом разделе мы напоминаем некоторые результаты анализа перегруженных станций-клиентов [5], соответствующие случаям изучаемым в настоящей статье. Мы начинаем с элементарного случая  $l$  эквивалентных перегруженных станций-клиентов, т. е. со случая, когда в начальный момент времени  $t = 0$  имеется точно  $l$  перегруженных станций-клиентов. Для простоты предположим, что все эти  $l$  станций являются абсолютно надежными, и в начальный момент времени  $t = 0$  имеется  $(1 - \beta)N$  требований на станции-клиенте,  $0 < \beta \leq 1$ , и остальные

$\beta N$  требований распределены между  $l$  станциями-клиентами. Так как сеть является симметричной, то предположение, что имеется примерно  $\beta N / l$  требований на каждой станции-клиенте в момент  $t = 0$ , в соответствии с законом больших чисел является резонным. Предположение, что станции-клиенты являются перегруженными, означает, что  $\lambda(1 - \beta) > l\mu$ .

Результат об асимптотическом поведении нормированных длин очередей следует из Предложения 5.3 [5], относящихся к общему случаю несимметрической перегруженной сети с произвольными начальными длинами очередей. Напомним этот результат.

**Лемма 2.1.** *Предположим, что все станции-клиенты являются перегруженными в начальный момент времени, и начальные длины очередей асимптотически равны  $N\beta_1, N\beta_2, \dots, N\beta_k$  соответственно ( $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k \leq 1$ ), когда  $N \rightarrow \infty$ . Тогда нормированная длина очереди на  $j$ -й станции-клиенте в пределе, когда  $N \rightarrow \infty$ , определяется как*

$$(2.1) \quad q_j(t) = \beta_j + \left(1 - \sum_{j=1}^k \beta_j\right) \left( [\lambda_j(0) - \mu_j]t - \lambda_j(0) \int_0^t r(s) ds \right),$$

$$(2.2) \quad r(t) = \left( \frac{\sum_{j=1}^k (\lambda_j(0) - \mu_j)}{\sum_{j=1}^k \lambda_j(0)} \right) \left( 1 - \exp \left[ -t \sum_{j=1}^k \lambda_j(0) \right] \right),$$

где  $q_j(t)$  обозначает процесс нормированной длины очереди на  $j$ -й станции-клиенте в пределе, т. е.  $q_j(t)$  - это предел по вероятности  $Q_{j,N}(t) / N$  при  $N$  стремящемся к бесконечности.

В обозначениях этой леммы  $\lambda_j(0)N$  - это мгновенная скорость поступления требований на  $j$ -ю станцию-клиент в момент времени  $t = 0$ , и  $\mu_j N$  - это скорость обслуживания на  $j$ -й станции-клиенте. В нашем случае число станций-клиентов равно  $l$ , мгновенная скорость поступления требований на каждую станцию-клиент равно  $(1 - \beta)\lambda N / l$  и скорость обслуживания равна  $\mu N$  и все  $q_j(t)$  равны, т. е.  $q_j(t) \equiv g(t)$  для всех  $j = 1, 2, \dots, l$ . Поэтому, в нашем случае из этой Леммы 2.1 мы имеем следующее утверждение.

**Предложение 3.2.** *Имеем:*

$$(2.3) \quad g(t) = \frac{\beta}{l} + (1 - \beta) \left( \left[ \frac{(1 - \beta)\lambda}{l} - \mu \right] t - \frac{(1 - \beta)\lambda}{l} \int_0^t r(s) ds \right),$$

где

$$(2.4) \quad r(t) = \left( 1 - \frac{\mu l}{(1 - \beta)\lambda} \right) \left( 1 - e^{-(1 - \beta)\lambda t} \right)$$

### 3. Предельная нормированная накопленная длина очереди

В этом разделе мы изучаем предельную (при  $N \rightarrow \infty$ ) нормированную накопленную длину очереди на станциях-клиентах. Она обозначена  $q(t)$ . В начальный момент времени  $t = 0$  имеется  $k$  работоспособных станций-клиентов. Пусть  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  - это моменты отказов,  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k$ . Эти моменты отказов связаны с поведением сети обслуживания с интенсивностями, зависящими от времени, которая может рассматриваться как сеть в полумарковской среде. Поэтому, мы можем применить Теорему 5.4 [5].

Случайный интервал времени  $[0, \tau_k]$  является временем жизни всей сети. Поэтому процесс  $q(t)$  должен рассматриваться в течение этого интервала времени  $[0, \tau_k]$ . Напомним, что  $l_0 = \max(l : \lambda / (l\mu) > 1)$ . Поэтому, согласно Теореме 5.4 [5] на интервале  $[0, \tau_{k-l_0})$  мы имеем  $q(t) = 0$ . Далее, на случайном интервале  $[\tau_{k-l_0}, \tau_{k-l_0+1})$  уравнение для  $q(t)$  является следующим

$$(3.1) \quad q(t) = (\lambda - l_0\mu)(t - \tau_{k-l_0}) - \lambda \int_{\tau_{k-l_0}}^t r(s - \tau_{k-l_0}) ds,$$

где  $r(t)$  задано соотношением (2.4). Уравнение (3.1) следует из (2.1) и (2.2) следующим образом. Полагая  $\beta = 0$ ,  $l = l_0$  и заменяя  $t$  разностью  $(t - \tau_{k-l_0})$  из (2.1) получаем:

$$g(t) = \left( \frac{\lambda}{l_0} - \mu \right) (t - \tau_{k-l_0}) - \frac{\lambda}{l_0} \int_{\tau_{k-l_0}}^t r(s - \tau_{k-l_0}) ds.$$

Следовательно, принимая во внимание, что  $q(t) = l_0 g(t)$  приходим к (3.1).

Для следующего интервала  $[\tau_{k-l_0+1}, \tau_{k-l_0+2})$ ,  $l_0 > 1$ , мы имеем уравнение:

$$(3.2) \quad g(t) = \frac{q(\tau_{k-l_0+1})}{l_0 - 1} + [1 - q(\tau_{k-l_0+1})] \left\{ \frac{[1 - q(\tau_{k-l_0+1})]\lambda}{l_0 - 1} - \mu \right\} (t - \tau_{k-l_0+1}) - \frac{[1 - q(\tau_{k-l_0+1})]\lambda}{l_0 - 1} \int_{\tau_{k-l_0+1}}^t r(s - \tau_{k-l_0+1}) ds \}.$$

Поэтому, на этом интервале  $[\tau_{k-l_0+1}, \tau_{k-l_0+2})$

$$(3.3) \quad q(t) = q(\tau_{k-l_0+1}) + [1 - q(\tau_{k-l_0+1})] \left\{ ([1 - q(\tau_{k-l_0+1})]\lambda - \mu(l_0 - 1))(t - \tau_{k-l_0+1}) - [1 - q(\tau_{k-l_0+1})]\lambda \int_{\tau_{k-l_0+1}}^t r(s - \tau_{k-l_0+1}) ds \right\}.$$

Для произвольного интервала  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = k - l_0, k - l_0 + 1, \dots, k - 1$ , имеем:

$$q(t) = q(\tau_i) + [1 - q(\tau_i)] \{ ([1 - q(\tau_i)]\lambda - \mu(k - i))(t - \tau_i) - [1 - q(\tau_i)]\lambda \int_{\tau_i}^t r(s - \tau_i) ds \}.$$

В крайней точке  $\tau_k$  мы полагаем  $q(t) = 1$ .

#### 4. Доверительные интервалы

Соотношение для предельной нормированной накопленной величины очереди является очень сложным. Поэтому, в этом разделе мы получаем доверительные интервалы в частном случае, когда имеются только две станции-клиенты. В этом случае только используется соотношение (3.1), которое в случае двух станций-клиентов выглядит следующим образом:

$$(4.1) \quad q(t) = (\lambda - \mu)(t - \tau_1) - \lambda \int_{\tau_1}^t r(s - \tau_1) ds,$$

где

$$(4.2) \quad r(s) = \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) (1 - e^{-\lambda s}).$$

Доверительный интервал состоит из двух подынтервалов. Первый подынтервал - это  $[0, \tau_1)$ , где предельная нормированная накопленная очередь равна нулю. Второй подынтервал - это  $[\tau_1, \theta]$ , где  $\theta$  - это некоторая точка, где  $q(\theta) \leq \alpha$ . Уравнения (4.1) и (4.2) определены для  $t < \tau_2$ , где  $\tau_2$  - это случайная точка отказа второй станции-клиента.

Пусть  $\theta^*$  - это точка, где  $q(\theta^*) = \alpha$ . Точка  $\theta^*$  - это случайная точка, зависящая от  $\tau_1$ . Однако, при предположении, что та или иная станция-клиент является активной, длина интервала  $[\tau_1, \theta^*]$  фиксированна и однозначно определена из (4.1) и (4.2).

Найдем распределение процесса  $q(t)$ . Ясно, что вероятность того, что  $q(t) = 0$  совпадает с вероятностью того, что длина интервала  $[0, \tau_1)$  более  $t$ . Поэтому,

$$(4.3) \quad P(q(t) = 0) = [1 - G(t)]^2.$$

Далее,

$$(4.4) \quad P(q(t) \leq \gamma < 1) = [1 - G(t)][1 - G(t - t_\gamma)],$$

где  $t_\gamma$  - это такое значение  $t$  при котором

$$(4.5) \quad (\lambda - \mu)t - \lambda \int_0^t r(s) ds = \gamma.$$

Уравнения (4.3) и (4.4) легко следуют из элементарных фактов теории вероятностей.

Тогда, вероятность того, что предельная нормированная накопленная длина очереди достигнет уровня  $\gamma$  до того как попадет в 1 равна

$$\frac{\int_0^\infty [1 - G(t)][1 - G(t - t_\gamma)] dt}{\int_0^\infty [1 - G(t - t_\gamma)]^2 dt}.$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое  $\gamma \leq \alpha$ , что

$$(4.6) \quad \frac{\int_0^\infty [1 - G(t)][1 - G(t - t_\gamma)] dt}{\int_0^\infty [1 - G(t - t_\gamma)]^2 dt} \geq P.$$

(4.6) – это неравенство потому, что точное равенство может иметь место при  $\gamma > \alpha$ , в то время как для  $\gamma \leq \alpha$  это должно быть неравенство (4.6).

## 5. Численный пример

Рассмотрим следующий пример. Пусть  $\lambda = 4$ ,  $\mu = 3$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $P = 0.95$ ,  $G(x) = 1 - e^{-2x}$ .

Из соотношения (4.6) имеем:

$$\frac{\int_0^\infty e^{-2(t-t_\gamma)} e^{-2t} dt}{\int_0^\infty e^{-4(t-t_\gamma)} dt} = e^{-2t_\gamma}.$$

Решение уравнения  $e^{-2t_\gamma} = 0.95$  приводит нас к  $t_\gamma = 0.025647$ . Из (4.5) получаем:

$$\gamma = \int_0^{t_\gamma} e^{-4t} dt = \int_0^{0.025647} e^{-4t} dt = 0.25 - 0.25e^{-0.102588} = 0.024375.$$

Полученная величина  $\gamma$  меньше, чем  $\alpha = 0.2$ , и следовательно значение  $\gamma = 0.024375$  - это требуемое значение для доверительного интервала.

## 6. Заключительные замечания

Мы нашли доверительные интервалы, связанные с достижением некоторого высокого уровня. Доверительные интервалы, найденные в статье, являются случайными. Они получены в терминах параметра  $\gamma$ , который является предельной величиной нормированной накопленной величины очереди, при которой вероятность того, что сеть массового обслуживания будет функционировать, является не меньшей, чем заданное значение  $P$ . Таким образом, стратегия состоит в наблюдении за процессом очереди до тех пор пока общее число требований в очередях не достигнет величины  $\gamma N$ . Как только эта величина будет превышена, нет достаточных гарантий, что система и/или информация будут доступны.

### Благодарность

Автор благодарит Australian Research Council (грант № DP0771338) за поддержку этого исследования.

### Литература

1. **V. M. Abramov**, 2000. A large closed queueing network with autonomous service and bottleneck. *Queueing Systems*, 35, 23-54.
2. **V. M. Abramov**, 2001. Some results for large closed queueing networks with and without bottleneck: Up- and down-crossings approach. *Queueing Systems*, 38, 149-184.
3. **V. M. Abramov**, 2004. A large closed queueing network containing two types of node and multiple customers classes: One bottleneck station. *Queueing Systems*, 48, 45-73.
4. **V. M. Abramov**, 2006. The effective bandwidth problem revisited. arXiv: math. 0604182.
5. **V. M. Abramov**, 2007. Large closed queueing networks in semi-Markov environment and their application. arXiv: math. 0612118.
6. **A. A. Borovkov**, 1976. *Stochastic Processes in Queueing Theory*. Springer-Verlag, Berlin.
7. **A. A. Borovkov**, 1984. *Asymptotic Methods in Queueing Theory*. John Wiley, New York.
8. **C. Fricker**, 1986. Etude d'une file GI/G/1 á service autonome (avec vacances du serveur). *Advances in Applied Probability*, 18, 283-286.
9. **C. Fricker**, 1987. Note sur un modele de file GI/G/1 á service autonome (avec vacances du serveur). *Advances in Applied Probability*, 19, 289-291.
10. **E. Gelenbe and R. Iasnogorodski**, 1980. A queue with server of walking type (autonomous service). *Ann. Inst. H. Poincare*, 16, 63-73.
11. **Ya. Kogan and R. Sh. Liptser**, 1993. Limit non-stationary behaviour of large closed queueing networks with bottlenecks. *Queueing Systems*, 14, 33-55.
12. **M. Xie, Y. S. Dai and K. L. Poh**, 2004. *Computer Systems Reliability: Models and Analysis*. Kluwer, Dordrecht.



## ВОСПОМИНАНИЯ О БОРИСЕ ВЛАДИМИРОВИЧЕ ГНЕДЕНКО

---

Юрий Беляев

e-mail: [yuri.belyaev@matstat.umu.se](mailto:yuri.belyaev@matstat.umu.se)

Борис Владимирович Гнеденко (01.01.1912 - 27.12.1995) известен как математик, получивший глубокие результаты в теории суммирования случайных величин и экстремальных распределений. Будучи первоклассным педагогом, он имел много учеников, ставших талантливыми учеными. Как исследователь он внес значительный вклад в развитие математических методов теории надежности и массового обслуживания. Это был искренний и принципиальный человек. В этих личных воспоминаниях мне хотелось бы показать почему около Б.В. всегда было много людей.

Осенью 1958 года в Ереване состоялась Всесоюзная конференция по теории вероятностей и ее приложениям. Наряду с другими аспирантами Математического института АН СССР (МИАН) им. В.А. Стеклова меня командировали для участия в этой конференции. В программу было включено выступление Б.В. Гнеденко, посвященное задачам теории массового обслуживания. В это время я параллельно с аспирантурой подрабатывал на полставки в теоретическом отделе крупного исследовательского института и уже был знаком с разнообразными математическими моделями теории массового обслуживания и надежности, имевшими непосредственное отношение к реальным приложениям. В докладе Б.В. на меня произвело большое впечатление, что многое из сказанного им имело непосредственное отношение к интересовавшим меня прикладным задачам. Запомнились удивительная прозрачность и четкость постановок математических задач и возможных подходов к их решению. Тогда же мне удалось поговорить с Б.В. о некоторых из интересовавших меня задач, связанных с обслуживанием случайно поступающих заявок. Эта беседа заметно укрепила мою уверенность в том что "мои" задачи действительно интересны и потраченное на их решение время не будет напрасным.

В следующем 1959 году я получил возможность поехать в Киев для доклада на семинаре Математического института АН УССР, в котором отделом теории вероятностей руководил Б.В. По совету А.Н. Колмогорова (мой научный руководитель) я подготовил два различных доклада. Один доклад был связан с задачами теории массового обслуживания, а второй с полученными результатами по анализу свойств траекторий гауссовских случайных процессов. Тема второго доклада была существенной частью моей диссертации. На заседаниях семинара было много молодых людей, непосредственно связанных с Б.В. Доброжелательность и внимательность Б.В. как бы наследовались участниками его семинара. Тогда же я познакомился с Т.П. Марьяновичем, С.М. Броди и И.Н. Коваленко. Было очевидно, что Б.В. обладает способностью формировать активно работающий коллектив исследователей-единомышленников. После одного из моих докладов Б.В. пригласил меня вечером к себе в гости. Он жил в центре Киева на улице Прорезной (тогда улица Свердлова), спускающейся от Золотых ворот к Крещатику. Запомнилась уютная квартира, неяркий свет лампочек под абажурами, ворчание собаки на незнакомого ей посетителя, звуки веселой музыки (которую, наверное, слушали двое мальчишек — Дима и Алик — сыновья Б.В.) и легкий ужин, который

предложила Наталия Константиновна, жена Б.В. Запомнился чай с вкусным "Киевским" тортом, который я попробовал впервые. Гостеприимство и интерес Б.В. к моим исследованиям положили естественное начало последующего моего сотрудничества и даже можно сказать дружбы с Б.В. Но это уже относится ко времени после переезда Б.В. в Москву. Интересным и полезным было продолжение контактов с его талантливым учеником Игорем Николаевичем Коваленко. Оказалось, что у нас много похожих задач теории массового обслуживания, возникших из реальных приложений.

В конце 1959 года я был зачислен младшим научным сотрудником МИАН и тогда же завершил подготовку диссертации по свойствам траекторий гауссовских случайных процессов. А.Н. Колмогоров предложил выбрать оппонентами Б.В. и Р.Л. Добрушина. Защита диссертации прошла успешно в начале 1960 года. В течение 1959 года А.Н. Колмогоров несколько раз рассказывал мне о планах создания Института математической статистики и о связанном с этим возможным переездом Б.В. в Москву. После защиты он предложил мне и даже убеждал меня участвовать в создании этого научного учреждения, оказывая ему и Б.В. организационную помощь. Похожее предложение получил и А.Н. Ширяев. Я колебался, так как организационная работа была бы за счет сокращения собственной научной работы. Несомненно, что на мое согласие на переход в МГУ существенно повлияли и мои встречи с Б.В. Мой переход в МГУ состоялся в августе 1960 года.



Семинар в лабораторном корпусе

В августе 1960 года Б.В. переехал с семьей в Москву на работу в Московский университет в должности профессора кафедры теории вероятностей. Будучи очень активным человеком Б.В. быстро включился во многие виды деятельности не только в МГУ, но и вне его. Это и участие в работе редколлегии ряда журналов, и вопросы преподавания математики в ВУЗах, и активная работа по созданию кабинета надежности при Политехническом музее. В

последнем случае он тесно сотрудничал с видным инженером, энтузиастом пропаганды методов надежности и качества Яковом Михайловичем Сориним.

К моменту переезда Б.В. в Москву у А.Н. Колмогорова не было четко завершенной реальной программы создания Института статистических методов. Варианты и масштабы этого будущего научного учреждения менялись, то в сторону уменьшения института до лаборатории, то опять появлялись варианты по созданию внушительного научного центра. Однажды Андрей Николаевич сказал мне: "Юра, уж так получилось, что Б.В. оказался вовлеченным в работу на кафедре и там полностью загружен. Но я Вас прошу продолжать помогать мне в создании Института математических методов статистики. Ваня (*Иван Георгиевич Петровский* — ректор МГУ) полностью поддерживает это начинание и окажет необходимую помощь". Эту фразу я привожу дословно, так как хорошо ее запомнил. В итоге мои надежды на участие Б.В. в создании в рамках МГУ научного института для развития математических методов статистики и их приложений, о котором мне говорил А.Н. Колмогоров, не оправдались. Здесь мне долгое время пришлось быть единственным помощником Андрея Николаевича. Эта деятельность отнимала много времени (заседания, обсуждение планов строительства института и т.п.). Основная же деятельность Б.В. была связана с работой кафедры теории вероятностей, чтением лекций, руководством аспирантами и вопросами преподавания на механико-математическом факультете.

А вот ожидания сотрудничества в исследовании практически интересных задач теории массового обслуживания и надежности в рамках семинаров, совместных с Б.В., оправдались полностью. Задачи теории массового обслуживания и близкие по математическим методам задачи математической теории надежности были актуальны для исследовательских работ во многих научно-технических институтах Москвы, Ленинграда и других городов. На механико-математическом факультете под руководством Б.В. был организован семинар по задачам теории массового обслуживания и теории надежности. Новость о начале работы этого семинара необыкновенно быстро распространилась в среде инженеров-исследователей многих институтов. Уже на первом заседании семинара пришлось менять обычную аудиторию на потоковую (кажется 1610, но может быть 1624), так как число участников было заметно более 100 человек. Я активно помогал Б.В. в руководстве этим семинаром. В это время от В.А. Каштанова я узнал, что очень близкие задачи интересуют А.Д. Соловьева, которого В.А. считал (а так оно было на самом деле) непревзойденным виртуозом асимптотических методов математического анализа. А.Д. Соловьев согласился участвовать в организации работы семинара по задачам теории массового обслуживания и теории надежности. Так и образовалась тройка руководителей этого семинара: Гнеденко, Соловьев и я. Б.В. открывал заседание семинара, представлял докладчика и делал общие замечания. После этого мы уже втроем следили за деталями доклада, указывали на возможности улучшения результатов, корректировали неточности. В работе семинара выступали с докладами как уже известные ученые и инженеры Е.С. Вентцель, Я.Б. Шор, И.Б. Погожев так и молодые активные исследователи Е.Ю. Барзилович, И.А. Рябинин, И.А. Ушаков и многие другие. Среди докладчиков-математиков — учеников Б.В. — отмечу В.С. Королюка, И.Н. Коваленко, Б.И. Григелиониса. Особо я хочу подчеркнуть активное участие И.Н. Коваленко. Конечно, этими именами не ограничен список всех, кто принимал активное участие в этом семинаре. Семинар способствовал существенному повышению теоретического уровня рассматривавшихся прикладных задач. Атмосфера доброжелательности, создаваемая Б.В., естественно содействовала успеху этого семинара. В начале 60-х годов методы теории надежности и массового обслуживания начали широко использоваться в приложениях. В рамках этого семинара его участники получали уникальную возможность обсуждения новых результатов и овладения математическими методами решения многих практически важных задач можно

сказать "из первых рук" тех, кто создавал основы прикладных математических и инженерных методов. В последующем этот семинар стал частью обширной деятельности созданного при Политехническом музее кабинета надежности. Председателем попечительского совета этого уникального общественного образования стал Борис Владимирович. Кабинет надежности организовал серии лекций для инженеров. Некоторые лекции посещали более 400 слушателей. Были созданы серии буклетов, отражавшие содержание этих лекций.

После создания кабинета надежности обсуждение задач теории надежности и массового обслуживания продолжалось на семинаре "Вероятностные методы в технике", заседания которого проходили в аудитории Межфакультетской лаборатории статистических методов МГУ, созданной вместо предполагавшегося Института математических методов статистики. Естественными руководителями этого семинара была та же тройца Б.В., А.Д. и я. Стиль семинара остался тем же, но стал сложнее теоретический уровень, усилилась детализация используемых математических методов, больше стало сообщений о собственных результатах участников. Число участников сократилось до 30 - 50 на каждом заседании (см. фото). Семинар "Вероятностные методы в технике" стал естественным местом презентации результатов аспирантов и преподавателей МГУ, ведущих ВУЗов как Москвы, так и других городов страны. В итоге активные участники семинара составили неформальный коллектив исследователей в области математических методов теории надежности и массового обслуживания.

В 1964 году Б.В., А.Д. и я начали работу над книгой "Математические методы теории надежности", которая была издана в 1965 году. Мы детально обсуждали содержание этой книги, которая должна была быть наполнена приложениями методов теории вероятностей, асимптотических методов математического анализа и методов математической статистики к решению задач надежности. Естественно, что асимптотические методы "достались" А.Д. Соловьеву, методы математической статистики мне, а общие части книги и методы теории вероятностей Б.В. "взял" себе. Такое распределение оказалось весьма существенным для меня. Повысился мой интерес к статистическим задачам и методам их решения. Особенно полезными для меня в это время были многочисленные обсуждения задач с И.Н. Коваленко, который также переехал из Киева в Москву. Следует отметить, что развитию математической статистики в то время в нашей стране уделялось несравненно меньшее внимание, чем развитию теории вероятностей.

Признание Б.В. одним из ведущих ученых в области теории вероятностей реализовывалось в его активном участии в международных и внутрисоюзных конференциях. Многие ученые из республик СССР и зарубежных стран были гостями его дома. Наталия Константиновна угощала необыкновенно ароматным крепким чаем, бутербродами, печеньем, конфетами. Время быстро проходило за обсуждением научных проблем. Так же радушно принимали Б.В. и во время его поездок. Мне запомнились поездки с Б.В. в Ригу, Вильнюс, Таллин, Ташкент, Тбилиси. В поездках с Б.В. всегда можно было больше узнать о наиболее интересных исследованиях и посмотреть наиболее красивые места и достопримечательности посещаемых городов и их окрестностей.

Бориса Владимировича приглашали к себе многие университеты мира. Было интересно слушать его рассказы о посещении им дальних или близких стран. Запомнился следующий эпизод. Мы с Б.В. летели в Ташкент. Это было вскоре после его возвращения из Австралии и Новой Зеландии. Б.В. оживленно рассказывал мне о своих впечатлениях. Впереди сидел мальчик лет 10 - 11, который прислушивался к интересному рассказу. Он обернулся к нам и спросил, а где еще был Б.В. Перечень стран удивил мальчика и он заинтересовался, а какая же такая профессия у рассказчика. Б.В. ответил, что мы оба путешественники, но он уже опытный путешественник, а я как бы начинающий. Мальчик уверенно заявил, что специальности путешественника не существует. "А как же тогда Сенкевич (тогда ведущий Клуба

*путешественников)?*", — возразил Б.В. Спор о нашей профессии утих. Когда мы выходили из самолета, я услышал, как мальчик сказал своему отцу: "Папа, а ты знаешь, кто за нами сидел? Настоящие путешественники". С Б.В. всегда было интересно быть рядом.



Тбилиси, 1963

Удивительная экономность и ясность изложения математической темы была в его лекциях. Слушая доклады Б.В., я часто боялся, что ему не хватит времени, чтобы достаточно полно осветить основные факты рассматриваемой математической модели (например, массового обслуживания или надежности). Однако, по завершении доклада понимаешь, что основные факты и даже элементы доказательств были доведены до понимания слушателей. Лекции Б.В. напоминали мне лекции Александра Яковлевича Хинчина. Когда я сказал об этом Б.В., то он ответил, что это естественно, так как Александр Яковлевич был его научным руководителем, и он считает себя его учеником.

С середины 60-х годов меня стали интересовать задачи теории массового обслуживания, связанные с движением транспорта на дорогах. Интерес к этим задачам как бы передался мне от Б.В., который был увлечен анализом случайности моментов прибытия грузовых судов в морской порт Одессы. В связи с ограниченными возможностями средств погрузки и разгрузки судов для каждого из них планировались времена прихода в этот порт, т.е. задавались моменты прихода по плановому графику. Однако, фактические моменты прихода судов оказались

существенно (статистически значимо) отличными от плановых. Более того, наблюдаемые моменты прихода статистически хорошо соответствовали реализациям (идеально хаотичного) пуассоновского точечного процесса. Б.В. говорил о необходимости теоретического обоснования этого эмпирического факта. Вполне возможно, что Р.Л. Добрушин именно в связи с этим интересным эмпирическим фактом предложил вариант предельной теоремы с условиями достаточными для сходимости широкого класса точечных (в том числе и регулярных неслучайных) последовательностей к пуассоновскому процессу при случайных независимых смещениях точек в этих последовательностях. Поставленные Б.В. задачи с движущимися транспортными единицами (судами, автомобилями) допускали многочисленные обобщения. Отмечу, что под влиянием значимости этих задач я согласился быть руководителем аспирантки О.И. Ганченко, которая исследовала рациональность расположения станций скорой помощи в Москве. В итоге результаты О.И. Ганченко составили содержание интересной диссертационной работы, защищенной в МАДИ. Б.В. живо интересовался этим направлением исследований. Обсуждение с ним хода исследований несомненно было полезным мне и О.И. Ганченко. Интересные задачи с движущимися приборами обслуживания (лифтами, автомобилями) были решены моим аспирантом А.Г. Гаджиевым.

Задачи теории массового обслуживания и надежности рассматривались как важная часть теории исследования операций. Однажды Б.В. пригласил к себе домой посетившего Москву президента Американского общества исследования операций Макхола (я воспроизвожу фамилию R. Machol(?) фонетически, как я ее сейчас помню). За чашкой чая шел разговор об актуальных, сложных задачах анализа движения транспорта. Я спросил Макхола, решение какой задачи в этом направлении представляется ему наиболее интересной. Он выделил задачу построения математической теории образования пробок на дорогах при превышении плотностью движущихся автомобилей некоторого критического уровня, а также и скачкообразное уменьшение интенсивности движения, предшествующее возникновению пробки. В качестве эмпирических данных он указал на оценку диаграммы пути движения автотранспорта по туннелю под Гудзоновым проливом. Б.В. предложил мне попробовать исследовать подобные задачи. В итоге, мне позднее удалось построить упрощенные вероятностные модели движения, допускающие возникновение пробок на дорогах. Обобщение этих моделей было получено впоследствии моим аспирантом из ГДР Ульрихом Целе. Эти работы были опубликованы в журнале "Техническая кибернетика", в состав редколлегии которого входили Б.В. и я.

С Б.В. я имел возможность обсуждать любые проблемы и вопросы. Его мнение и советы помогали найти правильное решение. Здесь я имею в виду не только и не столько вопросы математических исследований, но скорее вопросы их научной организации, вопросы методики преподавания и административные. Хочу подчеркнуть доступность Б.В., который находил время для таких обсуждений, а также его принципиальность и искренность в оценке любых событий. Не было ни одного случая, когда ранее услышанное мною его мнение по важным вопросам было бы изменено им в разговорах с другими. Эта открытость и принципиальность существенно выделяли Б.В. среди многих. В этом отношении Б.В. мог быть "неудобным" для тех, кто не хотел, чтобы он открыто высказывал свое мнение, не совпадающее с желаемым ими. В то же время Б.В. был сдержанным в любых спорах, отстаивая последовательно и аргументировано свою точку зрения. За многие годы я, пожалуй, лишь раз видел его открыто раздраженным. Это был случай, когда мы были заранее приглашены в один из институтов на важное совещание, связанное с проблемами надежности. Мы вынуждены были полтора часа ждать разрешения пройти на это совещание.

В своей жизни Б.В. был счастливым человеком. Домашний уют, который создавала Наталия Константиновна, и хорошо организованная личная работа позволяли ему вести

активный образ жизни. Он писал книги, руководил аспирантами, проводил заседания исследовательских семинаров, был председателем ученого совета ВАКа и членом методического совета механико-математического факультета МГУ, членом редколлегий нескольких журналов, председателем кабинета надежности при Политическом музее и т.д. Он участвовал в работе многих научных всесоюзных и международных конференций. Каждый год в день рождения Б.В. мы приходили к нему отметить вместе с его семьей это событие и начало нового года.

Существенный перелом в жизни Б.В. произошел после смерти Наталии Константиновны в феврале 1987 года. Квартира потеряла свой прежний уют. Б.В., который никогда до этого не жаловался на свое здоровье, вскоре тяжело заболел.

Я рад, что судьба дала мне возможность совместно работать и общаться с Б.В. в течение 35 лет. Воспоминания о Борисе Владимировиче и Наталии Константиновне — этих замечательных и добрых людях — не тускнеют в памяти.

# УЗКИЕ МЕСТА В СИСТЕМЕ С НЕНАДЕЖНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Гурами Цициашвили

•  
e-mail: [guram@iam.dvo.ru](mailto:guram@iam.dvo.ru)  
690041, Владивосток, ул. Радио 7,  
Институт прикладной математики ДВО РАН

В работе рассматриваются модели логических систем со случайными элементами [1], [2], для которых дается формальное определение узких мест и строятся алгоритмы их нахождения. Проведен асимптотический анализ вероятности работы (или отказа) этих систем при соответствующих асимптотических условиях на вероятности работы (или отказа) их элементов. Все основные определения и алгоритмы основаны на идее рекурсивного построения модели логической системы со случайными элементами.

## Предварительные сведения и обозначения

Пусть  $Z$  - множество, содержащее  $|Z|$  логических переменных  $z$ . Определим рекурсивно класс  $\mathcal{G}$  логических выражений от логических переменных  $z \in Z$ :

$$z \in Z \Rightarrow z \in \mathcal{G}, A_1 \in \mathcal{G}, A_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow (A_1 \wedge A_2) \in \mathcal{G}, (A_1 \vee A_2) \in \mathcal{G}. \quad (1)$$

Обозначим  $2^Z = \{Z_i, i \in I = \{1, \dots, 2^Z\}\}$  совокупность всех подмножеств множества  $Z$ .

Определим дизъюнктивную нормальную форму  $D(A)$  логического выражения  $A \in \mathcal{G}$ : для  $z \in Z, A_1 \in \mathcal{G}, A_2 \in \mathcal{G}, I_1, I_2 \subseteq I$

$$D(z) = z, D(A_1) = \bigvee_{i \in I_1} \left( \bigwedge_{z \in Z_i} z \right), D(A_2) = \bigvee_{i \in I_2} \left( \bigwedge_{z \in Z_i} z \right) \Rightarrow \quad (2)$$

$$D(A_1 \vee A_2) = \bigvee_{i \in I_1 \cup I_2} \left( \bigwedge_{z \in Z_i} z \right), D(A_1 \wedge A_2) = \bigvee_{i \in I_1, j \in I_2} \left( \bigwedge_{z \in Z_i \cup Z_j} z \right)$$

Аналогичным образом определим конъюнктивную нормальную форму  $K(A)$ ,  $A \in \mathcal{G}$ : для  $z \in Z, A_1 \in \mathcal{G}, A_2 \in \mathcal{G}, I_1, I_2 \subseteq I$



$$\begin{aligned}
K(z) = z, K(A_1) = \bigwedge_{i \in I_1} \left( \bigvee_{z \in Z_i} z \right), K(A_2) = \bigwedge_{i \in I_2} \left( \bigvee_{z \in Z_i} z \right) \Rightarrow \\
K(A_1 \vee A_2) = \bigwedge_{i \in I_1, j \in I_2} \left( \bigvee_{z \in Z_i \cup Z_j} z \right), K(A_1 \wedge A_2) = \bigwedge_{i \in I_1 \cup I_2} \left( \bigvee_{z \in Z_i} z \right)
\end{aligned} \quad (3)$$

Для совокупностей множеств  $\mathcal{X} = \{X\} \subseteq 2^Z$ ,  $\mathcal{Y} = \{Y\} \subseteq 2^Z$  положим

$$\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} = \{X \cup Y : X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}, Z(\mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X, N(\mathcal{X}) = \min(|X| : X \in \mathcal{X}).$$

Если  $Z(\mathcal{X}) \cap Z(\mathcal{Y}) = \emptyset$ , то

$$N(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) = N(\mathcal{X}) + N(\mathcal{Y}), N(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \min(N(\mathcal{X}), N(\mathcal{Y})). \quad (4)$$

Предположим, что  $p_z = P(z=1)$ ,  $q_z = P(z=0)$ ,  $p_z + q_z = 1$ , и случайные величины  $z \in Z$  независимы в совокупности. Логическую функцию  $A$  со случайными  $z$ , принимающими значения 0,1, назовем логической системой  $\mathcal{A}$ .

### Низконадежные элементы

Пусть  $\exists$  положительное число  $d$  такое, что для  $\forall z \in Z \exists$  натуральное число  $c(z)$ :

$$p_z = p_z(h) \sim \exp(-h^{-dc(z)}), \quad h \rightarrow 0. \quad (5)$$

Обозначим  $\tau(z)$  независимые случайные величины, имеющие смысл времен жизни логических элементов  $z \in Z$ , и  $P(\tau(z) > t) = p_z(h)$ . Если  $h = h(t)$  монотонно убывающая и непрерывная функция и  $h \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ , то соотношение (5) можно преобразовать к виду

$$P(\tau(z) > t) \sim \exp(-h(t)^{-dc(z)}), \quad t \rightarrow \infty,$$

характерному для Вейбулловской асимптотики, используемой в моделях времени жизни систем, состоящих из старых и потому низконадежных элементов [3], [4].

По заданному  $D(A) = \bigvee_{i \in I_1} \left( \bigwedge_{z \in Z_i} z \right)$  определим  $C(A) = \min_{i \in I} \max_{z \in Z_i} c(z)$ . Тогда из (2) имеем

$$C(A_1 \wedge A_2) = \max(C(A_1), C(A_2)), C(A_1 \vee A_2) = \min(C(A_1), C(A_2)). \quad (6)$$

Сопоставим каждой логической функции  $A$  семейства множеств  $S(A) \subseteq 2^Z$ ,  $T(A) \subseteq 2^Z$  с помощью рекурсивных соотношений:  $S(z) = \{z\}$ ,  $T(z) = \{z\}$ ,

$$S(A_1 \wedge A_2) = \begin{cases} S(A_1), C(A_1) > C(A_2), \\ S(A_2), C(A_1) < C(A_2), \\ S(A_1) \otimes S(A_2), C(A_1) = C(A_2), \end{cases} \quad T(A_1 \wedge A_2) = \begin{cases} T(A_1), C(A_1) > C(A_2), \\ T(A_2), C(A_1) < C(A_2), \\ T(A_1) \cup T(A_2), C(A_1) = C(A_2), \end{cases}$$

$$S(A_1 \vee A_2) = \begin{cases} S(A_1), C(A_1) < C(A_2), \\ S(A_2), C(A_1) > C(A_2), \\ S(A_1) \cup S(A_2), C(A_1) = C(A_2), \end{cases} \quad T(A_1 \vee A_2) = \begin{cases} T(A_1), C(A_1) < C(A_2), \\ T(A_2), C(A_1) > C(A_2), \\ T(A_1) \otimes T(A_2), C(A_1) = C(A_2). \end{cases}$$

Пусть  $I' = \left\{ i \in I : \max_{z \in Z_i} c(z) = C(A) \right\}$ , тогда из соотношений (2), (6) следует, что

$$S(A) = \left\{ \{z \in Z_i : c(z) = C(A)\} : i \in I' \right\}, \quad (7)$$

а из формул (1), (2), (6), (7) вытекают следующие утверждения.

**Теорема 1.** Из условия (5) следует, что  $-\ln P(A=1) \sim N(S(A))h^{-C(A)}$ ,  $h \rightarrow 0$ .

**Теорема 2.** Из условия (5) следует справедливость утверждений:

1. для любого  $S \in \mathcal{S}(A)$  справедливо соотношение

$$(c(z) \rightarrow c(z) - \varepsilon, z \in S) \Rightarrow (C(A) \rightarrow C(A) - \varepsilon), 0 < \varepsilon < 1; \quad (8)$$

2. если  $S \subseteq Z$  и удовлетворяет соотношению (8), то  $\exists S_* \in \mathcal{S}(A) : S_* \subseteq S$ ;

3. для любого  $T \in \mathcal{T}(A)$  справедливо соотношение

$$(c(z) \rightarrow c(z) + \varepsilon, z \in T) \Rightarrow (C(A) \rightarrow C(A) + \varepsilon), 0 < \varepsilon < 1; \quad (9)$$

4. если  $T \subseteq Z$  и удовлетворяет соотношению (9), то  $\exists T_* \in \mathcal{T}(A) : T_* \subseteq T$ .

Теорема 2 позволяет назвать множества из семейств  $\mathcal{S}(A), \mathcal{T}(A)$  узкими местами в логической системе  $\mathcal{A}$  с низконадежными элементами. Причем в силу пункта 1 (пункта 3) теоремы 2 увеличение (уменьшение) надежности элементов  $z$  из любого множества  $S \in \mathcal{S}(A)$  (множества  $T \in \mathcal{T}(A)$ ) позволяет увеличить (уменьшить) надежность всей логической системы  $\mathcal{A}$ . С помощью (6) и утверждения теоремы 2 можно рекурсивно вычислять числа  $C(A)$ ,  $N(\mathcal{S}(A))$  семейств множеств  $\mathcal{S}(A), \mathcal{T}(A)$  и по ним строить более узкие семейств множеств

$$S'(A) = \left\{ S \in \mathcal{S}(A) : |S| = N(\mathcal{S}(A)) \right\}, \quad T'(A) = \left\{ T \in \mathcal{T}(A) : |T| = N(\mathcal{T}(A)) \right\}.$$

## Высоконадежные ребра

Пусть  $\exists$  положительное число  $d$  такое, что для  $\forall$  элемента  $z \in Z$   $\exists$  натуральное число  $c(z)$ :

$$q_z = q_z(h) \sim \exp\left(-h^{-dc(z)}\right), \quad h \rightarrow 0. \quad (10)$$

Обозначим  $P(\tau(z) \leq t) = q_z(h)$ . Если  $h$  монотонно возрастающая и непрерывная функция и  $h \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ , то соотношение (10) можно преобразовать к виду

$$P(\tau(z) \leq t) \sim \exp\left(-h(t)^{-dc(z)}\right), \quad t \rightarrow 0,$$

характерному для Вейбулловской асимптотики и применяемому в моделях времени жизни систем, состоящих из новых и потому высоконадежных элементов.

По заданному  $K(A) = \bigwedge_{i \in I} \left( \bigvee_{z \in Z_i} z \right)$  переопределим  $C(A) = \min_{i \in I} \max_{z \in Z_i} c(z)$ . В силу (3) имеем

$$C(A_1 \wedge A_2) = \min(C(A_1), C(A_2)), \quad C(A_1 \vee A_2) = \max(C(A_1), C(A_2)). \quad (11)$$

Пусть  $I' = \left\{ i \in I : \min_{z \in Z_i} c(z) = C(A) \right\}$ , тогда из соотношений (3), (11) следует, что и в случае высоконадежных элементов справедливо соотношение (7). Из формул (3), (7), (11) вытекают утверждения.

**Теорема 3.** При выполнении условия (10)  $-\ln P(A=0) \sim N(S(A))h^{-C(A)}, h \rightarrow 0$ .

**Теорема 4.** Из условия (10) следует справедливость утверждений:

1. для любого  $S \in S(A)$  справедливо соотношение

$$(c(z) \rightarrow c(z) + \varepsilon, z \in S) \Rightarrow (C(A) \rightarrow C(A) + \varepsilon), 0 < \varepsilon < 1; \quad (12)$$

2. если множество  $S \subseteq Z$  и удовлетворяет соотношению (12), то

$$\exists S_* \in S(A) : S_* \subseteq S;$$

3. для любого  $T \in T(A)$  справедливо соотношение

$$(c(z) \rightarrow c(z) - \varepsilon, z \in T) \Rightarrow (C(A) \rightarrow C(A) - \varepsilon), 0 < \varepsilon < 1; \quad (13)$$

4. если множество  $T \subseteq Z$  и удовлетворяет соотношению (13), то

$$\exists T_* \in T(A) : T_* \subseteq T.$$

Теорема 4 позволяет назвать множества из семейств  $S(A), T(A)$  узкими местами в логической системе  $\mathcal{A}$  с высоконадежными элементами. В силу пункта 1 (пункта 3) теоремы 4 увеличение (уменьшение) надежности элементов  $z$  из любого  $S \in S(A)$  ( $T \in T(A)$ ) позволяет увеличить (уменьшить) надежность всей логической системы  $\mathcal{A}$ . С помощью формулы (12) и утверждения теоремы 4 можно рекурсивно вычислять числа  $C(A), N(S(A))$  семейства множеств  $S(A), T(A)$  и по ним строить более узкие семейства множеств  $S'(A), T'(A)$ .

**Замечание 1.** Обозначим  $X_1 = \{Z_i, i \in I_1\}, X_2 = \{Z_i, i \in I_2\}$  и предположим, что  $Z(X_1) \cap Z(X_2) = \emptyset$ . Тогда формула (4) может существенно упростить вычисление значений  $N(S(A_1) \otimes S(A_2)), N(S(A_1) \cup S(A_2))$ , которые необходимы при рекурсивном определении величины  $N(S(A))$ , входящей в асимптотические формулы теорем 1, 3.

## Литература

1. Рябинин И.А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем// Автоматика и телемеханика, 2003, № 7, с. 178-186.
2. Соложенцев Е.Д. Особенности логико-вероятностной теории риска с группами несовместных событий// Автоматика и телемеханика, 2003, № 7, с. 187-203.
3. Rocchi P. Boltzmann-like Entropy in Reliability Theory// Entropy, 2002, vol. 4, p. 142-150.
4. Rocchi P. The Notion of Reversibility and Irreversibility at the Base of the Reliability Theory// Proceedings of the International Symposium on Stochastic Models in Reliability, Safety, Security and Logistics. Sami Shamoon College of Engineering. Beer Sheva, February 15-17, 2005, p. 287-291.

# ОПТИМИЗАЦИЯ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

---

Галина Федотова, Николай Воропай

ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия

e-mail: [fedotova@isem.sei.irk.ru](mailto:fedotova@isem.sei.irk.ru), [voropai@isem.sei.irk.ru](mailto:voropai@isem.sei.irk.ru)

## АННОТАЦИЯ

Предлагается подход к решению задачи обеспечения надежности снабжения потребителей электроэнергией при функционировании электроэнергетических систем в условиях рыночной экономики.

## ВВЕДЕНИЕ

Исторически развитие электроэнергетики России осуществлялось путем поэтапного объединения и организации параллельной работы региональных электроэнергетических систем, создания объединенных энергосистем (ОЭС) и Единой энергосистемы (ЕЭС). ЕЭС бывшего Советского Союза обеспечивала высокую степень координации производства, транспорта и потребления электроэнергии, эффективную работу отрасли в целом и высокий уровень надежности электроснабжения потребителей. Эффективность параллельной работы электроэнергетических систем (ЭЭС) в составе ЕЭС до начала реформирования электроэнергетики оценивалась экономией 10-15 млн. кВт установленной мощности за счет совмещения графиков нагрузки и аварийной взаимопомощи систем и 12-14 млн. тонн условного топлива в год. Существовала иерархическая система управления надежностью, характерная для так называемой индустриальной модели организации электроэнергетики. Отношения между производителями и потребителями электроэнергии строились на нормативном подходе, требующем выполнения обязательств, инструкций и указаний, независимо от необходимых для этого затрат, поскольку за все платило государство. В конце прошлого столетия стали очевидны недостатки индустриальной модели электроэнергетики, возникла необходимость реформирования отрасли, связанного с переходом к рыночной модели.

На фоне либерализации отношений между объектами производства, передачи, распределения и потребления электрической энергии в условиях рыночной экономики происходит распределение обязанностей по обеспечению надежности между субъектами рынка. При переходе к рынку отношения между производителями и между производителями и потребителями электроэнергии коренным образом меняются. Между производителями электроэнергии возникает конкуренция по сбыту электроэнергии, появляются противоречия между субъектами рынка, приводящие к утяжелению режимов работы электроэнергетических систем и усложнению процесса управления ими. Возникают проблемы, связанные с взаимопомощью ЭЭС в критических ситуациях. Отношения между производителями и потребителями электроэнергии строятся на договорной основе и финансовых взаиморасчетах. Все эти процессы в целом негативно влияют на надежность, поэтому решению проблем, снижающих надежность в современных условиях, должно уделяться особое внимание.

В России с переходом электроэнергетики к рыночным отношениям состоялась смена форм собственности, потребовавшая структурной перестройки системы управления отраслью. Главная задача в этих условиях – не допустить снижения уровня надежности, достигнутого при централизованном управлении, и адаптировать его к запросам каждого потребителя. Для этого нужна новая система управления надежностью, основанная на сочетании нормативных подходов и экономических механизмов.

## ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Предложенная в настоящей статье методика оптимизации надежности электроснабжения потребителей основана на комбинации нормативного и рыночного подходов и следующих исходных положениях.

*Надежность* – свойство объекта выполнять заданные функции в заданном объеме при определенных условиях функционирования [1]. В качестве объекта рассматривается объединение электроэнергетических систем, заданных функций – снабжение потребителей электроэнергией в необходимых количествах с требуемой надежностью.

*Системная надежность* – свойство электроэнергетической системы сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность системы выполнять заданные функции.

*Надежность электроснабжения потребителей* – это свойство электроэнергетической системы, в составе которой работает система электроснабжения, обеспечивать без ограничений поставку заявленной потребителями в соответствии с договорными обязательствами электрической энергии (мощности) при соблюдении установленных техническими регламентами качественных и количественных показателей надежности функционирования ЭЭС и показателей качества электрической энергии [2].

Надежность электроснабжения потребителей определяется уровнем системной надежности и складывается из надежности электроснабжения питающих узлов, обеспечиваемой системными средствами (структурой системы, резервами мощности, запасами энергоресурсов и пропускных способностей связей, средствами управления и т.д.), и надежности систем электроснабжения. В условиях рынка надежность электроснабжения является товаром, имеющим свою цену и реализуемым через рыночные услуги, обеспечивается всеми субъектами рынка в зонах ответственности за надежность при их технологическом и экономическом взаимодействии [3]. Системный оператор (СО) играет главную роль в управлении и координации вопросов надежности в рыночной среде. Задачей системного оператора является обеспечение системной надежности, т.е. создание таких условий функционирования и управления ЭЭС, при которых путем технологического взаимодействия генерирующих установок, электрических сетей и электроустановок потребителей осуществляется производство, передача, распределение и потребление электрической энергии в соответствии с договорными условиями между субъектами управления и участниками рынка. Системный оператор несет ответственность за надежность электроснабжения узлов основной электрической сети, от которых осуществляется снабжение электрической энергией питающих узлов. Ответственность за надежность систем электроснабжения и электроснабжения потребителей в целом несут электроснабжающие компании (ЭК), которые обеспечивают поставку электрической энергии (мощности) потребителям в заявленном объеме в соответствии с графиком потребления и договорами электроснабжения при выполнении потребителями всех технических и финансовых обязательств. Такое разделение ответственности дает возможность

решать задачу обеспечения надежности электроснабжения потребителей поэтапно, сначала на системном уровне для питающих узлов, затем на уровне питающих узлов для отдельных потребителей.

## ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Предлагается подход к решению задачи обеспечения надежности электроснабжения потребителей применительно к объединенной электроэнергетической системе (ОЭС) со слабыми электрическими связями при годовом планировании режимов ЭЭС в условиях реформирования отрасли и перехода к рынку. В виду большой размерности и сложности задачи ОЭС представляется расчетной схемой. Каждый узел расчетной схемы включает места присоединения к электрической сети генерирующих компаний (ГК) и питающих узлов, к которым подключены потребители. Предполагается, что генерирующие компании и потребители электроэнергии заблаговременно заключают договора на подключение своего оборудования к сети для передачи и получения электроэнергии. Заявки на подключение к сети поступают к СО. Системный оператор совместно с сетевыми компаниями утверждает точки поставки электроэнергии от генерирующих компаний к питающим узлам, от которых осуществляется электроснабжение потребителей. На основе прогноза нагрузок на предстоящий год и полученной от генерирующих и сетевых компаний информации о располагаемых мощностях электростанций, структурах генерирующих мощностей, схемах электрических сетей и пропускных способностях связей между узлами расчетной схемы решается следующая задача. Пусть энергообъединение представлено расчетной схемой, по узлам которой разнесены генерирующие компании и питающие узлы, подключенные к сети рынка. Расчетным периодом времени является год, разделенный на дискретные интервалы времени равной длительности. В каждом узле расчетной схемы известны:

- состав работающего генерирующего оборудования и его изменения во времени, связанные с вводом новых мощностей и выводом действующего оборудования из эксплуатации на реконструкцию (модернизацию) или по другим причинам;
- характеристики оборудования (единичная мощность, аварийность);
- суммарная располагаемая мощность генерации узла и входящих в него генерирующих компаний на каждом интервале времени;
- суммарная нагрузка потребителей в питающих узлах на каждом интервале времени;
- годовой объем плановых ремонтов генерирующего оборудования.

*Для каждой связи между узлами расчетной схемы заданы пропускные способности.*

***В этих исходных условиях необходимо обеспечить максимально возможный уровень надежности электроснабжения потребителей, подключенных к сети, по энергообъединению в целом с учетом: нормативных требований к уровню надежности электроснабжения питающих узлов, от которых осуществляется снабжение потребителей электроэнергией; баланса мощности в узлах расчетной схемы и ограничений на его составляющие; пропускных способностей связей между узлами расчетной схемы.***

При годовом планировании режимов ЭЭС, когда известны располагаемые мощности электростанций и нагрузки потребителей и, тем самым, определена величина полного резерва мощности, главным средством обеспечения надежности является рациональное его

использование. Известно, что часть резерва предназначена для компенсации потери мощности, вызванной отказами оборудования электростанций, и для покрытия случайного и непредвиденного роста нагрузки – *оперативный резерв мощности*. Другая часть резерва предназначена для компенсации снижения мощности, обусловленного выводом оборудования в плановый ремонт, – *ремонтный резерв мощности*. Путем оптимального по критерию надежности деления полного резерва мощности между этими частями можно решить сформулированную выше задачу.

Уровень надежности предлагается оценивать показателем обеспеченности электроэнергией потребителей, интегрально учитывающим частоту, продолжительность и глубину отказов в системе. Использование этого показателя оправдано большой заблаговременностью (год) и масштабами расчетного объекта (энергообъединение), где в качестве потребителей выступают крупные нагрузочные узлы, надежность электроснабжения которых целесообразно оценивать комплексным показателем. Выбранный показатель имеет простой физический смысл и является достаточно чувствительным к различным возмущениям, приводящим к снижению надежности (аварийное снижение мощности, случайный рост нагрузки, вывод оборудования в ремонт и т.д.), и к мероприятиям, повышающим надежность (ввод нового оборудования, усиление пропускных способностей связей, резервирование и др.). Он относится к числу нормируемых комплексных показателей надежности.

Сформулированная выше задача сводится к решению следующей оптимизационной задачи.

#### **Найти максимум функции надежности**

$$\frac{1}{W} \sum_{\mu=1}^M \sum_{j=1}^G \pi_{\mu j} \cdot W_{\mu j} \rightarrow \max \quad (1)$$

#### **с учетом ограничений на ее параметры,**

где:  $M$  – количество узлов в расчетной схеме;

$G$  – число дискретных интервалов времени;

$W_{\mu j}, W$  – прогнозируемые объемы электропотребления  $\mu$ -го узла расчетной схемы в  $j$ -

й интервал времени и объединения в целом за год;

$\pi_{\mu j}$  – показатель обеспеченности электроэнергией потребителей  $\mu$ -го узла в  $j$ -й

интервал времени, определяемый из выражения: 
$$\pi_{\mu j} = \frac{W_{\mu j} - \Delta W_{\mu j}}{W_{\mu j}} ;$$

$\Delta W_{\mu j}$  – математическое ожидание недоотпуска электроэнергии потребителям  $\mu$ -го узла в  $j$ -й интервал времени.

Математическое ожидание недоотпуска электроэнергии определяется, исходя из вероятностей дефицитов мощности, по формуле:

$$\Delta W = \sum_{\psi=r+1}^{\Psi} P_{(\psi-r)\varepsilon}^g (\psi-r)\varepsilon T, \quad (2)$$



где:  $T$  - длительность расчетного периода времени;  
 $\varepsilon$  - расчетная ступень мощности;  
 $r$  - число резервных агрегатов мощностью  $\varepsilon$  ;  
 $\Psi$  - число агрегатов мощностью  $\varepsilon$  , необходимых на покрытие максимального дефицита мощности;  
 $P_{\Psi\varepsilon}^g$  - вероятность дефицита мощности величиной  $\Psi\varepsilon$  .

Предполагается, что при отсутствии резерва дефицит мощности может быть вызван как аварийным выходом из строя оборудования электростанций, так и внезапным повышением нагрузки при воздействии случайных факторов. Все возможные значения вероятностей дефицита мощности  $P_{(\Psi-r)\varepsilon}^g$  определяются путем перемножения рядов распределения вероятностей аварийного снижения мощности и отклонения нагрузки от прогнозного ее значения. Величина прогнозируемого объема электроэнергии с учетом ошибки прогноза нагрузки равна

$$W = \sum_{m=-v}^{\chi} P_{m\varepsilon}^h m\varepsilon T + N^0 \varepsilon T, \quad (3)$$

где:  $N^0$  - число агрегатов мощностью  $\varepsilon$  , необходимых для покрытия нагрузки без резерва;  
 $P_{m\varepsilon}^h$  - вероятность отклонения нагрузки от прогнозного ее значения на величину  $m\varepsilon$  .

Уровень надежности зависит от множества параметров и факторов, в том числе от состава работающего оборудования и его аварийности, величины нагрузки и ошибки ее прогноза, оперативного резерва мощности и взаимопомощи узлов. Если представить показатель надежности  $\pi_{\mu j}$  функцией от нагрузки, оперативного резерва мощности и перетоков мощности по связям, изменяющихся во времени,

$$\pi_{\mu j} = F ( N_{\mu j}, RO_{\mu j}, PL_{lj} ), \quad (4)$$

где:  $N_{\mu j}$  - нагрузка  $\mu$ -го узла в  $j$ -й интервал времени;  
 $RO_{\mu j}$  - оперативный резерв мощности в  $\mu$ -м узле в  $j$ -й интервал времени;  
 $PL_{lj}$  - переток мощности по  $l$ -й связи в  $j$ -й интервал времени,

то при большой размерности задачи с учетом трудоемкости расчетов можно использовать в процессе оптимизации аппроксимацию этой функции полиномом

$$\pi_{\mu j} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} A_{\mu\alpha\beta} \left( N_{\mu j} \pm \sum_l PL_{lj} \right)^{\alpha} RO_{\mu j}^{\beta}, \quad \alpha = \overline{0, S}; \quad \beta = \overline{0, S}; \quad \alpha + \beta \leq S; \quad l \in L_{\mu}, \quad (5)$$

где:  $S$  - степень полинома;  
 $A_{\mu\alpha\beta}$  - коэффициенты полинома;

$L_\mu$  – множество связей в расчетной схеме, примыкающих к  $\mu$ -му узлу.

Результаты проведенных исследований по оценке вносимой погрешности при аппроксимации функции (4) полиномом (5) разной степени показали допустимость использования для этого квадратного полинома [4]. Подбор коэффициентов  $A_{\mu\alpha\beta}$  полинома осуществляется методом наименьших квадратов по множеству значений  $\pi$  при разных значениях нагрузки в узлах с учетом их взаимопомощи и оперативного резерва мощности.

Решение задачи по критерию (1) обеспечивает максимальную надежность при минимальном годовом ущербе от дефицита мощности, если ущерб пропорционален величине недоотпуска электроэнергии. Для учета нормативных требований к надежности электроснабжения питающих узлов вводится ограничение на показатель надежности  $\pi$

$$\underline{\pi}_\mu \leq \pi_{\mu j} \leq \overline{\pi}_\mu, \quad (6)$$

где:  $\pi_{\mu j}$ ,  $\underline{\pi}_\mu$ ,  $\overline{\pi}_\mu$  – расчетное значение показателя надежности электроснабжения питающих узлов  $\mu$ -го узла расчетной схемы в  $j$ -м интервале времени, его нормативная величина и максимально возможная, соответственно.

Нормативный уровень надежности электроснабжения питающих узлов обеспечивается с помощью системных средств, в одинаковой степени предназначенных для всех потребителей (принцип равенства и недискриминации). В дефицитных узлах могут возникнуть трудности с обеспечением нормативного уровня надежности. В таких случаях надежность становится проблемой системного оператора и предметом его рыночных отношений с субъектами рынка. Чтобы решить эту проблему, системный оператор может воспользоваться дополнительными системными услугами, организовать закупку недостающей электрической энергии (мощности) у генерирующих компаний избыточных узлов и передачу ее в дефицитные, используя резервные возможности сетей. При необходимости могут использоваться средства из системного фонда надежности или страховых фондов.

Таким образом, на этом этапе наряду с нормативным подходом начинает действовать рыночный механизм взаимодействия субъектов рынка по обеспечению надежности электроснабжения потребителей.

Путем введения в модель ограничений (7) – (11) обеспечивается баланс мощности в узлах расчетной схемы и учитываются ограничения на его составляющие.

$$P_{\mu j} - N_{\mu j} \pm \sum_l PL_{l j} - RO_{\mu j} - RP_{\mu j} - RK_{\mu j} = 0, \quad l \in L_\mu, \quad (7)$$

где:  $P_{\mu j}$  – располагаемая мощность генерации  $\mu$ -го узла в  $j$ -й интервал времени

$(P_{\mu j} = \sum_{k=1}^{K_\mu} P_{\mu k j})$ ,  $P_{\mu k j}$  – располагаемая мощность генерации, которую заявляет на рынок

$k$  – я генерирующая компания  $\mu$  -го узла в  $j$ -й интервал времени,  $K_\mu$  – количество ГК в  $\mu$ -м узле расчетной схемы);

$N_{\mu j}$  – суммарная нагрузка  $\mu$  -го узла в  $j$ -й интервал времени ( $N_{\mu j} = \sum_{n=1}^{U_\mu} N_{\mu n j}$ ,

$N_{\mu n j}$  - нагрузка  $n$ -го питающего узла  $\mu$  -го узла расчетной схемы в  $j$ -й интервал времени,

$U_\mu$  - количество питающих узлов);

$PL_{1j}$  – переток мощности по 1-й связи, примыкающей к  $\mu$ -му узлу, в  $j$ -й интервал времени;

$L_\mu$  – множество связей, примыкающих к  $\mu$ -му узлу ;

$RO_{\mu j}, RP_{\mu j}, RK_{\mu j}$  – оперативный, ремонтный и коммерческий резервы мощности, соответственно, в  $\mu$ -м узле в  $j$ -й интервал времени, ограничения на величину которых задаются неравенствами ( 8 ), ( 9 ), ( 10 ).

$$\underline{RO}_\mu \leq RO_{\mu j} \leq \overline{RO}_\mu , \quad (8)$$

где:  $RO_{\mu j}, \underline{RO}_\mu, \overline{RO}_\mu$  – оперативный резерв мощности в  $\mu$  -м узле в  $j$ -й интервал времени и его предельно допустимые значения, обусловленные нормативными требованиями к величине оперативного резерва мощности. При незначительных различиях между правой и левой границами неравенства ( 8 ) расчетная величина оперативного резерва мощности выравнивается во времени, что влечет за собой выравнивание расчетного уровня надежности в течение года.

$$\sum_{j=1}^G RP_{\mu j} \cdot \Delta T_j = V_\mu , \quad (9)$$

где:  $RP_{\mu j}$  – ремонтный резерв мощности, необходимый для замещения мощности оборудования  $\mu$ - го узла, которое может быть выведено в плановый ремонт в  $j$ -й интервал времени без ущерба для надежности;

$\Delta T_j$  – длительность  $j$ -го дискретного интервала времени;

$V_\mu$  – годовой объем плановых ремонтов генерирующего оборудования  $\mu$ - го узла, полученный по заявкам на ремонты генерирующих компаний с учетом нормативных длительностей ремонтов.

$$RK_{\mu j} \geq 0 \quad (10)$$

Коммерческий резерв мощности  $RK_{\mu j}$  введен в балансовое уравнение для узлов с избыточной мощностью, которую генерирующие компании имеют право использовать по своему усмотрению.

Следующим неравенством задаются ограничения на величину передаваемой мощности по электрическим связям между узлами.

$$\underline{PL}_1 \leq PL_{1j} \leq \overline{PL}_1, \quad l = \overline{1, L}, \quad (11)$$

где:  $L$  – количество связей между узлами расчетной схемы;

$PL_{1j}, \underline{PL}_1, \overline{PL}_1$  –переток мощности по  $l$ -й связи в  $j$ -й интервал времени и ее пропускные способности, соответственно. Сетевая компания, в чьем ведении или управлении находится сетевое оборудование связи, должна обеспечивать согласованные с системным оператором пропускные способности всех ее элементов и сечений в нормальных режимах и в период проведения ремонтных работ.

*Задача (I)– (II) заключается в выборе оптимальных значений оперативного резерва мощности в узлах расчетной схемы, с учетом их взаимодействия, на каждом дискретном интервале времени, обеспечивающих максимально возможную надежность электроснабжения потребителей по энергообъединению в целом и надежность электроснабжения питающих узлов не ниже нормативного уровня, назовем ее гарантированной. Полученный в результате оптимизации на каждом интервале времени ремонтный резерв мощности обеспечивает в течение года проведение заявленных плановых ремонтов генерирующего оборудования в полном объеме без ущерба для надежности. Выполнение ограничений по балансу мощности, величине оперативного и ремонтного резервов мощности в узлах и пропускным способностям связей позволяет учесть в процессе оптимизации интересы системного оператора и потребителей, возможности генерирующих и сетевых компаний.*

В результате решения этой задачи при заданных значениях  $P_{\mu j}, N_{\mu j}, \underline{PL}_1, \overline{PL}_1, \underline{RO}_{\mu}, \overline{RO}_{\mu}, V_{\mu}, \underline{\pi}_{\mu}, \overline{\pi}_{\mu}$  определяются оптимальные по надежности величины  $RO_{\mu j}, RR_{\mu j}, PL_{1j}$  и значения показателя гарантированной надежности  $\pi_{\mu j}$  в питающих узлах по интервалам времени. Для потребителей, подключенных к питающим узлам, уровень гарантированной надежности будет средневзвешенным. При этом системный оператор получает информацию о том: какой максимально возможный уровень надежности электроснабжения потребителей по энергообъединению в целом и какой уровень гарантированной надежности в питающих узлах в заданных условиях может быть обеспечен в предстоящем году; какие узлы расчетной схемы являются избыточными по мощности, какие дефицитными; какую мощность, когда и из каких узлов необходимо передать в дефицитные узлы для обеспечения в них надежности электроснабжения питающих узлов не ниже нормативного уровня. Эта информация может использоваться для заключения договоров между субъектами рынка (системным оператором, генерирующими, сетевыми, электроснабжающими компаниями и потребителями) на куплю-продажу электроэнергии (мощности) и системных услуг.

В итоге в энергообъединении обеспечивается максимально возможная надежность электроснабжения потребителей, а в каждом узле расчетной схемы – гарантированная надежность электроснабжения питающих узлов, уровень которой не ниже нормативного. Тем самым с помощью системных средств решается задача обеспечения надежности электроснабжения потребителей на системном уровне. Далее возникает задача обеспечения надежности электроснабжения на уровне питающих узлов для каждого конкретного потребителя, которую в условиях рынка должны решать электроснабжающие компании. При оценке надежности электроснабжения конкретного потребителя, присоединенного к питающему узлу, последний рассматривается как основной источник питания.

Получив от СО прогноз по уровню гарантированной надежности электроснабжения питающих узлов на предстоящий год, электроснабжающие компании, оценивают, удовлетворяет ли он требованиям к надежности электроснабжения обслуживаемых ими потребителей. С учетом современного состояния в отрасли и повышенных требований к надежности уровень гарантированной надежности может оказаться недостаточным для всех потребителей, подключенных к питающим узлам. В результате от недоотпуска электроэнергии и его последствий особо крупные потребители могут понести колоссальные убытки. В условиях рынка потребители могут влиять на уровень надежности электроснабжения. Оценив возможный ущерб от недостаточной надежности, они решают, что выгоднее – иметь необходимый уровень надежности электроснабжения или пойти на риск возможного ущерба. С учетом цены надежности и своих финансовых возможностей потребители заявляют необходимый уровень надежности.

В свою очередь, электроснабжающие компании группируют потребителей по заявленным уровням надежности, поделив потребителей, например, на три основные группы. В первую группу включаются потребители с заявленным уровнем надежности ниже нормативного уровня надежности электроснабжения питающих узлов, во вторую – выше нормативного, но не превышающего уровень гарантированной надежности, и в третью – выше уровня гарантированной надежности. Обеспечение заявленного уровня надежности потребителей каждой группы требует разных средств и затрат, которые в условиях рынка должны компенсировать потребители, например, через надбавки к базовому тарифу\* [5,6]. При этом потребители оплачивают только дополнительные услуги, связанные с повышением уровня надежности их электроснабжения. Непосредственное участие потребителей в финансировании мероприятий по обеспечению системной надежности (ввод нового технологического оборудования и модернизация работающего, сооружение (реконструкция) электрических сетей и реконструкция схем электроснабжения и т.д.) не предусмотрено. Проведение этих мероприятий осуществляется централизованно за счет инвестиционной составляющей базового тарифа, абонентской платы за электроэнергию, платы за подключение к сети и ее использование.

Для потребителей первой группы с пониженными требованиями к надежности электроснабжающие компании выбирают мероприятия, обеспечивающие снижение надежности (изменение очередности, периодичности и продолжительности отключений или ограничений потребителей в часы максимума нагрузки, в послеаварийный режим и т.д.), оценивают экономию затрат, получающихся за счет этих мероприятий, и делают скидки с тарифа на электроэнергию. Если потребителей устраивает нормативный уровень надежности электроснабжения, надбавки к базовому тарифу не устанавливаются. Надбавки к базовому тарифу устанавливаются для тех потребителей, заявленный уровень надежности

---

\* В данном случае базовый тариф соответствует нормативному уровню надежности электроснабжения питающих узлов.

электроснабжения которых выше нормативного, т.е. для потребителей второй и третьей групп. Для каждой группы оцениваются затраты (экономия) на обеспечение заявленных уровней надежности и разрабатывается шкала надбавок (скидок) к базовому тарифу. Необходимо заметить, что для потребителей третьей группы надбавки будут выше, чем для второй, поскольку для обеспечения заявленной ими надежности могут потребоваться дополнительные затраты, связанные с повышением надежности электроснабжения питающих узлов или с вводом дополнительных источников питания.

Надбавки (скидки) к тарифу вносятся в договора между ЭК и потребителями. Плата за надежность организует деятельность обеих сторон. Со стороны электроснабжающих компаний повышается ответственность за своевременную поставку электроэнергии в требуемом объеме каждому конкретному потребителю с учетом требований к надежности электроснабжения. У потребителей появляется возможность участия в процессе тарифообразования и через тарифы защитить себя от сбоев в электроснабжении и возможных ущербов. Функции контроля за поступлением платы за надежность и использованием этих средств, а также разрешение конфликтных ситуаций и споров между потребителями и электроснабжающими компаниями должны взять на себя СО и федеральные службы по тарифам.

Таким образом, путем использования различных способов и средств электроснабжающие компании добиваются обеспечения заявленных потребителями уровней надежности электроснабжения за определенную плату. При этом потребители, которых удовлетворяет нормативный уровень надежности электроснабжения, платят за электроэнергию по базовому тарифу. Если заявленный уровень надежности ниже нормативного, потребители имеют скидку, выше нормативного – надбавку к тарифу, величина которой определяется затратами на повышение надежности. В процессе расчета надбавок (скидок) к тарифу в рыночных условиях должен действовать механизм, позволяющий на фоне соблюдения собственных интересов электроснабжающих компаний и потребителей электроэнергии учитывать интересы и требования друг друга [7]. Потребители, претендующие на повышение надежности, должны реально оценивать необходимые для этого затраты и свои финансовые возможности. Электроснабжающие компании не должны чрезмерно завышать плату за надежность, чтобы не потерять потребителей, поскольку в рыночной среде потребители имеют право выбора ЭК с учетом своих финансовых возможностей и предложений электроснабжающих компаний.

## **МЕХАНИЗМ СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ ЭЛЕКТРОСНАБЖАЮЩЕЙ КОМПАНИИ И ПОТРЕБИТЕЛЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ**

Надежность является одной из характеристик, обуславливающих качество объекта, и обеспечение какого-то уровня надежности требует ресурсов, усилий, имеющих определенную полезность для электроснабжающей компании. Она готова вложить эти ресурсы и усилия, поскольку понимает, что потребитель будет платить за электроэнергию при обеспечении требуемой надежности электроснабжения. В противном случае потребитель будет искать другую электроснабжающую компанию или вводить собственный источник питания. За усилия и ресурсы по обеспечению надежности электроснабжения ЭК должна получать определенную компенсацию. Потребитель электроэнергии, приобретающий ее у электроснабжающей компании, понимает, что он должен платить за обеспечение надежности электроснабжения, поскольку недостаточная надежность электроснабжения может привести к ущербам. Если электроснабжающая компания не в состоянии обеспечить потребителю требуемую надежность, она может компенсировать его ущербы от недостаточной надежности.

В общем случае оба субъекта отношений – электроснабжающая компания и потребитель – имеют разные экономические критерии по надежности, которые не совпадают. Рассмотрим возможный механизм взаимоотношений субъектов с целью нахождения компромиссного решения по обеспечению надежности электроснабжения. Наиболее общим для всех субъектов является критерий максимума чистого дисконтированного дохода. Для электроснабжающей компании экономический критерий по надежности имеет вид

$$NPV_S = I_E + I_R - C - D^* \rightarrow \max, \quad (12)$$

где:  $NPV_S$  – чистый дисконтированный доход электроснабжающей компании;

$I_E$  – суммарный приведенный доход от реализации электроэнергии за период времени  $T$ ;

$I_R$  – суммарный приведенный доход от платы потребителя за надежность за период времени  $T$ ;

$C$  – суммарные приведенные затраты на функционирование электроснабжающей компании, включающие приведенную долю капитальных затрат и текущие издержки за период времени  $T$ ;

$D^*$  – суммарный приведенный ущерб (плата потребителю за недостаточный уровень надежности электроснабжения по отношению к уровню, зафиксированному в договоре на электроснабжение между электроснабжающей компанией и потребителем) за период времени  $T$ .

Для потребителя критерий имеет вид

$$NPV_C = P_C - C_E - C_R - D + D^* \rightarrow \max, \quad (13)$$

где:  $NPV_C$  – чистый дисконтированный доход потребителя;

$P_C$  – суммарная приведенная прибыль потребителя;

$C_E$  – суммарные приведенные затраты на оплату электроснабжения с учетом того, что потребитель не только покупает электроэнергию, но и проводит у себя некоторые мероприятия для ее приема;

$C_R$  – суммарные приведенные затраты на оплату надежности электроснабжения;

$D$  – полный суммарный приведенный ущерб потребителя от ненадежности его электроснабжения;

$D^*$  – суммарный приведенный ущерб от ненадежности электроснабжения, компенсируемый электроснабжающей компанией.

Из (13) следует, что часть полного ущерба от ненадежности электроснабжения потребителя, соответствующая недостаточному уровню надежности электроснабжения по отношению к согласованному уровню, зафиксированному в договоре на электроснабжение между электроснабжающей компанией и потребителем, компенсируется электроснабжающей компанией. При заданной реализации электроэнергии и соответствующих затратах интерес электроснабжающей компании будет определяться критерием

$$I_R - D^* \rightarrow \max, \quad (14)$$

а потребителя

$$D^* - D - C_R \rightarrow \max. \quad (15)$$

Для совокупного потребителя, суммарно представляющего всех потребителей, обслуживаемых данной электроснабжающей компанией,

$$I_R = C_R. \quad (16)$$

Из анализа приведенных соотношений с точки зрения интересов электроснабжающей компании и совокупного потребителя следует, что, если электроснабжающая компания сможет эффективно использовать средства  $I_R$  и повысить надежность электроснабжения, снизив при этом ущерб в большей степени, чем произведенные затраты на надежность из средств  $I_R$ , то она получит дополнительную прибыль. Следовательно, у электроснабжающей компании появляется стимул для повышения надежности. Потребитель же заинтересован в получении большей компенсации  $D^*$ , чем затраты на надежность  $C_R$ . Если он заявляет необходимую надежность через величину удельных ущербов из-за внезапного отключения мощности,  $d_p$  (руб/кВт), и от недоотпуска электроэнергии,  $d_e$  (руб/кВт·ч), то повышение компенсации  $D^*$  можно обеспечить за счет увеличения  $d_p$  и  $d_e$ . Однако при этом возрастет плата за надежность для потребителя, зависящая от  $d_p$  и  $d_e$ . В свою очередь, электроснабжающая компания, чтобы уменьшить  $D^*$ , постарается повысить надежность электроснабжения именно этого потребителя.

Таким образом, предложенный механизм взаимоотношений электроснабжающей компании и потребителя обеспечивает экономический баланс их интересов. Потребитель может заявить любой уровень надежности, задавая соответствующие значения удельных ущербов  $d_p$  и  $d_e$ . Электроснабжающая компания путем соответствующего назначения оплаты потребителем надежности электроснабжения может стимулировать потребителя задавать реальные значения  $d_p$  и  $d_e$ , поскольку их завышение требует повышенной платы за надежность, а занижение не полностью компенсирует ущерб от недостаточного уровня надежности электроснабжения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учитывая возросшие требования к надежности электроснабжения потребителей в новых экономических условиях, можно сформулировать основные проблемы решения изменившихся и



вновь возникших задач надежности.

С переходом к рынку электрической энергии и мощности возникает проблема согласования экономических решений с учетом несовпадения интересов разных субъектов управления ЭЭС. Поэтому необходим пересмотр критериев выбора оптимальных управленческих решений с учетом фактора надежности. Нужна новая система управления надежностью, основанная на сочетании нормативных подходов и экономических механизмов. Экономическое управление надежностью может быть организовано различными способами, в том числе с помощью дифференциации тарифов на электроэнергию для потребителей, созданием страховых фондов надежности и т. д. В этой связи необходима разработка механизмов взаиморасчета за надежность между различными субъектами рынка, их внедрение в практику рыночных отношений.

Требуют пересмотра имеющиеся нормативы надежности, в частности нормативы по резервам и ремонтам. Необходимы расширение нормативной базы для показателей надежности электроснабжения потребителей, согласование нормативов надежности для всех энергосистем, функционирующих на территории России, и их приближение к международным.

Имеющиеся модели анализа надежности, оставаясь работоспособными, в некоторых случаях могут быть модернизированы с учетом новых условий. В первую очередь это касается учета в них взаимоотношений между субъектами рынка. При этом требуется уметь определять и учитывать справедливое распределение затрат и прибыли между участниками рынка. Ранее разработанные модели синтеза надежности должны быть усовершенствованы с учетом изменения условий и критериев задач управления надежностью, методологических подходов, нормативно-правовых баз, которые будут реализованы на практике. В основу таких моделей должны быть положены новые математические методы и информационные технологии. Вновь разрабатываемые подходы к анализу и синтезу надежности при управлении развитием и функционированием ЭЭС должны исходить из необходимости координации действий совместно работающих субъектов в условиях конкуренции.

Обеспечение надежности электроснабжения потребителей в рыночных условиях требует согласования несовпадающих интересов электроснабжающих компаний и потребителей, разработки практически пригодного экономического механизма их взаимоотношений.

**БИБЛИОГРАФИЯ**

1. Надежность систем энергетики и их оборудования /Под общей редакцией Ю.Н.Руденко: В 4-х томах. Т.1: Справочник по общим моделям анализа и синтеза надежности систем энергетики / Под ред. Ю.Н.Руденко. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 480 с.
2. Осика Л.К. Пути обеспечения надежности электроснабжения потребителей - субъектов оптового и розничного рынков электроэнергии на современном этапе реформирования энергетики. – [www.np-ats.ru/getfile.jsp?fid=177](http://www.np-ats.ru/getfile.jsp?fid=177)
3. Федеральный закон “Об электроэнергетике”, принят Государственной Думой 21 февраля 2003 года.
4. Дубицкий М.А., Руденко Ю.Н., Чельцов М.Б. Выбор и использование резервов генерирующей мощности в электроэнергетических системах. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – С. 234-250.
5. Воропай Н.И., Соболевский В.М., Федотова Г.А., Черникова Л.И. Дифференциация тарифов на электроэнергию с учетом фактора надежности электроснабжения потребителей. // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 49: Надежность систем энергетики: экономические и информационные аспекты. – СПб., 1997. – С. 104-117.
6. Рынок электрической энергии и мощности в России: каким ему быть / Под ред. В.И.Эдельмана. – М.: Энергоатомиздат, 2000. – 364 с.
7. Воропай Н.И. Надежность систем электроснабжения. – Новосибирск: Наука, 2006. – 205 с..

## ОТЗЫВ НА ПУБЛИКАЦИЮ В ЖУРНАЛЕ «RELIABILITY: THEORY & APPLICATIONS» РЕФЕРАТИВНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ОБЗОРА В. ШЕРА<sup>3</sup>

---

Галина Федотова

•

**Уважаемый господин Шпер!**

Прочитала с интересом Вашу статью " РЕФЕРАТИВНЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР наиболее значимых публикаций в отечественной и зарубежной периодике по вопросам оценки надежности продукции, в том числе об опыте предприятий" (Журнал " Надежность: вопросы теории и практики", № 3,4, 2006 г.), считаю, что Вы сделали очень полезное дело.

Решила Вам написать, поскольку меня тоже волнует ситуация с надежностью в России вообще и в энергетике, в частности. Извините меня, пожалуйста, если энергетика не входит в круг ваших профессиональных интересов и поэтому в обзор не вошли труды ведущих специалистов России в области надежности энергетике. В первую очередь я имею в виду Юрия Николаевича Руденко и его последователей. Юрий Николаевич Руденко был основоположником теории надежности больших систем энергетике (его памяти посвящена страница на сайте "Gnedenko Forum"). Под его руководством более 20 лет велись научные исследования в области надежности систем энергетике, их подсистем и элементов. При непосредственном участии и под редакцией Ю.Н.Руденко были подготовлены и выпущены несколько монографий, других публикаций и сборников докладов, посвященных вопросам надежности. В соавторстве с И.А.Ушаковым им была написана книга "Надежность систем энергетике", изданная дважды в 1986 и 1989 гг. В период 1994-2000 гг. уже после его смерти вышел справочник "Надежность систем энергетике и их оборудования" в 4-х томах, под общей редакцией Ю.Н.Руденко, подготовленный еще при жизни. Справочник можно заказать по телефону (8 3952 423486) Федотовой Галине Алексеевне или по адресу: 664033 г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, Институт систем энергетике им. Л.А.Мелентьева.

Относительно регулярных семинаров по надежности, которые, по Вашему мнению, "исчезли", должна Вам сказать, что, начиная с 1973 года, постоянно и активно работает международный научный семинар "Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетике", созданный Ю.Н.Руденко.

Адрес сайта семинара: <http://www.sei.irk.ru/LES/> .

---

<sup>3</sup> К статье " РЕФЕРАТИВНЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР наиболее значимых публикаций в отечественной и зарубежной периодике по вопросам оценки надежности продукции, в том числе об опыте предприятий", Владимир Шпер (Журнал "Надежность: вопросы теории и практики", № 3,4, 2006 г.)

Более 300 специалистов по надежности (ученых и практиков) из России, ближнего и дальнего зарубежья, принимают участие в работе семинара. Если у Вас будет желание стать участником семинара, посетите, пожалуйста, сайт семинара, в новостях сайта есть информация о текущем заседании. По результатам заседаний выпускаются труды семинара, монографии, публикуются подборки статей в центральной печати. Сейчас в рамках семинара готовится к выпуску терминология по надежности в энергетике. Существует научная школа по надежности для молодежи.

Из всего этого следует, что проблемами надежности в энергетике занимаются и довольно активно, может быть, Ваше в этом участие будет всем очень полезно. Извините, если эта сфера деятельности Вам не интересна.

Всего доброго и до свидания.

С уважением Галина Федотова.

# О ФЕДЕРАЛЬНОМ ЗАКОНЕ «О ТЕХНИЧЕСКОМ РЕГУЛИРОВАНИИ» И ПРОБЛЕМЕ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Геннадий Ковалев

e-mail: [kovalev@isem.sei.irk.ru](mailto:kovalev@isem.sei.irk.ru)

После ознакомления с текстом закона «О техническом регулировании» [1] возникает сомнение, почему он должен иметь важное значение, как это утверждается в публикациях, например, [2–4], для электроэнергетических систем (ЭЭС) и, особенно, их надежности. Удивляет и название закона: в статье 2 «Основные понятия» определяется, что «техническое регулирование это правовое регулирование отношений» в соответствующей области. Уже это вносит огромную путаницу: выражение «техническое регулирование» использовалось задолго до принятия рассматриваемого закона совсем в другом смысле, а именно как **управление эксплуатацией технических и производственно-технических систем в плане поддержания их технических параметров в требуемых пределах**. Правильнее было бы назвать этот закон как «Закон о правовом регулировании технических требований к производству и продукции по безопасности, единству измерений, качеству и т. п.».

Применительно к электроэнергетике этот закон имеет отношение только в части обеспечения такого свойства отрасли, как безопасность. Если подходить к Закону формально юридически (а только так к нему и надо подходить, поскольку это Закон), то он в целом посвящен правовому регулированию отношений в области обеспечения безопасности отраслевых производственно-технических систем. В статье 7 Закона перечисляется 11 видов безопасности и только в конце списка добавляется «единство измерений».

Этот закон как бы завершает целую серию законов по безопасности конкретных объектов и отраслей, разработанных в период с 1993 по 2002 гг. [5–9].

Своеобразной является ст. 6 главы 2 Закона. Стоит ее привести здесь целиком.

## **Статья 6. Цели принятия технических регламентов**

1. Технические регламенты принимаются в целях: защиты жизни или здоровья граждан, имущества физических или юридических лиц, государственного или муниципального имущества; охраны окружающей среды, жизни или здоровья животных и растений; предупреждения действий, вводящих в заблуждение приобретателей.
2. Принятие технических регламентов в иных целях не допускается.

Из этой статьи следует, а ст. 7 подтверждает, что закон касается только безопасности и предупреждения определенных действий (см. п. 1 ст. 6). А пункт 2 ст. 6 существенно

ограничивает содержание принимаемых технических регламентов, из чего следует, что закон о техническом регулировании не может иметь никакого отношения к проблеме обеспечения надежности электроэнергетических систем (вывод чисто формальный, но юридически строгий).

Относительно электроэнергетической отрасли (да и других отраслей тоже) можно утверждать, что безопасность – важное основное свойство, но оно не единственное. К ним следует еще отнести надежность, экономичность, качество, экологичность (экологическая безопасность, кстати, в ст. 7 отсутствует, хотя и относится к безопасности).

Понятие «надежность» не употребляется в этом законе ни разу(!), поэтому можно утверждать, что между проблемой обеспечения надежности энергосистем и ФЗ «О техническом регулировании» нет никакой связи, хотя задача правового регулирования отношений в сфере обеспечения надежности электроэнергетики сейчас стоит достаточно остро.

В соответствии с нормативными документами (ГОСТами) надежность считается комплексным свойством объекта, одним из единичных свойств которой является безопасность [10, 11], но не только безопасность, а еще и такие единичные свойства надежности, как долговечность, безотказность, восстанавливаемость (ремонтпригодность), сохраняемость. Для электроэнергетики рассматриваются еще такие единичные свойства, как устойчивоспособность, живучесть и управляемость. Все эти свойства, наряду с безопасностью и качеством также безусловно должны быть охвачены правовыми отношениями при их обеспечении.

В России сохраняется устаревшая система стандартизации, сертификации, аккредитации и лицензирования. ФЗ «О техническом регулировании» серьезно меняет ситуацию, выводя стандарты на общенациональный уровень интеллектуальной собственности в виде технических и административных регламентов. Однако со всей очевидностью можно констатировать, что этот Закон создавался с большой поспешностью с участием не всегда добросовестных иностранных консультантов или не очень компетентными людьми на базе, возможно, случайных иностранных материалов. Тем не менее, ФЗ «О техническом регулировании» имеет важное значение для любой отрасли, включая электроэнергетику и для любых свойств продукции (процесса), включая надежность, так как регламентирует структуру стандартизации на всех уровнях (федеральном, отраслевом, производственном), узаконивает современные общемировые формы регламентов всех видов и декларирует их основное содержание. И поэтому неважно, будут ли формироваться регламенты, стандарты, сертификаты и лицензии в электроэнергетической отрасли в рамках или вне рамок этого закона.

Поспешность принятия «сырого», широко не обсуждавшегося закона, объясняется, видимо, тем, что потребовалось срочное создание своей российской национальной системы сертификации. Только с принятием этого Закона появилась возможность создания Общенационального Комитета по сертификации. В целом по закону можно сделать следующий вывод.

Закон имеет важное структурное назначение и должен иметь расширительное толкование.

Представляется, что ФЗ «О техническом регулировании», который по смыслу должен действительно иметь основополагающее значение для установления *правовых отношений в технической области*, на самом деле не достигает своих целей и должен быть после широкого обсуждения переписан более компетентно с охватом не только безопасности и единства измерений, но и других важнейших свойств технологических процессов и продукции.

Название закона также должно быть изменено.

## ЛИТЕРАТУРА

1. ФЗ о техническом регулировании. № 184 – от 27.12.2002.
2. Хорько В., Златкович Л. Закон «О техническом регулировании» и реформирование электроэнергетики: как достичь баланса. // Энергорынок. 2004. №11, часть 1 (ноябрь). – С. 52–53.
3. Кучеров Ю.Н., Китушин В.Г. Реформирование и надежность электроснабжения. // Энергорынок. 2005. №01, (14). – С. 40–47.
4. Раппопорт А.Н., Кучеров Ю.Н. Актуальные задачи обеспечения надежности электросетевого комплекса при развитии рыночных отношения в электроэнергетике. // Энергетик. 2004. - №10. – С. 2–6.
5. ФЗ о промышленной безопасности опасных производственных объектов. №116 – ФЗ от 21.07.1997.
6. ФЗ о безопасности гидротехнических сооружений. №117 – ФЗ от 21.07.1997.
7. ФЗ о пожарной безопасности. №69 – ФЗ от 21.12.1994.
8. ФЗ об охране окружающей среды. №7 – ФЗ от 10.01.2002.
9. ФЗ о борьбе с терроризмом. №130 – ФЗ от 25.07.1998.
10. ГОСТ 27.002-89. Надежность в технике. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 38 с.
11. Надежность систем энергетики. Терминология. Вып. 95. – М.: Наука, 1980. – 44 с.



Лицензия Минтранса России 001 № 005861  
**Круизно-прогулочный катер «Мираж»**

Комфортабельно размещаются 6 пассажиров, максимально – 8. Пассажирам предоставляются две изолированные каюты (каждая с двухспальной и односпальной койками) и кают-компания с четырьмя диванами.

В санблоке совмещаются туалет и горячий душ. Главный двигатель мощностью 70л.с. позволяет идти со скоростью 15 км/час.

Морской радар, спутниковый навигатор (GPS) и эхолот обеспечивают надежность плавания. Дизель-генератор 2,3 кВт питает бортовую сеть 220 в. Палуба безопасна и достаточно просторна для отдыха.

Район плавания не ограничен. Возможен маршрут по всему Байкалу, в том числе и в его наиболее красивую северную часть.

Катер может причаливать к необорудованному берегу, и пассажиры могут сойти на берег по безопасному трапу.

Имеются спасательный плот, спасательные жилеты, надувная рабочая лодка с подвесным мотором.

Кухня богата и разнообразна, особенно в части рыбных блюд.

#### **Расценки**

Стоимость фрахта катера 15000 руб. в сутки.

Стоимость обслуживания в группе из 4-6 человек – 1200 руб. в сутки за каждого пассажира, в группе из 2-3 человек – 1500 руб. и для 1 пассажира – 2500 руб. Сюда входит рекреационная плата в Прибайкальском Национальном парке и Байкало-Ленском заповеднике, трехразовое питание, доставка автотранспортом от аэропорта (вокзала) до катера и обратно.

Пребывание в других национальных парках, заповедниках и заказниках оплачивается дополнительно.

Особые условия (например, **целевые туры**) оговариваются и оплачиваются дополнительно.

#### **Условия и сроки**

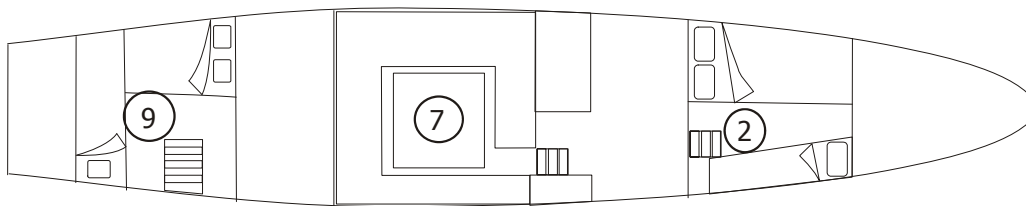
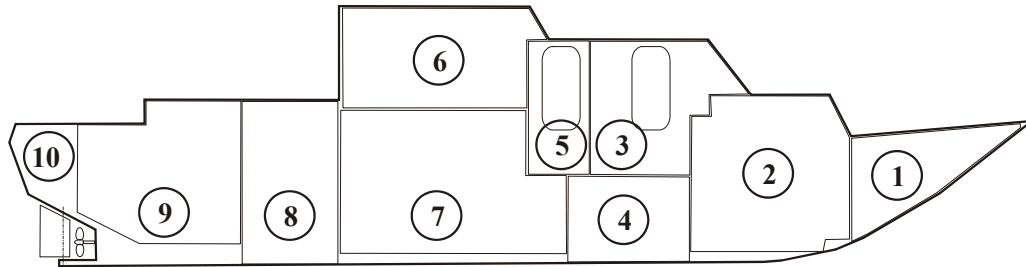
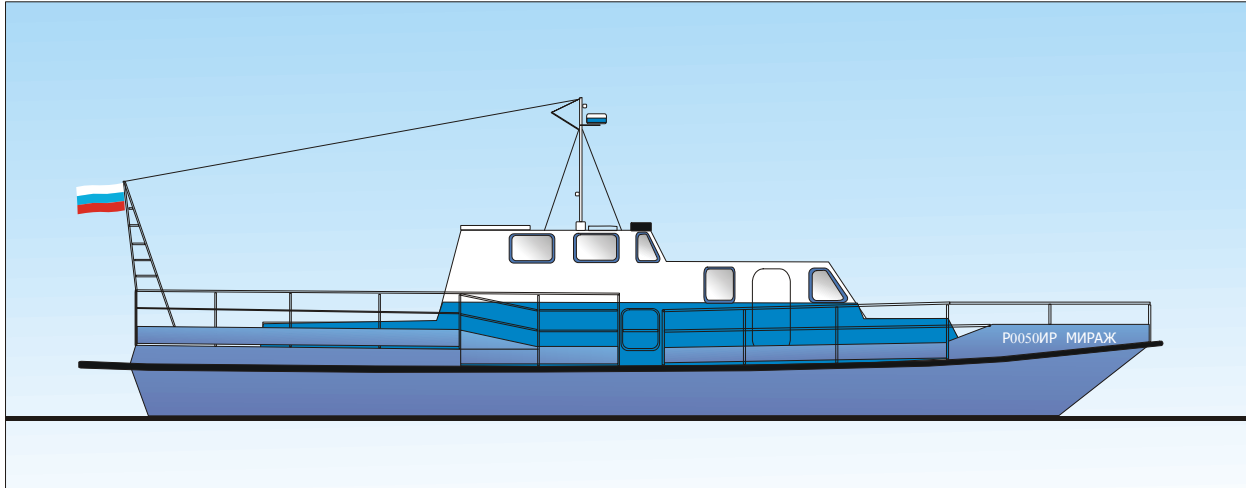
За 30 дней до начала тура необходимо внести аванс в размере 40% от стоимости тура. Позже этого срока заявка может быть принята, если в расписании имеется окно.

При получении аванса тур ставится в расписание. При отказе от тура аванс не возвращается.

Остальная часть оплаты вносится непосредственно на борту «Миража».

При возникновении форс-мажорных обстоятельств по причине штормовой погоды мы предложим Вам наиболее интересный альтернативный вариант программы и маршрута.





1. Форпик
2. Носовая каюта (двух и односпальная койки)
3. Камбуз
4. Трюм
5. Санблок
6. Хордовая рубка
7. Кают-компания
8. Машинное отделение
9. Кормовая каюта (двух и односпальная койки)
10. Ахтерпик

## Маршруты

Маршруты разрабатываются в соответствии с вашими пожеланиями и располагаемым временем. Приводимые далее варианты маршрутов являются примерными и могут быть скорректированы с учетом ваших желаний.

Туры могут быть **целевые**, например, **рыболовные, геологические, этнографические** и др. Программы и маршруты таких туров разрабатываются индивидуально с учетом ваших пожеланий и возможностей.

### Иркутск – Песчанка – Иркутск. 3 дня.

- 1-й день. Погрузка в Иркутске, при желании посещение Музея деревянного зодчества в дер. Тальцы и Лимнологического музея в Листвянке. Можно до Листвянки доехать машиной, чтобы сэкономить 4 часа пути по Иркутскому водохранилищу. Переход по Байкалу около 2,5 часов. Ночевка на мысу Кадильном (заповедная зона Национального парка, красивое место, есть хорошая баня).
- 2-й день. Переход до бухты Песчанка около 7 часов. Прогулки в Песчанке и окрестностях. Ночевка.
- 3-й день. Возвращение в Иркутск.

Для группы численностью 6 человек стоимость тура 66600 руб., стоимость одного человеко-дня – 3700 руб.

Для группы численностью 3 человека стоимость тура 58500 руб., стоимость одного человеко-дня – 6500 руб.

### Иркутск – Малое море (Сах-Юртэ). 3 дня.

- 1-й день Погрузка в Иркутске, при желании посещение Музея деревянного зодчества в дер. Тальцы и Лимнологического музея в Листвянке. Можно до Листвянки доехать машиной. Переход по Байкалу около 2,5 часов. Ночевка на мысу Кадильном (заповедная зона Национального парка, красивое место, есть хорошая баня).
- 2-й день Переход до бухты Песчанка около 7 часов. Прогулки в Песчанке и окрестностях. Переход до пос. Бугульдейка (около 3 часов). Ночевка.
- 3-й день Переход до острова Ольхон (около 7 часов). По пути осмотр природных геологических памятников. Отдых и прогулки на острове Ольхон. Погрузка на микроавтобус в пос. Сах-Юртэ и переезд в Иркутск (около 4 часов).

В стоимость тура дополнительно включается оплата холостого перегона катера в Иркутск в сумме 15000 руб. и оплата трансфера Сах-Юртэ – Иркутск в сумме 10000 руб.

Для группы численностью 6 человек стоимость тура 91600 руб., стоимость одного человеко-дня – 5190 руб.

Для группы численностью 3 человека стоимость тура 83500 руб., стоимость одного человеко-дня – 9280 руб.

**Иркутск – Малое Море. 7 дней.**

- 1-й день Погрузка в Иркутске, при желании посещение Музея деревянного зодчества в дер. Тальцы и Лимнологического музея в Листвянке. (Вариант: погрузка в Листвянке)  
Листвянка - мыс Кадильный (2,5 часа). Ночевка.
- 2-й день Переход до бухты Песчанка (7 часов). Прогулки в Песчанке и окрестностях. Ночевка.
- 3-й день Переход до острова Ольхон (8 часов). По пути осмотр природных геологических памятников. Отдых и прогулки на острове Ольхон.
- 4-й день Пешеходная экскурсия по долине реки Сарма. Месторождение гранатов. Переход на мыс Отто-Хушун (3 часа)
- 5-й день Мысы Зогдук, Зама (купание в теплом озере), Хобой. Ловля хариуса. Переход вдоль юго-восточного берега острова Ольхон до пролива Ворота Малого Моря (6 часов).
- 6-й день Осмотр фьордов Малого Моря (Хорин-Ирги, Загли, Мухор). Переход до пос. Бугульдейка (7 часов).
- 7-й день Переход в Иркутск (10 часов) с возможными остановками для осмотра природных достопримечательностей.

Для группы численностью 6 человек стоимость тура 155400 руб., стоимость одного человеко-дня – 3700 руб.

Для группы численностью 3 человека стоимость тура 136500 руб., стоимость одного человеко-дня – 6500 руб.

**Иркутск – Чивыркуйский залив. 10 дней.**

- 1-й день Погрузка в Иркутске. Переход по Иркутскому водохранилищу до Байкала (4 часа) и далее по Байкалу до бухты Песчанка около 10 часов. Прогулки в Песчанке и окрестностях. Ночевка.
- 2-й день Переход до острова Ольхон (8 часов). По пути осмотр природных геологических памятников. Отдых и прогулки на острове Ольхон.
- 3-й день Переход по Малому Морю (5 часов), отдых на теплом озере Зама, переход на мыс Рытый (4 часа). Рыбалка на хариуса.
- 4-й день Переход в Чивыркуйский залив (7 часов). При благоприятных погодных условиях по желанию возможен заход на заповедные Ушканьи острова для осмотра лежбища нерпы (с разрешения смотрителя и за дополнительную плату). Горячие источники бухты Змеиной.
- 5-й, 6-й, 7-й день Регистрация в администрации Национального парка (оплата пребывания). Осмотр островов и бухт Чивыркуйского залива. Рыбалка на хариуса, окуня и щуку. Пляжный отдых.
- 8-й день Переход в район Малого Моря.
- 9-й день Переход в район пос. Голоустное – мыс Кадильный с возможными остановками для осмотра природных достопримечательностей.
- 10-й день Переход в пос. Листвянка, посещение Лимнологического Музея. Переход в пос. Тальцы, посещение музея деревянного зодчества. Возвращение в Иркутск.

Для группы численностью 6 человек стоимость тура 222000 руб., стоимость одного человеко-дня – 3700 руб.

Для группы численностью 3 человека стоимость тура 195000 руб., стоимость одного человеко-дня – 6500 руб.

### **Иркутск – Север Байкала. 12 дней.**

- |                     |  |
|---------------------|--|
| 1-й день            | Погрузка в Иркутске. Переход по Иркутскому водохранилищу до Байкала (4 часа) и далее по Байкалу до бухты Песчанка около 10 часов. Прогулки в Песчанке и окрестностях. Ночевка.               |
| 2-й день            | Переход до острова Ольхон (около 8 часов). По пути осмотр природных геологических памятников. Отдых и прогулки на острове Ольхон.  |
| 3-й день            | Переход по Малому Морю (около 5 часов), отдых на теплом озере Зама, переход на мыс Рытый (около 4 часов). Рыбалка на хариуса. Мыс Шартла (2 часа)..  |
| 4-й день            | Мысы Покойники, Саган-Морян, Большой и Малый солонцовые, бухта Заворотная, мысы Кедровые, река Ледяная (около 7 часов). Экскурсия по берегу и речке. Рыбалка на хариуса. Мыс Елохин (1 час). |
| 5-й день            | Мыс Малая коса (3 часа), отдых на Щучьем озере. Губа Баргунда (2 часа). Мыс Котельниковский (1,5 часа), посещение курорта на термальном источнике. Губа Богучанская (5 часов).               |
| 6-й день            | Город Северо-Байкальск (2 часа), пос. Нижнее-Ангарск (1 час), регистрация в администрации. Губа Ая (4 часа).   |
| 7-й день            | Пешеходная экскурсия на озеро Фролиха, рыбалка на ленка, щуку, окуня.  |
| 8-й день            | Экскурсии в окрестностях губы Ая: губа Фролиха, курорт Хакусы на термальном источнике, «поющие пески» мыса Турали.   |
| 9-й, 10-й, 11-й дни | <b>Вариант 1.</b> Пляжный отдых на острове Ярки. Рыбалка на щуку и окуня.<br><b>Вариант 2.</b> Экскурсия на альпийские луга с вьючными оленями и каюром (за дополнительную плату).           |
| 12-й день           | Отправление самолетом или теплоходом «Комета» в Иркутск, либо поездом по трассе БАМ.   |

В стоимость тура дополнительно включается оплата холостого перегона катера в Иркутск (2 суток) в сумме 30000 руб.

Разумеется, можно вернуться в Иркутск на «Мираже», что предполагает увеличение общей продолжительности путешествия или корректировку программы с соответствующей корректировкой стоимости.

Для группы численностью 6 человек стоимость тура 282000 руб., стоимость одного человеко-дня – 4700 руб.

Для группы численностью 3 человека стоимость тура 255000 руб., стоимость одного человеко-дня – 8500 руб.

Стоимость аренды оленя – 500 руб. в сутки, олень перевозит до 30 кг (самка) или 35 кг (самец) груза. Сопровождение каюра стоит 3000 руб. в сутки.

Возможны пешие экскурсии в Байкало-Ленском заповеднике (Берег бурых медведей) в сопровождении егеря. Сопровождение егеря стоит 3000 руб. в сутки.



## Рыболовные туры

Рыболовство на Байкале регламентируется федеральным и местным законодательством.

Возможна рыбалка сетями\*, корабликом, спиннингом и удочкой при условии приобретения соответствующей лицензии. В лицензии указываются места и даты рыбалки, имя рыбака, вид и количество снастей, вид рыбы.

В нерестовые периоды рыбалка запрещена: на омуля – с 20 августа до 30 сентября, на ленка, хариуса и щуку – с 1 мая по 20 июня. Рыбалка на байкальского осетра и сига запрещена постоянно.

Посещение большей части мест хорошей рыбалки регулируется правилами заповедников, заказников и национальных парков.

Лицензии и разрешения на рыбалку и посещение территорий следует приобретать заблаговременно, чтобы не терять время в путешествии.

## Основные виды рыб спортивной рыбалки

Вид рыбы	Эффективные снасти	Время интенсивного клева	Наиболее интересные места рыбалки
Омуль	Сети*	Июнь, начало июля, конец августа, октябрь	Малое море, северная часть Байкала
Хариус	Спиннинг, кораблик. Верховые и грузовые мушки.	Июнь, начало июля, конец августа	Северная часть Байкала, мысы Рытый, Солонцовые. Особенно северо-восточный берег Байкала
Ленок	Спиннинг. Блесны, твистеры, верховые и грузовые мушки	Июнь, начало июля	Устьевые зоны рек северо-восточного берега: Фролиха, Кабанья, Сосновка. Озеро Фролиха.
Таймень. Очень редкая добыча!	Спиннинг. Искусственные мыши, блесны.	Июнь, начало июля	Устьевые зоны рек северо-восточного берега: Фролиха, Кабанья, Сосновка. Озеро Фролиха.
Щука	Спиннинг. Блесны, твистеры.	Июнь, начало июля, конец августа	Чивыркуйский залив. Озера на мысах Большая коса, Мужинай. Ярки, озеро Фролиха.
Крупный окунь	Спиннинг. Блесны, твистеры.	Июнь, начало июля, конец августа	Чивыркуйский залив. Ярки, озеро Фролиха

*\*) Использование сетей разрешено только для лицензированных промысловых предприятий. По договоренности с промысловиками туристы могут участвовать в постановке и подъеме сетей.*

Опытные рыбаки привозят снасти с собой. На «Мираже» найдутся снасти для «чайников».

*Делайте заявки заранее, нам нужно время для разработки и согласования с вами программы и маршрута, а затем для приобретения разрешений и лицензий.*



## State licence 001 #005861 Boat "Mirage"

Cruises at 8 knots.

Marine radar, GPS and echo sounder are used for secure navigation.

Up to six passengers comfortably.

There are two cabins with double and single beds each and bedding.

The lounge has four divans that can also be used as additional sleeping places.

There is a hot shower and toilet.

Diesel-generator supplies ship net 220 V.

The deck is safe and spacious for rest and promenade.

Region of floating is unlimited. Every point on Baikal is available.

Yacht can moor at uninhabited coast. Passengers can go ashore by safe ship's ladder.

The ship is equipped with life buoys, life-vests and a sea-boat.

The cuisine is good and diverse. The fish dishes are our specialty.

### Terms and conditions

Freight cost is 450 euro per day. The discount is possible depend on the duration of the travel and the season. Passengers pay empty mileage if the start or end points of the route isn't Irkutsk.

**Standard consumer services** cost is 40 euro per person per day for the group of 4-6 persons. The same is 55 euro per person for 2-3 passengers and 90 euro for single passenger.

The cost includes all accommodations, food, transport in the city, entrance fees to museums and nature areas provided for by the program.

**Special extra conditions as the tours for a specified purpose** (for example fishing) should be extra stipulated and remunerated .

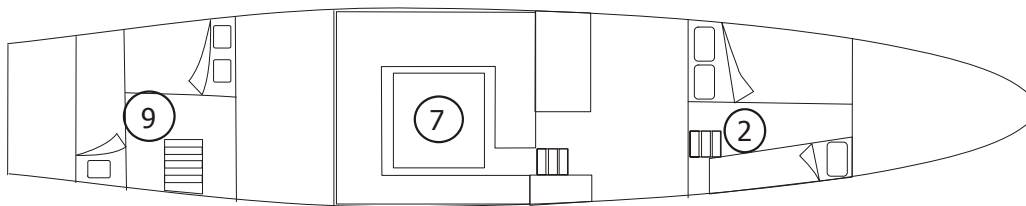
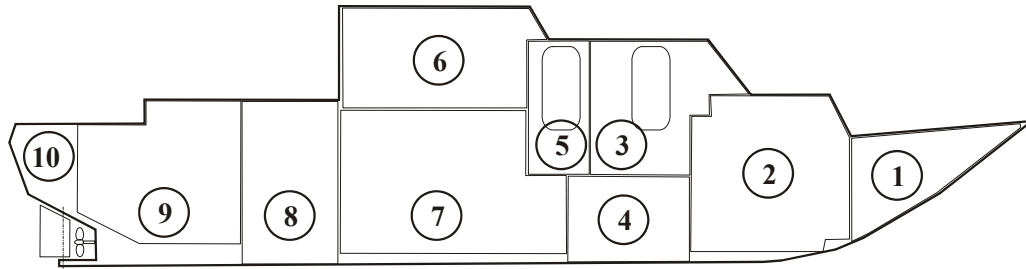
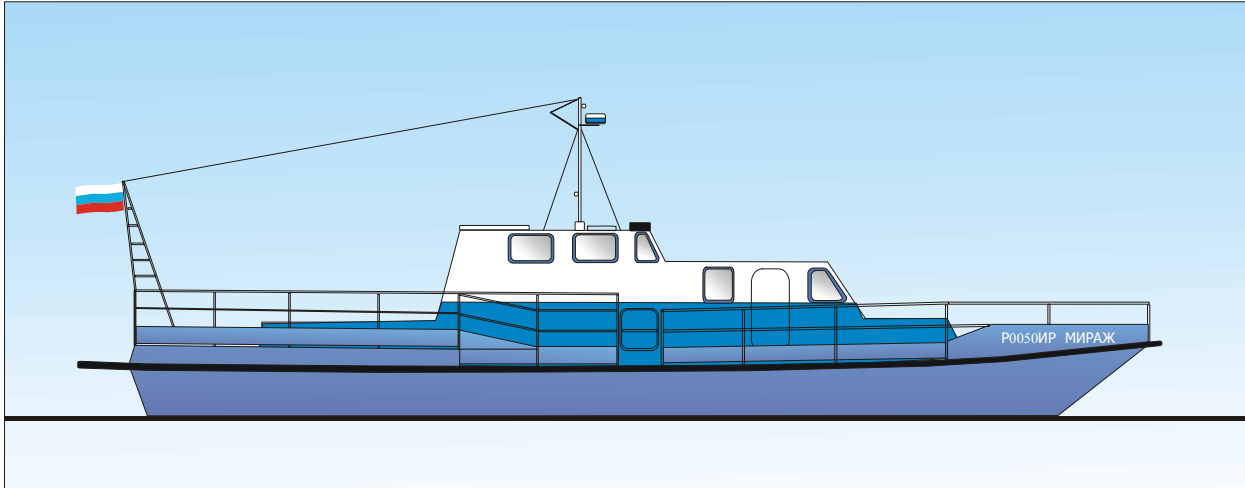
Transfer by car outside the city is 50 euro per 100 Km.

Deposit 40% of balance must be received at 30 days before travel. After that the travel is fixed in the schedule. Deposit is no recoverable in case of consumer refuses from the travel.

We can take the order later if there is a window in the schedule.

Final payment is due on the board of "Mirage".

Program and itinerary can be changed on account of heavy weather. We will do the utmost of our power to realize the best alternative program in such force majeure conditions.



1. Forepeak
2. Forward cabin (single and double berths)
3. Caboose
4. Hold
5. W.c. and shower
6. Pilot house
7. Saloon
8. Engine-room
9. Stern cabin (single and double berths)
10. After-peak

## PROGRAMS

There are all sorts of programs Baikal trips by the "Mirage".

**Traveling to the very North of Baikal** requires at least 14 days. The highest mountains on the shore, the most beautiful landscapes, the best fishing (including Siberian trout), many hot springs and health resorts; excursions to alpine meadows with reindeer, etc., all of this are situated there.

**Acquaintance of middle part of the lake (Rity Cape, Ushkany Islands, Chivirkuisky Galf)** takes 12 days.

It is possible to observe **the region of Small Sea and Olkhon Island** during 5 days.

We can **customize the program** at your desire. In particular we can include the city excursions in Irkutsk and visits the museums.

### A TWO DAY EXCURSION

**Day 1.** Arrival to Irkutsk. Taken to the "Mirage". Cruise up the Angara River.

Anchor at Taltsi settlement for Ethnography Museum and then at Listvianka for Museum of Lake Baikal.

Cruise up the northwest coast of Baikal (about 6 hours). Anchor at Peschanka Bay. Overnight.

**Day 2.** Viewing the nature in one of the most popular coastal sites.

Afternoon going back. A one-hour stop at Kadilny Cape to view the nature phenomena.

Anchor at Listvianka.

Transfer to Irkutsk by car.

### A TYPICAL FIVE DAY CRUISE PROGRAM

**Day 1.** Meeting at the airport (railway station) of Irkutsk. Taken to the "Mirage". Cruise up the Angara River. Anchor at Taltsi settlement for Ethnography Museum and then at Listvianka for Museum of Lake Baikal. Anchor at Cadilny Cape (reserved territory of Baikal National Park) for overnight.

**Day 2.** Cruise up the northwest coast of Baikal. A two-hour stop at Peschanka Bay to view nature in one of the most popular coastal sites. Cruising continues north to Aia Bay, where we will take another rest and hike for an hour. The day wraps up with a cruise through the Vorota Strait – gate into the Maloe Moree (Little Sea). Anchor near Horse Head Cape on Olkhon Island.

**Day 3.** Walking tour of Horse Head Cape to see the small bays and fiords of Olkhon Island. Boating excursion around the Maloe Moree to become familiar with this remarkable region. Visit to Khoshir village and Museum of settlement. Seeing the famous Shaman Rock. Anchor off coast at Otto Khushun Cape. Bonfire.

**Day 4.** Cruise continues to the North extremity of Olkhon Island to see sights of Three Brothers Cape, Khoboy (canine) Cape and Virgin Rock. Boating to Khagden Khale Bay. Anchor.

**Day 5.** Cruise continues around the Maloe Moree: small islands, bays and fiords.

The bus will wait for passengers at Sakh-Yurte settlement to lift them to airport (railway station) of Irkutsk (about 4 hours).



## A TYPICAL TWELVE DAY CRUISE PROGRAM

**Day 1.** Arrival to Irkutsk.. Taken to the "Mirage". Excursion of the city. Afternoon cruise up the Angara River. A one-hour stop at Listvianka to view the souvenir market. Anchor at Bolshie Koty settlement.

**Day 2.** Cruise up the northwest coast of Baikal. A short stop at Goloustnoye settlement to visit Orthodox church of seafarer's protector Saint George. A two-hour stop at Peschanka Bay to view nature in one of the most popular coastal sites. Cruising continues north to Aia Bay, where we will take another rest and hike to view some geological phenomena. The day wraps up with a cruise through the narrows Olkhon Gate past the Horse Head Cape on Olkhon Island. Anchor.

**Day 3.** Hiking in surroundings of Horse Head Cape to view a small bays and fiords. Cruising continues north to the village of Khoshir on Olkhon Island. Walking tour of Khoshir and visit to famous Shaman Rock. Also visit Museum of Settlement History and Buryat's Ethnography. Cruise continues to Otto-Khushun Cape. Anchor. Bonfire. Barbecue of fish.

**Day 4.** Cruising continues up to north. Stop at Zama Bay for hiking and swimming. Cruising continues to Rity Cape. Fishing for grayling. Anchor off coast at Shartla Cape.

**Day 5.** Cruise across Baikal to Ushkany Island, the primary habitat for the world's only fresh water seal, known as Nerpa. Register with ranger at guard post of Reserve. Opportunities to watch and photograph the seals on the rookery. Continue cruise to Chivirkuisky Gulf. Viewing hot mineral springs. Anchor.

**Day 6.** Cruise to observe Chivirkuisky Gulf. Visit the Kurbulik settlement-center of region at the base of the peninsula known as 'Saint's Nose'. Sport fishing for big pike and perch.

**Day 7.** The water in Chivirkuisky Gulf is relatively warm. There are many sandy beaches to invite you for leisure rest. Time spent viewing Krutaia (Abrupt) and Krokhalinaia (Duck) and another Bays as well some small islands. Sport fishing for big pike and perch.

**Day 8.** Crossing Baikal to Sagan-Morian Cape. Observing Pokojniky Cape with central post of Brown Bears Reserve. Cruising up to south to Rity Cape. Anchor. Hiking in surroundings. Fishing for grayling.

**Day 10.** Cruise back to Irkutsk. View the set of beautiful capes at the north end of Olkhon Island. Anchor at Olkhon.

**Day 11.** Cruise south along the coast. Stop in the region of Buguldeika- Khomuty. Rest 2 hours. Anchor at Cadilny Cape cordon of National Park. By option: Russian bath with sweating-room.

**Day 12.** Cruise to Listvianka settlement and visit to the Baikal Ecological Museum. Continue cruising up Angara River. Stop at the Museum of Wooden Architecture and Ethnography in Taltsy settlement. Enjoy a rest and dinner on the shore. Evening arrival in Irkutsk.

### Available Points of Interest

**Art Museum.** Collection of classic and modern paintings.

**The Epiphany Cathedral.** Art Museum department. Siberian art.

**Regional Studies Museum.** The history of settling, local religions, ethnography, flora and fauna of the Irkutsk region.

**Church of the Savior.** The oldest stone building of Irkutsk (1706). Regional Studies Museum department. Ethnography and local nature exhibition.

**Mineralogical Museum.** The samples of minerals and precious stones of Eastern Siberia mineralogical province, diverse gems, jewels and ornaments.

**The Houses of Trubetskoj and Volkonsky.** The history of The Decembrists movement, how they lived in Siberia exile, culture of Siberia in XIX century.

**Baikal Ecological Museum of Academy of Sciences.** (Listvianka settlement, 65 km far from Irkutsk, by car or yacht) Geological history of the lake, biology, flora and fauna, stuffed animals, birds and fishes, history of Baikal Limnological investigations, aquarium.

**Museum of Wooden Architecture of the XVII-XIX centuries.** (Taltsy settlement, 47 km far from Irkutsk, by car or yacht) Historical samples: fortress, church, school, diverse houses, etc, also Buryat dwellings, ethnography. The programs of folk singers and dancers (occasionally).

**The Church of the Raising of the Cross.** Active church. Rich collection of the icons.

**The Church of the Sign.** The Main Cathedral of Irkutsk Eparchy.

**Catholic Church.** Active church.

**Synagogue.** Active church.

**Museum of Territory Settling.** (Khuzhir settlement, Olkhon Island, during the around Baikal yacht trip) Archaeological and historical samples, Buryat ethnography and mode of life.

**Studios of Artists.** Established or young painters, traditional or modern art (as you wish), viewing the collections, possibility to buy the pictures.

**Picture-galleries, art and antique shops.** Pictures, antique, objects are of stone, ornaments, bijoux, gems and jewels.



ISSN 1932-2321

© **RELIABILITY: THEORY & APPLICATIONS**, San Diego, 2007

<http://www.gnedenko-forum.org/Journal/index.htm>