ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО К ОЦЕНКЕ ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ДАННЫХ ОБ ОТКАЗАХ В ПЕРИОД ДЕЙСТВИЯ ГАРАНТИЙНЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ

Марк Каминский, (Колледж Парк, США)
Василий Кривцов, (Диборн, США)

study

1. Введение

В течение многих лет большинство используемых моделей процесса возникновения отказов было представлено *процессом восстановления* (ПВ) и *неоднородным пуассоновским процессом* (НПП). В рамках приложений к восстанавливаемым системам, ПВ используется для моделирования ситуаций с восстановлением до состояния «как новое» (полное восстановление), в то время, как НПП применяется в ситуациях восстановления до состояния «как было перед отказом» (минимальное восстановление). В общем, эти два состояния можно рассматривать в качестве крайних, как с точки зрения теории, так и с точки зрения практики. Для того, чтобы избежать таких крайних «экстремальных» оценок, в последние годы было предложено несколько обобщающих моделей. В этой связи можно упомянуть работы Brown и Proschan (1982), Kijima и Sumita (1986), Finkelstein, (1993), Lindqvist (1999)). Особый интерес вызывает модель *обобщенного процесса восстановления* (ОПВ). Эта модель была предложена Kijima и Sumita (1986 г.) для описания промежуточного состяния восстановления («лучше чем было перед отказом, но хуже чем новое») и позволяет получить уравнение ОПВ, которое является обобщением известного уравнения восстановления. К сожалению, это уравнение не имеет решения в замкнутом виде, что, по сути, ставит под вопрос возможность соответствующего статистического оценивания.

Целью настоящей работы является статистическая оценка параметров ОПВ, на основаннии (группированных) данных стандартной одномерной гарантии. Рассматриваемое ниже решение может применено к оценкам параметров моделей Kijima I и II (Kijima, 1989).

2. Обобщенный процесс восстановления

Kijima и Sumita в 1986 году ввели понятие ОПВ, который позволяет моделировать уровень восстановления ремонтируемой системы от состояний «как новое» до «как было перед отказом». ОПВ вводится через понятие *виртуального возраста*.

Пусть A_n виртуальный возраст системы сразу же после *n-го* восстановления. Если $A_n = y$, а время на $(n + 1)$-й отказ X_{n+1}, то это время распределено согласно следующей функции распределения:

$$F(X \mid A_n = y) = \frac{F(X+y) - F(y)}{1 - F(y)} \quad ,$$

где $F(X)$ - функция распределения времени-до-первого-отказа (ВДПО) для новой системы. Сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ ,$$

при $S_0 = 0$, называется *реальным возрастом* системы.

В рамках ОПВ это предполагает, что *n-ое* восстановление может устранить нанесенный ущерб только во временном промежутке между $(n-1)$-ым и *n-ым* отказом, таким образом, соответствующий виртуальный возраст после *n-го* ремонта

$$A_n = A_{n-1} + q X_n = q S_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

где q - *коэффициент восстановления* (или *коэффициент эффективности восстановления*) и виртуальный возраст новой системы $A_0 = 0$, причем ВДПО – распределение согласно $F(t|0) \equiv F(t)$.

Время между первым и вторым отказами распределено согласно уравнению (1) с $A_1 = qX_1$. Соответственно, время между вторым и третьим отказами распределено согласно уравнению (1) с $A_2 = q\,(X_1 + X_2)$, и так далее.

Понятно, что при q = 0, полученный процесс совпадает с обычным ПВ, т.е., моделируется полное восстановление. При $q = 1$, система восстановливается до состояния "как было перед отказом ", что описывается НПП. Случай $0 < q < 1$ соответствует промежуточному состоянию «лучше чем было перед отказом но хуже чем новое». Наконец, при $q > 1$, виртуальный возраст $A_n > S_n$, то есть, ремонт ухудшает состояние системы по сравнению с тем в котором она была перед отказом.

Ожидаемое количество отказов в промежутке (0, t], которое называют *кумулятивной функцией интенсивности*, определяется решением уравнения ОПВ (Kijima, et al., 1988):

$$H(t) = \int_0^t \left(g(\tau \mid 0) + \int_0^\tau h(x) g(\tau - x \mid x) dx \right) d\tau, \qquad (2)$$

где

$$g(t\,|\,x) = \frac{f(t+qx)}{1-F(qx)}, \quad t, x \ge 0,$$

- функция интенсивности условного распределения такая, что $h(t) = d(H(t))/dt$, $g(t|0) = f(t)$, и $F(t)$ и $f(t)$, - функция распределения и плотность вероятности ВДПО.

Решение уравнения (2) в аналитическом виде невозможно, и даже численное решение трудно реализовать, поскольку уравнение содержит повторяющуюся бесконечную систему (Finkelstein, 1997). Решение, с использованием метода Монте-Карло, тем не менее, возможно, и оно было получено Каминским и Кривцовым в 1988 году (Kaminskiy & Krivtsov,1998).

3. Данные о работе изделия в период действия гарантийных обязательств

Типичные данные об отказах в период действия гарантии собраны в результате наблюдения за большим числом идентичных ремонтируемых устройств. Объём выборки, N_0, известен и может быть принят постоянным во времени (т.е., число списанных изделий пренебрежимо по отношению к N_0). Следующая таблица даёт пример реальных данных о работе изделия в период действия гарантийных обязательств, которые будут проанализированы ниже.

Таблица 1. Пример данных о работе изделия в период действия гарантийных обязательств для восстанавливаемой системы. Объём генеральной совокупности, N_0 = 100000.

Месяцы в эксплуатации, t	3	6	9	12	15	18	21	24	27
Среднее число отказов на систему, $H_{emp}(t)$	0.03	0.09	0.14	0.24	0.38	0.54	0.70	0.90	1.17

4. Процедура оценивания

Основанная на гарантийных данных эмпирическая кумулятивная функция интенсивности, $H_{emp}(t)$, вычисляется следующим образом:

$$H_{emp}(t_i) = \frac{N(t_i)}{N_0}, \quad t_i < t_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3)$$

где $N(t)$ – кумулятивное количество отказов на промежутке времени (0, t].
Обозначим решение уравнения ОПВ (2), полученное с использованием метода Монте-Карло как

$$H_{mc}(t) = f(F(\tau/\alpha), q, t)), \qquad (4)$$

где $F(\tau/\alpha)$ – функция распределения ВДПО с неизвестным вектором параметров, α.

Используя (3) и (4), оценка методом наименьших квадратов параметров α и q ОПВ может быть найдено из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\min_{\alpha,\, q}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{H}_{emp}(t_i) - \mathrm{H}_{mc}(F(\tau\,|\,\alpha), q, t_i))^2\right)$$

5. Примеры

5.1 Моделированные данные

Эмпирическая кумулятивная функция интенсивности, $H_{emp}(t)$, была получена моделированием ОПВ с Вейбулловски распределенным ВДПО (параметр формы, β = 1.5, параметр масштаба, Θ = 1) и параметром восстановления, $q = 0.5$. Моделирование опиралось на N_0 = 100 реализаций на интервале, $T = 5\Theta$.

Оценки β, Θ и q были получены на основании n_0 = 1000 реализаций ОПВ и имеют следующие значения: $\hat{\beta} = 1.48$, $\hat{\theta} = 1.00$, $\hat{q} = 0.49$. Таблицы 2 - 3 дают пример ковариационной и корреляционной матриц полученных оценок параметров ОПВ для 30 моделируемых эмпирических кумулятивных функций интенсивности, $H_{emp}(t)$.

Таблица 2. Пример корреляционной матрицы

	β	Θ	q
β	1.000		
Θ	0.702	1.000	
q	0.079	-0.523	1.000

Таблица 3. Пример ковариационной матрицы

	β	Θ	q
β	$2.6\ 10^{-3}$		
Θ	$1.9\ 10^{-3}$	$2.8\ 10^{-3}$	
q	$2.3\ 10^{-4}$	$-1.6\ 10^{-3}$	$3.2\ 10^{-3}$

Для эмпирической кумулятивной функцией интенсивности, построенной на основе N_0 = 100000 реализаций (что является типичным случаем для компании с массовым производством), процедура оценки находит исходные параметры ОПВ с практически нулевой дисперсией.

5.2 Реальные данные

Для оценки параметров ОПВ были использованы гарантийные данные, собранные за первые 18 месяцев эксплуатации (см. Таблицу 1). Распределение Вейбулла с параметром формы β, и параметром масштаба Θ, предпологалось в качестве распределения ВДПО. Тонкая сплошная линия на рисунке 1 –оценка функции ОПВ по методу наименьших квадратов в следующей области поиска параметров: $\{1 < \beta < 2,\ 10 < \Theta < 50,\ 0 < q < 1\}$.

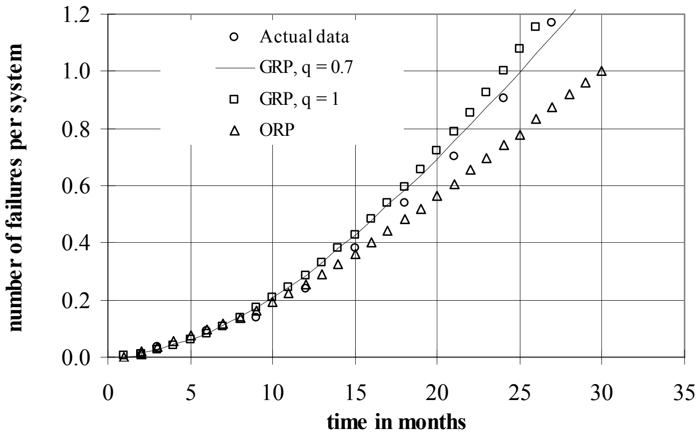

Рисунок 1. Оценка функции ОПВ по методу наименьших квадратов.

Таким образом были получены следующие оценки параметров ОПВ: $\hat{\beta} = 1.8$, $\hat{\theta} = 24$, $\hat{q} = 0.70$. Как следует из Рисунка 1, оцененная функция ОПВ показывает хорошее соответствие данным не только в интервале (0, 18] месяцев (использованном для нахождения оценок), но также и в остальном интервале (18, 30] месяцев. На Рисунке 1 также показаны крайние условия восстановления, соответствующие ПВ (q = 0) и НПП (q = 1).

В заключении заметим, что рассмотренный подход практически применим не только для оценки параметров ОПВ, но также и для *прогноза* функции ОПВ, которая часто используется при анализе гарантийных данных.

Литература

1 M. Brown, and F. Proshan, "Imperfect Maintenance" - in *Crowley J. and Johnson R. (ed) Survival Analysis*. Vol. 2, 1982, pp 179-188.

2 M. S. Filkenstein, "The Concealed Age of Distribution Function and the Problem of General Repair", *Journal of Statistical Planning and Inference*, # 65, 1997, pp. 315-321.

3 M. P. Kaminskiy and V.V. Krivtsov, "A Monte Carlo Approach to Repairable System Reliability Analysis" - in *Probabilistic Safety Assessment and Management*, Springer-Verlag London Ltd, 1998, pp. 1063-1068.

4 M. Kijima and N. Sumita, "A Useful Generalization of Renewal Theory: Counting Process Governed by Non-negative Markovian Increments", *Journal of Applied Probability*, # 23, 1986, pp. 71-88.

5 M. Kijima, "Some Results for Repairable Systems with General Repair", *Journal of Applied Probability*, # 26, 1989, pp. 89-102.

6 H. Lindqvist, "Statistical Modeling and Analysis of Repairable Systems" - in *Statistical and Probabilistic Models in Reliability*, Birkhauser, Berlin, 1999, pp. 3-25.