ПРЕДЕЛЬНЫЕ РЕДЕЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ И РАЗРЕЖЕНИЕ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ.

Исследование частично поддерживалось грантом Министерства
Образования и Науки Украины , проект No 01.07/103.

Виталий А. Гасаненко

gs@imath.kiev.ua или gsn@ckc.com.ua

Институт математики Национальной Академии Наук Украины,
Терещенковская 3, 252601, Киев, Украина.

Ключевые слова: редеющие процессы, коэффициент перемешивания, производящая функция, процессы восстановления.

Резюме. В статье изучаются достаточные условия аппроксимации редеющих процессов с перемешивание процессами восстановления. Также рассматривается приложение полученных результатов к конкретной практической проблеме.

Предельные теоремы для редеющих процессов были получены многими авторами с использованием различных техник [1-8] . В статье [1] была построена первая модель Бернуллиевского разрежения процесса восстановления и получено элегантное доказательство аппроксимации такого рода процессов Пуассоновским процессом. Проблема необходимых и достаточных условий для такого рода аппроксимации была в работах [3, 5]. Общие процедуры построения редеющих процессов из начальных процессов рассматривались в работах. Авторы статей [2,7, 9, 13] получали новые результаты для конкретных прикладных моделей с помощью доказанных теорем о редеющих процессах.

Эта статья в некоторой степени есть продолжение статьи [9]. В секции 1 доказывается предельная теорема. Доказательство самодостаточно. Оно не использует результатов других авторов. В секции 2 рассматривается приложение полученных результатов к конкретным моделям..

Если мы имеем строго возрастающую почти наверное последовательность положительных случайных величин $\{\tau_i, i \geq 0\}$, $\tau_{i+1} > \tau_i$, $i \geq 0$, тогда мы можем определить случайный поток точек – событий на временной оси. Момент появления i-го события совпадает с моментом времени τ_i. Любой подпоток этого потока называется редеющим потоком. Таким образом i- ое событие редеющего потока имеет номер $\beta(i)$ в начальном потоке (понятно, что $\beta(i) \geq i$). Вначале мы будем изучать последовательность $\beta(i)$, $i \geq 0$ и затем мы построим эту последовательность для конкретной модели редеющего процесса.

1. Предельная теорема.

Рассмотрим последовательность дискретных случайных величин

$$\xi(t),\ t\in\{0,1,2,\dots\},\quad \xi(t)\in\{1,2,\dots\}.$$

Мы собираемся исследовать распределение следующей последовательности

$$\beta(1)=\xi(0),\quad \beta(m+1)=\beta(m)+\xi(\beta(m)),\quad m\ge 1.$$

С этой целью введем следующие объекты

$$v(t)=\max\{m\ge 1:\beta(m)\le t\},\qquad \alpha(k)=\sup_{x\ge 0}\ \sup_{A\in F_{\le x},\,B\in F_{\ge x+k}}|P(B/A)-P(B)|,$$

здесь $F_{\le x}=\sigma(\xi(s),\, s\le x)$, $F_{\ge x}=\sigma(\xi(s),\, s\ge x)$.

Утверждение. *Следующее неравенство выполняется для любого* $x>0$

$$P(\beta(m)<x)=\max_{t\le x}P(\xi(t)<\frac{x}{m})([x]+1).$$

Доказательство. Из определения $\beta(m)$ мы имеем

$$\{\beta(m)<x\}\subseteq\bigcap_{i=1}^{[x]+1}\left\{\xi(i)<\frac{x}{m}\right\}$$

из последнего следует доказательство.

Теперь мы докажем предельную теорему для случайных величин $\beta(m)$ в случай когда процесс

$\xi(t)$ от параметра n. Зависимость от n означает, в этом случае, что последовательность процессов $\xi_n(t)$ должна сходиться к бесконечности (в некотором смысле) при фиксированном t при $n \to \infty$. Такая ситуация возникает в практических задачах очень часто. Параметр n есть индекс для всех величин, которые определяются процессом $\xi_n(t)$. Например, величина $v(t)$ преобразуется в $v_n(t)$. Пусть $\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}$ обозначает слабую сходимость случайных величин или функций распределений. Пусть $N(t)$ равно числу восстановлений на интервале $[0,T]$ процесса восстановления $\left\{\sum_{k=1}^{i}\eta_k,\ i\geq 1\right\}$. Этот процесс имеет следующее свойство

$P(\eta_1 \leq x) = R_1(x), \quad P(\eta_i \leq x) = R_2(x), \ i \geq 2.$ Здесь $R_1(\cdot)$, $R_2(\cdot)$ есть функции распределения.

Теорема 1. *Если существует такая последовательность чисел $c_n \to \infty$, что выполняются следующие условия :*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\xi_n(0)c_n^{-1} \leq x\right) = R_1(x);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{a\leq\delta\leq t} \left| P(\xi_n([c_n\delta])c_n^{-1} \leq y) - R_2(y) \right| = 0;$

δ *-- любое положительное число,* $t < \infty$ *,функции* $R_i(y)$ *есть непрерывные функции распределения для* $y > 0$*;*

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(c_n)c_n = 0,$

тогда $v_n(c_n t) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} N(t)$ *для каждого фиксированного* t.

Доказательство. Мы обозначим через $\beta_k(m)$, $m \geq 1$ последовательность, которая определяется через последовательность $\beta(m)$ при условии $\xi(0) = k$. Так что
$P(\beta_k(m) = s) = P(\beta_k(m) = s / \xi(0) = k)$.
Далее $v(k,t) = \max\{m \geq 1 : \beta_k(m) < t\}$.
Мы определим следующую последовательность случайных величин $\nu_k(m)$:

$$\nu_k(0) \equiv 0, \ \nu_k(1) = \xi(k), \quad \nu_k(m+1) = \nu_k(m) + \xi(\nu_k(m)), \ m \geq 1.$$

Далее пусть $V_k(t) = \max\{m \geq 1 : \nu_k(m) \leq t\}$.

Теперь мы введем последовательность случайных целочисленных величин $\beta_{l,k}(m),\ m \geq 1$, которая имеет следующую функцию распределения

$$P(\beta_{l,k}(m)=s)=P(\beta(m)=s/\xi(0)=l,\xi(l)=k)=P\{\nu_{l+k}(m)=s-l-k/\ \xi(0)=l,\xi(l)=k\}.$$

Мы обозначим через $\nu_{l,k}(t)=\max\{m\geq 2:\beta_{l,k}(m)\leq t\}$.

Из определения $\nu(t)$ и $\nu(l,t)$ мы имеем стохастические равенства (правая и левая часть имеет одну и ту же функцию распределения)

$$\nu(t)=\sum_{l=1}^{[t]} I(\xi(0)=l)(\nu(l,t)+1), \qquad \nu(l,t)=\sum_{k=1}^{[t-l]} I(\xi(l)=k/\xi(0)=l)(\nu_{l,k}(t)+1),$$

здесь функция $I(\cdot)$ есть индикаторная функция множеств.

Применяя индикаторное тождество

$$s^{I(\cdot)x}=1+I(\cdot)(s^{x}-1),$$

мы получаем

$$M\,s^{\nu(t)}=1+\sum_{l=1}^{[t]} M\,I(\xi(0)=l)(s^{\nu(l,t)+1}-1),$$
$$M\,s^{\nu(l,t)}=1+\sum_{k=1}^{[t-l]} M\,I(\xi(l)=k/\xi(0)=l)(s^{\nu_{l,k}(t)+1}-1),$$

здесь $s\in(0,1)$.

Если $\xi(t)$ зависит от параметра n, тогда последние равенства имеют следующие представления.

Положим

$$M\,s^{\nu_n(c_n t)}=g_n(c_n t,s), \qquad M\,s^{V_{n,k}(c_n t)}=f_{n,k}(c_n t,s).$$

Далее

исследования

$$g_n(c_n t,\, s) = 1 - P\big(\xi_n(0) \le t\big) + s \sum_{l=1}^{[t]} M\, I\big(\xi_n(0)=l\big)\, s^{\nu_n(l,\, c_n t)} \;,$$

$$M\, s^{\nu_n(l,\, c_n t)} = 1 - P\big(\xi_n(l) \le c_n t \,/\, \xi_n(0)=l\big) + s \sum_{k=1}^{[c_n t - l]} M\, I\big(\xi_n(l)=k \,/\, \xi_n(0)=l\,\big)\, s^{\nu_{n,l,k}(c_n t)} \;. \qquad (1)$$

Мы раздели суммы в правых частях равенств (1) на две суммы:

$$\sum_{1}^{[c_n \delta]} + \sum_{[c_n \delta]+1}^{[c_n t]} \qquad (2)$$

Первую сумму мы можем сделать меньше заданного числа. Это следует из условий 1,2 и непрерывности функций $R_i(\cdot)$ в нуле.

Вторая сумма содержит математическое ожидание двух сомножителей. Эти сомножители ограничены единицей и измеримы относительно σ - алгебр $F_{\le x}$, $F_{\ge x + c_n \delta}$ соответственно.

Последнее позволяет нам заменить каждое слагаемое второй части (2) произведением математических ожиданий заданных случайных величин с ошибкой меньше чем $2\alpha_{m}(c_n \delta)$ (смотри, например (20.29)[10]):

Мы имеем следующие оценки при $l \ge c_n\, \delta$

$$|\, MI\big(\xi_n(0)=l\big)\, s^{\nu_n(l,\, c_n t)} - MI\big(\xi_n(0)=l\big)\;\; M\, s^{\nu_n(l,\, c_n t)} \,| \le \; 2\alpha_n(c_n \delta)\,,$$

$$M\, s^{\nu_n(l,\, c_n t)} = \sum_{d=0}^{[c_n t]-l} s^d \;\Big(P\big(\nu_{n,l}(d) \le c_n\, t - l, \nu_{n,l}(d+1) > c_n\, t - l \,/\, \xi_n(0)=l\big) \pm$$

$$\pm\, P\big(\nu_{n,l}(d) \le c_n\, t - l, \nu_{n,l}(d+1) > c_n\, t - l\,\big)\Big) = M\, s^{V_{n,l}(c_n t - l)} \;+\; \pi_{n,}$$

здесь $|\pi_n| \le K\alpha_n(c_n \delta), \quad K < \infty$.

$$\Big|P\big(\xi_n(l) \le c_n t \,/\, \xi_n(0)=l\big) - P\big(\xi_n(l) \le c_n t\,\big)\Big| \le \alpha_n(c_n \delta)\,.$$

Далее мы имеем оценки в случае $k \ge c_n \delta$:

$$|\,MI\big(\xi_n(l)=k \,/\, \xi_n(0)=l\big) s^{\nu_{n,l,k}(c_n t)} - MI\big(\xi_n(l)=k \,/\, \xi_n(0)=l\big) M\, s^{\nu_{n,l,k}(c_n t)} \,| \le 2\, \alpha_n(c_n \delta)\,;$$

$$|\,M\, s^{\nu_{n,l,k}(c_n t)} - M\;\; s^{V_{n,l+k}(c_n t - l - k)} \,| \le K_1 \alpha_n(c_n \delta), \quad K_1 < \infty\,.$$

исследования

Теперь мы можем переписать (1) в следующем виде

$$g_n(c_n t, s) = 1 - P\big(\xi_n(0) \le c_n t\big) + a_{n,1}(\delta) + b_{n,1} + s \sum_{l=[c_n\delta]+1}^{[c_n t]} P\big(\xi_n(0) = l\big)\, f_{n,l}(c_n t - l, s),$$

$$f_{n,l}(c_n t - l) =$$
$$1 - P\big(\xi_n(l) \le c_n t\big) + a_{n,2}(\delta) + b_{n,2} + s \sum_{k=[c_n\delta]+1}^{[c_n t]} P\big(\xi_n(l) = k\big)\, f_{n,l+k}(c_n t - l - k, s), \quad l \ge [c_n\delta],$$

здесь

$$|b_{n,i}| \le k_i \alpha_n(c_n\delta),\ k_i < \infty,\ i = 1,2; \quad a_{n,1}(\delta) \le P\big(0 < \xi_n(0) \le c_n\delta\big),$$

$$a_{n,2}(\delta) \le \sup_{q \ge [c_n\delta]} P\big(0 < \xi_n(q) \le c_n\delta\big).$$

Далее мы введем последовательность независимых случайных величин с одинаковой функцией распределения $\{\eta_k(n,\delta),\ k \ge 1\}$ при фиксированном δ. Эта функция определяется следующим равенством

$$P\big(\eta_1(n,\delta) \le x\big) = P\big(\xi_n(c_n\delta) \le x\big).$$

Мы будем обозначать

$$S_m(n,\delta) = \sum_{k=1}^{m} \eta_k(n,\delta), \qquad D_{n,\delta}(t) = \sup_{m \ge 1}\{m : S_m(n,\delta) \le t\}.$$

$$M\, s^{D_{n,\delta}(t)} = \sum_{d=0}^{\infty} s^d\, P\big(D_{n,\delta}(t) = d\big) =: F_{n,\delta}(t,s)$$

Будем оценивать разницу $f_{n,l}(c_n t - l, s),\ l \ge c_n\delta$ и $F_{n,\delta}(c_n t - l, s)$.

Из определения следует

$$f_{n,l}(c_n t - l, s) = \sum_{d=0}^{[c_n t - l]} s^d\, P\big(\nu_{n,l}(d) \le c_n t - l,\ \nu_{n,l}(d+1) > c_n t - l\big).$$

Далее мы получаем для $d = 0$ при условии 2

$$P\big(\xi_n(l) \ge c_n t - l\big) \pm P\big(\xi_n(c_n\delta) \ge c_n t - l\big) = \theta_n + P\big(\xi_n(c_n\delta) \ge c_n t - l\big).$$

Здесь и далее обозначения θ_n означает, что мы имеем некоторую последовательность чисел такую, что она сходится к нулю при $n \to \infty$ и выполняется следующее условие

$$|\theta_n| \le 2 \sup_{y\le t} \sup_{\delta\le\Delta\le t} |P\left(\xi_n([c_n \Delta])\, c_n^{-1} < y\right) - R_2(y)| .$$

Мы имеем для $d=1$: $P\left(\nu_{n,l}(1) \le c_n t - l, \nu_{n,l}(2) > c_n t - l\right) =$

$$= \sum_{k=1}^{[c_n t - l]} P\left(\xi_n(l) = k,\ \xi_n(k+l) > c_n t - l - k\right) =$$

$$= a_{n,\delta} + r_{n,1,\delta} + \sum_{k=[c_n \delta]}^{[c_n t - l]} P\left(\xi_n(l) = k\right) P\left(\xi_n(k+l) > c_n t - l - k\right) =$$

$$= a_{n,\delta} + r_{n,1,\delta} + \theta_n + \sum_{k=[c_n \delta]}^{[c_n t - l]} P\left(\xi_n(l) = k\right) P\left(\eta_2(n,\delta) > c_n t - l - k\right) =$$

$$= a_{n,\delta} + r_{n,1,\delta} + \theta_n + P\left(D_{n,\delta}\,(c_n t - l) = 1\right) -$$

$$- \sum_{k=[c_n \delta]}^{[c_n t - l]} \sum_{s=[c_n \delta]}^{k} \left(P\left(\xi_n(l) = s\right) - P\left(\eta_1(n,\delta) = s\right)\right) P\left(\eta_2(n,\delta) = c_n t - l - k\right) = \qquad (3)$$

$$= P\left(D_{n,\delta}\,(c_n t - l) = 1\right) + \pi_{n,1} .$$

Здесь

$$|\pi_{n,1}| \le 2\left(a_{n,\delta} + \alpha_n(c_n \delta) + \theta_n\right), \quad a_{n,\delta} = \max_{i=1,2} \left(a_{n,i}\right) \quad |r_{1,n,\delta}| = 2\,\alpha_n(c_n \delta) .$$

Мы использовали преобразования Абеля ([12], Глава XI , Сек. 383), для сумм парных произведений (3).

Похожие рассуждения применим к случаю $d=2$. Таким образом, применяя (3) мы получимт

$$P\left(\nu_{n,l}(2) \le c_n t - l, \nu_{n,l}(3) > c_n t - l\right) = a_{n,\delta} + r_{n,2} +$$

$$+ \sum_{k=[c_n \delta]}^{[c_n t - l]} P\left(\xi_n(l) = k\right)\ P\left(\nu_{n,l+k}(1) \le c_n t - l - k, \nu_{n,l+k}(2) > c_n t - l - k\right) =$$

$$= a_{n,\delta} + r_{n,2,\delta} + \theta_n + \pi_{n,1,\delta} + P\left(D_{n,\delta}\,(c_n t - l) = 2\right) -$$

$$- \sum_{k=[c_n \delta]}^{[c_n t - l]} \sum_{s=[c_n \delta]}^{k} \left(P\left(\xi_n(l) = s\right) - P\left(\eta_1(n,\delta) = s\right)\right)\left(P\left(D_{n,\delta}\,(c_n t - l - k - 1) = 1\right) - P\left(D_{n,\delta}\,(c_n t - l - k) = 1\right)\right) =$$

$$= P\left(D_{n,\delta}\,(c_n t - l) = 2\right) + \pi_{n,2} .$$

В последнем мы также применили преобразования Абеля и следующее равенство, которое легко проверяется.

$$P\left(D_{n,\delta}\,(c_n t - l - k - 1) = 1\right) - P\left(D_{n,\delta}\,(c_n t - l - k) = 1\right) =$$

$$= P\left(S_2(n,\delta) = [c_n t] - l - k\right) + P\left(\eta_1(n,\delta) = [c_n t] - l - k\right).$$

Неявно введенные последовательности имеют очевидный смысл и следующие неравенства имеют место $|\, r_{n,2,\delta} \,|\leq 2\,\alpha_n(c_n\,\delta)$, $|\pi_{n,2}\,|\leq 4\left(a_{n,\delta} + \alpha_n(c_n\,\delta) + \theta_n\right)$. Нетрудно показать с помощью индукции что для for $d = p$ мы имеем следующие формулы

$$P\left(\nu_{n,l}\,(p) \leq c_n t - l, \nu_{n,l}\,(p+1) > c_n t - l\;\right) =$$

$$= P\left(D_{n,\delta}\,(c_n\,t - l) = p\right) + \pi_{\,n,\,p}\,, \quad |\pi_{\,n,\,p}\,| \leq 2\,p\left(a_{n,\delta} + \alpha_n(c_n\,\delta) + \theta_n\right).$$

Таким образом, мы получили следующие представления для фиксированного $s \in (0{,}1)$

$$f_{n,l}\,(c_n t - l, s) = F_{n,\delta}\,(c_n t - l, s) + L_{n,\delta}\,, \quad |\,L_{n,\delta}\,| \leq L\left(a_{n,\delta} + \alpha_n(c_n\,\delta) + o_n(1)\right), \quad L < \infty.$$

$$g_n(c_n t,\, s) = 1 - P\left(\xi_n(0) \leq c_n t\right) + K_{n,\delta} + s\sum_{l=[c_n\delta]+1}^{[c_n t]} P\left(\xi_n(0) = l\right) F_{n,\delta}\,(c_n\,t - l, s),$$

$$F_{n,\delta}\,(c_n\,t - l, s) = 1 - P\left(\xi_n(c_n\,\delta\,) \leq c_n t - l\right) + Z_{n,\delta} \; +$$

$$+\, s\sum_{l=[c_n\delta]+1}^{[c_n t]} P\left(\xi_n(c_n\,\delta) = k\right) F_{n,\delta}\,(c_n\,t - l - k, s), \quad l \geq [c_n\,\delta\,].$$

Здесь построения $K_{n,\delta}$ и $Z_{n,\delta}$ приводят к следующим соотношениям

$$\lim_{n\to\infty} K_{n,\delta} = l_1\,K_\delta\,; \quad \lim_{n\to\infty} Z_{n,\delta} = l_2\,Z_\delta\,; \quad \max\left(l_1, l_2\right) \leq \infty,$$

и $|\,K_\delta\,| \leq 2\left(R_1(\delta) - R_1(0)\right)$, $\quad |\,Z_\delta\,| \leq 2\left(R_2(\delta) - R_2(0)\right)$.

Учитывая построение $F_{n,\delta}\,(c_n\,t\;, s)$, условие 2 и непрерывность свертки мы делаем вывод, что существует следующий предел

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} F_{n,\delta}\,(c_n\,t\;, s) = F\;(t\;, s)$$

так как этот предел есть единственное решение следующего уравнения

$$F\;(t\;, s) = 1 + R_2(t) + s\,R_2(\cdot) * F\;(t\;, s), \qquad (4)$$

здесь символ $*$ обозначает свертку двух функций.

Последовательность производящих функций $g_n(c_n t,\, s)$ также имеет предел

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} g_n(c_n\,t\;, s) = g(t\;, s)$$

Этот предел есть решение следующего уравнения

$$g(t\ ,s)=1+R_1(t)+s\,R_2(\cdot)*F(t\ ,s).$$

Из последнего и (4) следует доказательство теоремы.

Замечание 1. Рассмотрим обобщение теоремы 1. Оно состоит а определении более слабого коэффициента перемешивания чем $\alpha(\cdot)$.
Предположим, что последовательность $c_n,\ n\geq 1$ из теоремы 1 определена. Возьмем любую последовательность $r_n,\ n\geq 1$, которая удовлетворяет следующему условию $r_n\to\infty,\ \ r_n=o(c_n)$ при $n\to\infty$.

Далее строим усеченный процесс:

$$\overline{\xi_n}\ (t)=\begin{cases}\xi_n(t), & \xi_n(t)\leq c_n-r_n\,,\\ c_n-r_n\,, & \xi_n(t)\geq c_n-r_n.\end{cases}$$

и строим также σ - алгебру $F_{\leq x}(r_n)=\sigma\left(\overline{\xi_n}(t),\, t\leq x\right)$.

Теперь определим новый коэффициент перемешивания

$$\alpha_n(r_n,c_n)=\sup_{x\geq 0}\quad \sup\left\{|\,P(B/A)-P(B)|: A\in F_{\leq x}(r_n),\ B\in F_{\geq x+c_n}\right\}.$$

Таким образом, этот коэффициент строится только на тех событиях из $F_{\leq x}$ на которых процесс $\xi_n(t)$ меньше значения c_n-r_n при $t\leq x$. Такой коэффициент полезен в тех случаях, когда временная зависимость исследуемых событий управляется значениями процесса $\xi_n(t)$. Например, если событие $\{\xi_n(x)=k\}$ ограничивает исследование таких событий интервалом $[0,x+k]$.

Теперь мы разделим вторую сумму (2) следующим образом:

$$\sum_{[c_n\delta]+1}^{[c_n\ t]}=\sum_{[c_n\delta]+1}^{[(c_n\ -r_n)\ t]}+\sum_{[(c_n\ -r_n)t]+1}^{[c_n\ t]}. \qquad (5)$$

Мы сделать вторую сумму из (5) меньше заданного числа благодаря непрывности $R_i(\cdot)$.

Далее проводим преобразования из доказательства теоремы 1 первой суммы, используя коэффициент $\alpha_n(r_n,c_n)$.

Таким образом, мы можем заменить условие 3 теоремы 1 следующим условием

3' существует такая последовательность $r_n,\ n\geq 1$*:* $r_n\to\infty,\ \ r_n=o(c_n)$ *при* $n\to\infty$*, что*

$$c_n\alpha_n(r_n,c_n)\underset{n\to\infty}{\to}0\ .$$

Замечание 2. *Если есть такая последовательность* $\{\tau_i,\, i\ge 0\}$, *что*

$$\lim_{i\to\infty} i^{-1}\tau_i=\mu^{-1},\quad п.н.,\ \ \mu=const.,$$

тогда мы получим следующую сходимость в условиях теоремы 1

$$P\left(\tau_{\beta_n(i)}\le xc_n\right)\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}R_1*R_2^{*(i-1)}(x\mu)\,.$$

Это следует из хорошо известных теорем переноса (смотри, например [11]).

2. Взаимодействия двух процессов восстановления

Модель редеющего процесса, которая рассматривается ниже есть результат взаимодействия двух процессов восстановления. Эта модель была предложена в [13] как математическая модель практической задачи.

Обозначим через Z H два процесса восстановления : $Z=\{\varsigma_i,\, i\ge 1\},\ H=\{\eta_i,\, i\ge 1\}$.

Определим стохастические характеристики Z,H :

$$\tau_i=\sum_{l=1}^{i}\eta_l,\quad \vartheta_i=\sum_{l=1}^{i}\varsigma_l,\ \ i=1,2,\ldots\ ;\ \ N_1(t)=\sup\{n:\tau_n<t\},\quad N_2(t)=\sup\{n:\vartheta<t\},$$
$$\gamma_1^+(t)=\tau_{N_1(t)+1}-t,\quad \gamma_2^+(t)=\vartheta_{N_2(t)+1}-t,\qquad t>0\ .$$

Моменты времени τ_i, ϑ_i , $i\ge 1$ называются точками восстановления процессов H и Z соответственно.

Если мы имеем точки восстановления процесса Z в интервале $(\tau_{n-1},\tau_n]$, тогда мы будем говорить, что точка восстановления τ_n маркирована процессом Z. Процесс H маркирует точки восстановления процесса Z аналогично.

Обозначим через $T_0''=0,T_1'',\ldots$ точки восстановления H, которые были маркированы Z и через - $T_1',T_2',\ldots$ точки восстановления Z, которые были маркированы H. Очевидно, что следующие неравенства $T_0''=0<T_1'\le T_1''\le T_2'\le\ldots$ имеют место. В [4] показано, что последовательность случайных величин

$$V_n=T_n'-T_{n-1}'',\quad U_n=T_n''-T_n',\ \ n=1,2,\ldots,$$

Есть цепь Маркова. Эта цепь определяется переходными вероятностями

$$P(V_1<x)=P(\varsigma_1<x),\ P(U_n<x/V_n=y),\quad P(V_{n+1}<x/U_n=y),\quad n=1,2,\ldots.$$

Легко показать, что для исследования V_n, U_n необходимо одновременно наблюдать два редеющих процессов:

$$T''=\{T_0''=0, T_1'', T_2''-T_1'', \ldots\},\quad T'=\{T_1', T_2'-T_1', \ldots\}.$$

Мы будем исследовать эти процессы по отдельности. Мы используем то, что процессы T'', T' являются редеющими процессами относительно процессов H, Z соответственно.

Выберем например, T''. Процесс T'', как подпоток H, определяет следующие индикаторы

$$\chi(i)=\begin{cases}1, & \textit{если } i-\textit{ая точка восстановления } H \textit{ принадлежит } T'',\\ 0, & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

$$\xi(l)=\inf\{j\geq 1:\chi(l+j)=1\},\quad l\geq 0.$$

Таким образом, $\beta(i)=\beta(i-1)+\xi(\beta(i-1)),\ i\geq 1$ есть номер е i-го события из H, которое принадлежит T''. Момент $\tau_{\beta(i)}$ есть момент появление этого события. Мы предположим, что процессы H и Z зависит от параметра $n, n\to\infty$ так, что $H_n=\{\eta_{n,i}, i\geq 1\},\ Z_n=\{\varsigma_{n,i}, i\geq 1\}$. Теперь характеристики этих процессов имеют вид: $\tau_{n,i},\quad \vartheta_{n,i},\ i=1,2,\ldots,\ \gamma^+_{n,k}(t),\quad k=1,2$.

Теорема 2. *Если выполнены следующие условия:*

1) существуют положительные числа $c_n\to\infty$ и функция распределения $G(x), x\geq 0$ гарантирующие следующий предел

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\geq 0}|P(\gamma^+_{n,2}(t)<\tau_{n,[nx]})-G(x)|=0,$$

здесь x есть точка непрерывности $G(x)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n^{-1}\tau_{n,c_n}=\mu,\quad \mu=const.,$

тогда $P(\tau_{\beta_n(k)}<xc_n)\underset{n\to\infty}{\to}G^{*k}\left(\dfrac{x}{\mu}\right).$

Доказательство. Мы проверим все условия теоремы 1 для процесса $\xi_n(l)$. Вычислим вероятность $P(\xi(l)=m)$:

$$P(\xi(l)=1)=P(\gamma^+_{n,2}(\tau_l)<\eta_{l+1}).$$

$$P(\xi(l)=2)=P(\gamma^+_{n,2}(\tau_l)\geq\eta_{l+1}, \gamma^+_{n,2}(\tau_l)<\eta_{l+1}+\eta_{l+2})=$$

$$=P(\gamma^+_{n,2}(\tau_l)<\eta_{l+1}+\eta_{l+2})-P(\gamma^+_{n,2}(\tau_l)<\eta_{l+1}).$$

…

$$P(\xi(l)=k)=P\left(\gamma^{+}_{n,2}(\tau_l) < \eta_{l+1}+\ldots+\eta_{l+k}\right)-P\left(\gamma^{+}_{n,2}(\tau_l) < \eta_{l+1}+\ldots+\eta_{l+k-1}\right).$$

Таким образом

$$P(\xi(l)\le m)=\sum_{k=1}^{m}P(\xi(l)=k) = P\left(\gamma^{+}_{n,2}(\tau_l) < \eta_{l+1}+\ldots+\eta_{l+m}\right). \qquad (6)$$

Последнее и условие 1 приводят к следующей сходимости

$$P(\xi_n(l)< c_n x)=\int_0^\infty P\left(\gamma^{+}_{n,2}(t)<\tau_{n,[c_n x]}\right)P(\tau_{n,l}\in dt)\underset{n\to\infty}{\to} G(x), \quad l=0,1,2,\ldots .$$

здесь $x>0$ есть точка непрерывности $G(x)$.

Принимая во внимание что выполняется (6), мы получаем равенство

$$P(\xi(l+r)\le s/\xi(l)\le m)-P(\xi(l+r)\le s)=0, \quad \text{если} \quad m<r.$$

Теперь для любой последовательности чисел r_n такой, что $r_n\to\infty, r_n<c_n, n\ge 0$ мы имеем $\alpha_n(r_n,c_n)=0, \quad n\ge 0$. Таким образом, все условия теоремы 1 выполняются относительно процесса $\xi_n(t)$. Теперь утверждение теоремы 2 становится справедливым, если вспомнить теорему переноса.

Пример. Рассмотрим пример определения последовательности c_n и предельную функцию $G(x)$ из теоремы 2. Мы будем предполагать, что процесс Z есть Пуассоновским процессом с параметром λ_n таким, что $\lambda_n\to 0$ при $n\to\infty$. Процесс H не зависит от параметра n. Интервал восстановления у H имеет конечное математическое ожидание $\mu=M\eta_1<\infty$.

Все эти предположения приводят к формуле

$$P\left(\gamma^{+}_{n,2}(\tau_l) < \eta_{l+1}+\ldots+\eta_{l+m}\right)=\int_0^\infty \lambda_n e^{-\lambda_n y}P(\tau_m>y)dy=:G_n(m).$$

Если мы положим $m=[c_n x]$ и сделаем замену переменных $\lambda_n y=z$, то получим

$$G_n([c_n x])=\int_0^\infty e^{-\lambda_n y}P\left(\lambda_n\tau_{[c_n x]}>z\right)dz.$$

Положим $c_n=:\lambda_n^{-1}$. Индикатор множества A будем обозначать через $I(A)$. Следующие сходимости основываются на усиленном законе больших чисел.

$$G_n([c_n\,x]) = \int_0^\infty e^{-z}\, P\left(x\frac{\tau_{[\lambda_n^{-1} x]}}{[\lambda_n^{-1}\, x]} > z\right) dz \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-z}\, I(x\mu > z)\,dz = 1 - e^{-\mu x}.$$

и

Таким образом мы проверили все условия теоремы 2. Функция $G(x)$ (из условия 1 теоремы 2) есть предел для функций $G_n([x\lambda_n^{-1}])$. В этом примере момент появления k-го события в потоке T_n'' имеет следующую предельную функцию распределения

$$P\left(\tau_{\beta_n(k)} < x\lambda_n^{-1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\exp(\cdot))^{*k}(x), \quad x \ge 0.$$

Ясно, что похожий пример мы можем рассмотреть для процесса T'. В этом случае процесс H должен быть Пуассоновским процессом с “редкими” событиями и процесс Z должен быть простым процессом восстановления с конечным средним временем между соседними точками восстановления.

исследования

Литература

1. A. Renyi A Poisson - folyamat egy jellemzese// Maguar Tud. Acad. Mat.Int.Kozl. vol 1,1956, 519-527 p.
2. Ю. К. Беляев Предельные теоремы для редеющих процессов // Теория веоятн. и ее примен., т. 2, 1963, 175 – 184 с.
3. И.Н.Коваленко О классе предельных теорем для потока однородных событий// Литовс. матем. сборн., т. 5, 1965, 569-573 с.
4. И.Н.Коваленко О предельных редеющих процессах// Институт кибернетики, Препринт АН Украины, Киев, 1973, с.15.
5. Б.В. Гнеденко, Б.Фрайер Несколько замечаний к одной работе И.Н.Коваленко// Литовск. матем. сборн., т 5, 1969, 463-470 с.
6. T.Brown Position dependent and stochastic thinning of point processes// Stoch. Process. and their Applications,vol 5, 1979, 189-193 p.
7. P.Jagers, T.Lindwall Thinning and rare events in point processes/ Z. Wahrschein.verw. Geb., 28, 1974, 89-98 p.
8. J.Mogyorodi Some notes on thinning recurrent flows// Литовск. Матем. сборн., т. 11, 1971, 303-315 с.
9. В.А. Гасаненко Предельная теорема для редеющих процессов с перемешиванием I, II.// Украин. матем. журн., т 50, 1998, 471-475, 603 – 612 сс.
10. П. Биллингсли Сходимость вероятностных мер, Наука, Москва, 1977, 352 с.
11. В.В. Анисимов Случайные процессы с дискретной компонентой, Вища школа, Киев,1988, 184 с.
12. Г.М. Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления , т. II, Наука, Москва, 1970, 800 с.
13. I. Kopocinska Two mutually rarefied renewal processes, Application Mathematice, vol 22, 1994, 267-273 p.