

RELIABILITY: THEORY & APPLICATIONS

No. 1 (1)
January 2006

San Diego - Moscow
2006

1

All rights are reserved
The reference to the magazine "Reliability: Theory & Applications"
at partial use of materials is obligatory.

RELIABILITY: THEORY & APPLICATIONS

No. 1 (1)
January 2006

San Diego - Moscow
2006

НАДЁЖНОСТЬ: ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ

№ 1 (1)
Январь 2006

Сан-Диего - Москва
2006



© "Reliability: Theory & Applications", 2006
© I.A.Ushakov, 2006
© A.V.Bochkov, 2006

All rights are reserved
The reference to the magazine "Reliability: Theory & Applications"
at partial use of materials is obligatory.

Editor-in-Chief



Igor Ushakov
iushakov2000@yahoo.com

Scientific Secretary

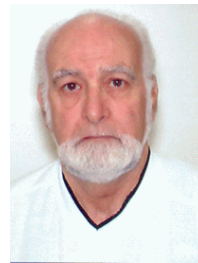


Alexander Bochkov
a_bochkov@yahoo.com

Associate Editors



Yu.K. Belyaev
yuri.belyaev@matstat.umu.se



I.B. Gertsbakh
elyager@bezeqint.net



I.N. Kovalenko
kovigo@yandex.ru

LIST OF CONTENTS - СОДЕРЖАНИЕ

EDITORIAL

Igor Ushakov	Reliability: Past, Present, Future (in English)	10
Игорь Ушаков	Надёжность: прошлое, настоящее, будущее (in Russian).....	17

NEW PUBLICATIONS

Gregory Levitin	The Universal Generating Function in Reliability Analysis and Optimization.....	28
-----------------	--	----

STUDY

Mark Kaminskiy, Vasiliy Krivtsov	A Monte Carlo Approach to Estimation of G-Renewal Process in Warranty Data Analysis (in English)	29
Марк Каминский, Василий Кривцов	Применение метода Монте-Карло к оценке обобщенного процесса восстановления при анализе данных об отказах в период действия гарантийных обязательств (in Russian)	32
Oleg Abramov	Reliability-Directed Computer-Aided Design System (in English)	35
Олег Абрамов	Автоматизированная система надёжного проектирования	41
В.В.Рыков	Два подхода к декомпозиции сложных иерархически стохастических систем. Непрерывно взаимодействующие подсистемы (in Russian)	47
Vladimir Rykov	Generalized Birth & Death Processes as Degradation Models (in English)	63

MEMOIRS

Igor Ushakov	Reminiscence About B.V. Gnedenko (in English)	73
Игорь Ушаков	Воспоминания о Б.В.Гнеденко (in Russian)	75
Ilya Gertsbakh	Kh. B. Kordonsky: Recollections and Short Review of Scientific Results (in English)	77
Nozer D. Singpurwalla, Richard L. Smith	A Conversation with Boris Vladimirovich Gnedenko (in English)	82
Нозер Д. Сингпурвалла, И Ричард Л. Смит	Беседа с Борисом Владимировичем Гнеденко (in Russian)	89

e-Journal *Reliability: Theory & Applications* publishes papers, reviews, memoirs, and bibliographical materials on Reliability, Quality Control, Safety, Survivability and Maintenance.

Theoretical papers have to contain new problems, finger practical applications and should not be overloaded with clumsy formal solutions.

Priority is given to descriptions of case studies.

General requirements: papers have to be presented in English in MSWord format; desirably to be supplied with Russian version, since (at least now) most of readers are Russians.

The total volume of the paper (with illustrations) has to be not more than 15 pages (Times New Roman TTF - 12 pt - 1,5 intervals).

Publication in this e-Journal is equal to publication in other International scientific journals.

Papers directed by Members of the Editorial Boards are accepted without referring.

The Editor has the right to change the paper title and make editorial corrections.

The authors keep all rights and after the publication can use their materials (re-publish it or present at conferences).

Send your papers to

the Editor-in-Chief, Igor Ushakov
iushakov2000@yahoo.com

or

the Scientific Secretary, Alexander Bochkov
a_bochkov@yahoo.com

Журнал *Reliability: Theory & Applications* (*Надежность: вопросы теории и практики*) принимает статьи, обзоры, рецензии, воспоминания, информационные и библиографические материалы по теоретическим и прикладным аспектам надежности и управления качеством, безопасности, живучести и техническому обслуживанию.

Статьи теоретического характера должны непременно содержать новые постановки задач, указание возможности практического применения и не должны быть перегружены формальными выкладками.

Приоритет будет отдаваться статьям, отражающим практическое применение методов.

Требования к оформлению статей: статьи должны быть представлены в формате MSWord на английском языке, желательно сопроводить их версией на русском языке, поскольку (по крайней мере, в настоящее время) большинство читателей журнала русскоязычные.

Объем статей (вместе с иллюстрациями) не должен превышать 15 стр. (шрифт Times New Roman - 12 пт - через 1,5 интервала).

Публикация в журнале приравнивается к публикации в международном научно-техническом журнале.

Статьи, рекомендованные членами редколлегии, на рецензирование не направляются.

Редакция оставляет за собой право изменить название статьи, а также провести редакторскую правку.

За авторами сохраняется полное право использовать свои материалы после публикации в журнале по своему усмотрению (посылать их в другие издания, представлять на конференции и т.п.)

Статьи направлять по e-mail

Главному редактору, Игорю Ушакову
iushakov2000@yahoo.com

или

Ответственному секретарю, Александру Бочкову
a_bochkov@yahoo.com

RELIABILITY: PAST, PRESENT, FUTURE

Key-note opening lecture at the Conference “Mathematical Methods in Reliability” (MMR-2000) in Bordeaux, France, 2000

Igor Ushakov
(San Diego, USA)

*I treasure both faces of mathematics:
the pure as a beautiful retreat from reality,
and the applied as an ardent hope for life.*

I. Heller

Introduction

It is a great honor for me to present this Opening Lecture at the World Reliability Forum. I was a young man when I jumped in the white water of a vivid stream of reliability theory and application creek. Late 50-s and early 60-s were really the time of reliability “Renaissance”. Since then reliability has been developed to a powerful applied mathematical discipline, with both, theoretical and applied sides. It is impossible to imagine any modern research institution or manufacturing plant without reliability laboratories or departments.

I am lucky to have been working at QUALCOMM, an exceptional telecommunication company where I have a chance to apply my expertise in entire reliability area: from availability analysis of satellite telecommunication system to quality assurance of cellular phones, from optimal spare allocation for terrestrial network to accelerated testing and warranty claim rate projection.

Everyday practical work generates new theoretical problems in need of solutions. New solutions challenge new applications. What could be better and more exciting than such kind of reliability engineering?

I hope that we all -- from manufacturing and research, from testing and data inferences, in both industry and academia -- will prove our usefulness for the next, XXI industrial age, as we did it in the past and as we are doing it in the present.

Main Directions of Modern Reliability Theory

One can distinguish several directions of modern Reliability Theory, main among them are:

1. Quality Control of mass production
2. “Pure” Reliability analysis
 - ◇ Structural models
 - ◇ Functional models
 - ◇ Maintenance models
3. Effectiveness (“Performability”)
4. Survivability
5. Safety
6. Security
7. Software Reliability

First two points do not need any explanations: they are subjects of everyday engineering activity. Others would be slightly explained.

Effectiveness (“performability”) analysis relates to systems for which one is not able to formulate “all or nothing” type of failure criterion. Effectiveness characterizes a system ability to perform its main functions even with partial capacity. Failures of some (or even majority of system components) lead only to gradual degradation of the system ability to perform its functions/operations. Actually, one deals with such indices like “partial availability” or “partial system down time”. These type of models are used to describe multi-channel systems (e.g. telecommunication, transportation) or systems with embedded “functional redundancy” where there are optional ways to perform system tasks, though with decreased quality.

For systems operations of which are characterized by its current state, the effectiveness index, E , can be expressed as

$$\sum_{\forall s} \Phi_s H_s$$

where H_s is the probability of state s , and Φ_s is the conditional probability of the system successful operation. For systems whose effectiveness of operating depends on the trajectory of state changing, analogous formula can be easily written in a general form (though few examples of constructive applications are known for this case).

It is about the time to mention that actually the main idea of this approach was introduced in Kolmogorov's work [1945] where he analyzed the probability of a plane destruction by anti-aircraft fire.

Of course, one can reduce effectiveness analysis to "pure" reliability analysis by choosing an appropriate failure criterion. For instance, a system might be considered failed if the total system "capacity" (or ability to perform its operation) declines below some predetermined level.

Survivability is a special property of a system to "withstand impacts". These impacts can be unpredictable inner failures (usually due to operator errors), environmental influences (earthquakes, floods, hurricanes) or hostile human nature actions (enemy military operations or terrorist acts). In this case one assumes that the impacts are directed to the most critical components of the system. Survivability analysis is usually performed in minimax terms and reduced to "bottleneck analysis", or searching out "minimum cut". Usually survivability consideration is related to large terrestrial systems (telecommunication or power networks, transportation systems). The same type of reliability indices is applied to military objects that are subjected to statistically unpredictable impacts.

The survivability measure is usually expressed in the power of set of system units whose destruction leads to the system "death". One of possible characterization of survivability is the minimum set of such units:

$$X^* = \{\min X: \Phi_{\bar{X}} = 0\}$$

where X is the set of destroyed system's units ($\bar{X}$ is a supplementary set). Though there is no probabilistic consideration, nevertheless, one sometimes uses several levels of "possibilities of occurrence" of destruction of various units.

Safety is a special property of a system characterizing effective performance of its main predetermine functions (production of goods, electrical power generation, gas and oil transportation, etc.) without dangerous environmental consequences for people and nature. Safety is usually considered in probabilistic terms that are close to those used in a "pure" reliability analysis. In some sense, one considers in this case two-dimensional model. For instance, one can formulate the following optimization problem:

$$\min_{\Psi} \{C(\Psi) \mid R(\Psi) \geq R_{\text{required}}, S(\Psi) \geq S_{\text{required}}\}$$

where Ψ is the system configuration, C is the system cost, R is the system reliability index, and S is the system safety index.

Security is sometimes considered as a part of reliability-survivability problem. Indeed, many systems must not only operate reliably but also at the same time provide protection against non-sanctioned access. Many telecommunication systems dealing with military, banking or other highly confidential information are requested to be secure. It is to the point to ask: "*Quis custodiet ipsos custodes?*" Because systems mentioned above are actually considered failed if security is not provided, there is an interesting nod of "two reliabilities".

Software Reliability... Now we come to the most confusing area in reliability theory and practice - the so-called software reliability. Multiple attempts to apply traditional reliability concepts to this subject are unsuccessful and lead only to some disaster. Who could explain what means "MTBF" for software? And first of all, what does it mean "failure" in this case?

The answer on these questions could be found in the answer: What do you mean under "software reliability"? Let us consider main features of reliability:

- stochastic nature of failures
- time dependence of failures
- independence of failures (or probabilistic dependence).

What one has analyzing software? Errors caused by software have no stochastic nature: they will repeat as soon as some conditions will be repeated. Errors of software, in a sense, are not "objective", they depend on type of operations, type of inputs and, at last, on type of users. Allow me to compare software errors with printing errors in the book. Assume that there are many typewriting errors in Chapter 1, and no errors at all in Chapter 2. One uses only Chapter 1 and complains that the book is very bad. Another uses only Chapter 2 and tells everybody that the book is perfect.

Errors caused by software do not depend on time in a usually understandable way: if you don't use software it cannot fail! At a pinch, in this sense software can be compared with a spare unit which can be used but nobody knows the timing of this usage.

At last, independence of errors. There is no such concept as a "sample" for software: there is a phenomenon of cloning. "Replacement" of "failed" software has no sense! You will change one Mollie for another Mollie

with the same genes, with the same illness, with the same properties.

Problem of software quality is extremely important because more and more technical systems become “software dependent”. It is about the time to say that this problem needs independent and intensive attention of applied mathematicians. However, it seems that attempts to put “hardware reliability shoes” on “software legs” is absolutely wrong and, moreover, will lead only to a logical dead end.

Attempts of using probabilistic reliability concepts to unrelated problems are not new. I remember as in the 60-s, when in the former Soviet Union there was a “fashion” to talk of reliability for everything, the State Bureau of Standard issued a standard on reliability of sausages!

Another funny case. When I was working at a top secret Soviet military-industrial enterprise, an editor of technical reports, a former KGB officer, changed the word “reliable” for “trustworthy” through all my report.

Let us don't repeat such mistakes and name an apple an apple!

History of Ideas in Reliability

Of course, the history of reliability theory did not begin recently. However, we should accept that the first waves of the modern reliability theory came from the United States in late 50-s. First time reliability experts gathered together at IEEE Reliability conferences that began to be regular since then. First proceedings of those conferences played a revolutionary role in information exchange in reliability community. With a small delay analogous forums of reliability experts gathered then in the former Soviet Union. In some sense these two countries, competing in Cold War in modern technology, became two poles of research in reliability field.

However, one can find examples of activity in reliability area before this time. We begin a brief review of history of ideas of reliability with a well know example.

In the middle of 30-s Swedish engineer and mathematician W. Weibull [1939], analyzing strength of materials, actually reduced the problem of assembly failure (he analyzed bearings) to the model of a “weakest link”. He suggested a simple and convenient mathematical model for description, which is known as Weibull distribution. This well-known distribution is good because of two parameters of scale and shape it is very flexible and allows one to approximate almost any field data. Almost simultaneously and independently, outstanding Russian mathematician B. Gnedenko [1943] found three classes of limit distributions, one of which corresponded to Weibull distribution. Those

fundamental results were based not on “gut feeling” or formal convenience of a “flexible” mathematical formula. They were proven and their applicability was shown. Probably, it was the first really significant result in future developed reliability theory.

After the WWII, many new ideas flooded into reliability theory. Last fifty years brought a number of new solutions and new methods in reliability theory and engineering.

In late 40-s J. von Neuman, probably, first time used Monte Carlo simulation for calculation of multi-dimensional integrals over some specific domains. Very soon, specialists for numerical modeling queuing systems, including reliability models of repairable systems applied this technique. In this connection we would like to mention N. Buslenko and his pupils [Buslenko, Kalashnikov, Kovalenko, 1973; see also in Ushakov, ed., 1994].

Proving two key theorems of the Renewal Theory made a very powerful impact on reliability theory. A. Renyi [1956] formulated the asymptotic theorem related to the “thinning” procedure, and G. Ososkov [1956] formulated the asymptotic theorem related to the superposition procedure for point stochastic processes. Later Yu. Belyaev [1962] and B. Grigelionis [1964] generalized these results. These theorems allowed one to construct flexible and practically convenient mathematical models of repairable systems. These results also can be used for simple and effective approximate models [Gnedenko and Ushakov, 1995].

In the middle of 50-s E. Moore and C. Shannon [1965] published the paper on asymptotic analysis of network reliability. They showed the so-called S-shape dependence of network reliability on the unit reliability. In late 60-s J. Esary and F. Proschan [1962] obtained the so-called Esary-Proschan lower and upper bounds of an arbitrary two-pole network with known structure. These bounds were expressed via complete sets of network's paths and cuts. This work ignited works by M. Lomonosov and V. Polesky [1971, 1972] dedicated to network reliability. Later the Litvak-Ushakov lower and upper bounds [Ushakov and Litvak, 1977] were obtained. These results were based on non-intersected network's paths and cuts. (In a sense, these bound are more effective for practical applications.)

D. Lloyd and M. Lipow [1962] considered an interesting problem: estimation of system reliability on the basis of unit test data. They proposed a well working heuristics. R. Mirnyi and A. Solovyev [1964] obtained first strong mathematical result in this direction. They considered the case of no failures during testing. Their model corresponds to a concept of a “weakest link”. Then Yu. Belyaev {Belyaev et al.,

1967] obtained some results using Monte Carlo simulation. Many interesting analytical results were obtained by I. Pavlov [see in Gnedenko et al., 1999] and others.

First papers on optimal redundancy was published, probably, in the middle of 50-s [F. Moskowitiz and J. McLean, 1956]. Though this paper might seem to be a little bit naïve now, its role was significant. Later discrete analogue of the steepest descent method [Black and Proschan, 1959] and dynamic algorithm [Bellman and Dreyfus, 1958] were suggested. J. Kettelle [1962] proposed an effective practical modification of dynamic programming algorithm for solution of this problem. This approach was a significant step of implementation of the optimal redundancy solution into practical applications. Further development of this method was done in series of works [Proschan and Bray, 1965; Ushakov, 1965, 1995; Tillman et al., 1980].

Work of D. Cox [Cox, 1962; Cox and Isham, 1980] made an outstanding impact on the reliability theory development. It opened new vision of usage point stochastic processes in reliability modeling.

B. Gnedenko [1964a, 1964b] was the first who analyzed highly available systems in the beginning of 60-s. He considered a duplicated system and showed that asymptotic distribution of time to failure of such a system is exponential and indifferent with respect to the type of repair time distribution (if repair time is relatively small). This work was followed by a series of excellent works by I. Kovalenko, A. Solovyev and others [see in Gnedenko, ed., 1983]. Now asymptotic methods in reliability take an important place in large-scale systems consisting of highly reliable units. One can find some review of strong and approximate models for highly available systems in [Gnedenko and Ushakov, 1995].

R. Barlow, C. Derman, L. Hunter, and F. Proschan were one of the first who paid a serious attention to the problem of preventive maintenance [Barlow and Hunter, 1960; C. Derman, 1963; Barlow et al., 1963]. Unfortunately, these methods (further developed into sophisticated mathematical models) still did not find real practical applications mostly due to a lack of consistent field data. It is about time to mention that this direction in reliability theory is the most “vulnerable”: optimal solutions are very dependent on the type of time to failure distribution but knowledge of it needs enormous volume of field data.

R. Barlow and F. Proschan [1965] introduced classes of distributions with increasing and decreasing failure rates, IFR and DFR, respectively. Later they generalized their approaching introducing expanded classes. That step was very significant because it opened the path for analyzing

units and systems reliability invariantly to specific type of failure distributions.

Last years a number of interesting publications appeared in Bayesian methods in reliability. Let us name R. Barlow, H. Martz, V. Savchuk, and N. Singpurwalla whose numerous works we have no chance to refer here only because of a lack of a room. One can expect useful applications of these methods for aggregating field data and projecting reliability of new objects (especially, unique ones).

* * *

These few names do not reflect contributions of many brilliant reliability experts during last five decades. The author tried only to mention the main ideas of modern reliability theory and brief history of their development. Everybody understands that any review of such kind bears the stamp of subjectivity and incompleteness.

In the White Water of Publications Stream

Since the beginning of “Reliability Renaissance”, an alarming thing has happened: more and more publications have been appearing... A real avalanche of hundreds of new books and thousands of new papers on reliability... Is it good or it is bad? Did our professional life become easier with this immense ocean of publications? It seems to me that the situation reminds the following: somebody would like to have a drink of water and instead was thrown into the middle of deep and boundless pool.

Let us remember the history of the most significant publications in reliability.

One of the first successful books in reliability was I. Bazovsky [1961]. This book was simple, informative and instructive. The next significant and deep book, written by D. Lloyd and M. Lipow [1962], was full of number of interesting practical problems and original solutions.

A real revolution was done by two excellent books by B. Gnedenko, Yu. Belyaev and A. Solovyev [1969], published in Russian in 1965, and by R. Barlow and F. Proschan [1965]. Their role is difficult to overestimate. The first book contained many new results on repairable redundant systems (including first results on asymptotic analysis), specific inferences of reliability data and many solutions of interesting engineering problems. The second book introduced new concepts of monotone systems, distributions with monotone increasing and decreasing failure rates and gave deep presentation of optimal maintenance and optimal redundancy problems. One can say that these two books have laid a fundamental of the modern theory of reliability.

As development of the first book [Gnedenko, ed., 1983] was published. The second one followed by [Barlow and Proschan, 1975; Barlow, 1998]

In 1966 Reliability Handbook was published in Russia and then translated in the USA [Kozlov and Ushakov, 1970]. This book had several revised editions in Russia, Germany and Czechoslovakia. The last updated American edition was published recently [Ushakov, ed., 1994].

The flow of publications on reliability has been growing exponentially. However, some books distinctly and brightly shined: [Mann, Schafer and Singpurwalla, 1974; Kapur and Lamberson, 1977; Gertbakh, 1977; Tillman, Ching-Lai, and Kuo, 1980; Nelson, 1982; Lawless, 1982; Kovalenko, Kuznetsov, and Pegg, 1998;]. Book written by W. Nelson [1982] probably needs a special mentioning. Several books (for instance, Bolotin, 1971; Rudenko and Ushakov, 1989; Cherkosov, 1974; and others) might be mentioned as oriented to special areas of application.

However to find a new worthwhile book in the real flood of new publications begins more and more difficult...

It seems that there is no appropriate selection for publication. We are hopeless in any fight with publishers who just make money. We should organize some public Reliability Forum with honest and severe evaluation of publications. Otherwise, future generation of reliability community will loose its professional level. One might shout: "S.O.S.! Save Our Science!"

Everybody writes poems (at least in the youth). It does not mean that all written poems should be published! Could you imagine that this has happened? How you could find then what is really good? You could trust some old and well-known authors but how you could find a new brilliant work?

Problems Expecting Solutions

"History teaches the continuity of the development of science. We know that every age has its own problems, which the following age either solves or casts aside as profitless and replaces by new ones." This is a citation from David Hilbert's Lecture "Mathematical Problems" delivered in 1900. Hilbert told about pure mathematics, however the same words are correct in respect to applied mathematics and, in particular, to reliability theory.

The last century was very productive for reliability theory: many new ideas, many constructive results, many useful practical applications. Sometimes you can hear voices that reliability theory has been exhausted... The best answer for such complains is those Hilbert's words above.

Reliability engineering is like medicine. The difference is in the objects of application: systems in one case and human beings in another. Could you imagine that medicine could be exhausted? As Mark Twain told: "Rumors about my death are strongly exaggerated."

Actually, there are many important problems, which are awaiting solutions. Let me listed some of them.

- **"Software reliability".** Does not matter how we call this. The problem remains. To construct a constructive theory of analysis of software quality and its behavior in time outside of "traditional" reliability theory scope is an exciting new problem!
- **Unique system analysis.** We met a number of examples where a single copy of a system is designed: space ships, huge dams, nuclear research equipment, etc. All these objects are to be extremely reliable. At the same time we very often have no prototype or any previous experience. How to evaluate their reliability? In what terms? What is the "confidence" of such evaluation?
- **Global terrestrial systems.** More and more modern systems are large scale, which spread over huge territories. They are, for instance, telecommunication networks, gas and oil pipelines, power systems, defense systems, etc. These systems are waiting for appropriate methods of analysis.
- **Communication networks.** Standard analysis of network reliability is reduced to connectivity analysis. However, real networks have capacity of their links and are described by flow exchange matrices. To find a simple and applicable method of reliability evaluation of such networks is an important task.
- **Monte Carlo simulation.** Monte Carlo simulation, being a very effective computer tool for solution of different complex problems, remains an art... Probably, simple user-friendly macro language should be designed for description reliability of complex reliability models.
- **Developing systems.** The reliability modeling of developing systems is another challenge. How to use current information obtained from the field for control of the system development? How to take into account that with time the system not only changes its structure but also embeds new or modified equipment?
- **Spare stock system.** To find an optimal spare stock for a single system is a well-known problem of discrete optimization. However, if one consider a

hierarchical structure of local, regional and central stocks with large number of various types of spares and various supply policies, the problem becomes outside of traditional reliability or inventory control methods.

- **Time redundancy.** Time redundancy is relatively new direction in reliability theory. It considers a “functional redundancy”: a system has a spare time to restart its function in the case of failure or repeat some its operations during admissible time. Not too many works are dedicated to this problem. Probably, there are not still good practical results of this complex issue. To get convenient engineering methods of analysis of systems with time redundancy is an important task.
- **“Continuous” models.** Some large systems have complex structures. To analyze them with standard “discrete” methods is a hard task. There are some attempts to consider such systems as “continuous” ones. However, these methods still are not elaborated to practical level.
- **Units with several states.** Some systems consist of units with several states, not only “up” and “down”. Existing attempts of reliability evaluation of such systems by now have mostly theoretical interest: there are no simple constructive results, which can be used in everyday engineering practice.
- **Realistic accelerated testing.** Traditional and commonly used accelerated life models, based on a linear time scale transformation assumption (except D. Cox [Cox and Oakes, 1972] “proportional hazard model”, which is based on essentially nonlinear time transformation). Accelerated testing is very often the only way of projection of new production reliability. To construct realistic accelerated testing (especially for assemblies of different components) is a very important practical problem.
- **Aggregation of filed data.** Reliability field data are the core of any reliability analysis. For systems in the field, these data are the basis for realistic estimation of achieved reliability level. For new designed systems they are used for realistic evaluation of the reliability level. Field data are usually collected during long time, for different climatic conditions, for different system configurations, etc. The problem is how to aggregate as much reliability information as possible, keeping control over consistence and likelihood of these data?
- **Methodology of failure analysis.** First of all, it refers to micro-components and their assemblies. The problem is in variety of assemblies (“cards”) of

micro-components. Each configuration of a card presents a unique environment for a component. How they influence on each other? How they stand different environments?

- **Warranty claim rate projection.** For many industrial companies manufacturing mass production distributed among consumers, the problem of evaluating of possible future expenses for repair and/or replacement is crucial. To make a consistent projection of return based on some *a priori* information with permanent updating with current field data is a very important problem.

Conclusion

We should arrange some kind of information system with regular reviews of books on reliability. Probably, to have an expertise committee of some 50 people who will send their evaluations of the book and the books will be ordered in accordance with these average marks. There should be a regular review of the state in particular areas. We should help ourselves!

Reliability International Community numbers tens of countries: Bulgaria, China, Denmark, France, Germany, India, Israel, Italy, Japan, Russia, Spain, Sweden, Ukraine, United States of America, United Kingdom, and others... (Named in alphabetical order.)

We need International Society on Reliability for coordination our activity, for better exchange of ideas, methods, results. Taking into account the role, which Academician Boris Gnedenko played in the development of reliability theory, it would be not out of place to name this Society after Gnedenko.

We need some International journal on reliability theory and applications. It seems that this journal should publish only exceptional (or invited) papers. Of course, it does not mean that the journal should be an “elite” journal. However, I think that this journal should publish only papers on serious problems, be dedicated to surveys of various reliability branches, reviews of new books with their honest estimation (probably, with expert estimation by 10 point scale).

We have an excellent place for the Reliability Society Headquarter – this beautiful city of Bordeaux. We have an excellent Universite Victor Segalen as a host. In my turn, I agree to establish an affiliate in another beautiful city – San Diego.

It would be a good start for reliability in the new century (and even new millenium! ☺).

References:

- R.E. Barlow (1998). Engineering Reliability, ASA-SIAM, Philadelphia, PA
- R.E. Barlow and L. Hunter (1960). Optimal preventive maintenance policy. *Opns. Res.* V. 8, No.1
- R.E. Barlow, L. Hunter and F. Proschan (1963). Optimum checking procedure. *SIAM*, V.11, No. 4
- R.E. Barlow and F. Proschan (1965). *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley, New York
- I. Bazovsky (1961). *Reliability Theory and Practice*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ
- R. Bellman and S. Dreyfus (1958). Dynamic programming and reliability of multi-component devices. *Opns Res.*, Vol. 6, No.2
- Yu.K. Belyaev, T.N. Dugina, and E.V. Chepurin (1967). Computation of the lower confidence limit for the complex system reliability. *Eng. Cybernet. (USA)*, No's 2 & 3.
- G. Black and F. Proschan (1959). On optimal redundancy. *Opns Res.*, V.7, No.5
- V.V. Bolotin (1971). *Application of Probabilistic Models and Reliability Theory in Construction Design (Russian)*. Stroiizdat, Moscow
- N.P. Buslenko, V.V. Kalashnikov and I.N. Kovalenko (1973). *Lectures on Theory of Complex Systems (Russian)*. Sovyetskoe Radio, Moscow
- D.R. Cox (1962). *Renewal Theory*. John Wiley, New York
- D.R. Cox and V. Isham (1980). *Point Processes*. Chapman and Hall, London
- D.R. Cox and D. Oakes (1984). *Analysis of Survival Data*. Chapman and Hall, London
- C. Derman (1963). Optimal replacement and maintenance under Markovian deterioration with probability bounds on failure. *Management Science*, V. 9, No. 3
- J.D. Esary and F. Proschan (1962). The reliability of coherent systems. In: *Redundancy Techniques for Computing Systems*. Spartan Books, Washington, D.C.
- I.B. Gertbakh (1977). *Models of Preventive Maintenance*. North-Holland, New York.
- B.V. Gnedenko, ed. (1983). *Aspects of Mathematical Theory of Reliability (Russian)*. Authors: E. Barzilovich, Yu. Belyaev, V. Kashtanov, I. Kovalenko, A. Solov'yev, and I. Ushakov. Radio i Svyaz, Moscow
- B.V. Gnedenko (1964a). On spare duplication. *Engrg Cybernet.* No. 4
- B.V. Gnedenko (1964b). On duplication with renewal. *Engrg Cybernet.* No. 5
- B.V. Gnedenko (1943). Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire. *Ann. Math.*, No. 44.
- B.V. Gnedenko, Yu.K. Belyaev and A.D. Solov'yev (1969). *Mathematical Methods in Reliability Theory*. Academic Press, New York. (Initial Russian edition in 1965.)
- B. Grigelionis (1963). On convergence of sums of steps stochastic processes to a Poisson Process. *Theory Probab. Appl.* V.8, No.2
- K.C. Kapur and L.R. Lamberson (1977). *Reliability in Engineering Design*. John Wiley, New York
- J.D. Kettelle (1962). Least-cost allocation of reliability investment. *Opns Res.* Vol. 10, No. 2
- A.N. Kolmogorov (1945) A number of target hits by several shots and general principles of effectiveness of gunfire (Russian). *Proc. Moscow Inst. Math.* Issue 12.
- I.N. Kovalenko, N.Yu. Kuznetsov, and P.A. Pegg (1998). *Mathematical Theory of Reliability of Time Dependent Systems with Practical Applications*. John Wiley, New York
- B.A. Kozlov and I.A. Ushakov (1970). *Reliability Handbook*. Holt, Rinehart and Winston, New York
- J.F. Lawless (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley, New York
- D.K. Lloyd and M. Lipow (1962). *Reliability: Management, Methods, and Mathematics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ
- M.V. Lomonosov and V. Polessky (1971). Upper bound for the reliability of information networks. *Problems Inform. Transmission*. Vol. 7
- M.V. Lomonosov and V. Polessky (1972). Lower bound of network reliability. *Problems Inform. Transmission*. Vol. 8
- N.R. Mann, R.E. Schafer and N.D. Singpurwalla (1974). *Methods of statistical Analysis of Reliability and Life Data*. John Wiley, New York
- R.A. Mirnyi and A.D. Solov'yev [1964] Estimation of system reliability on the basis of its units tests (Russian). In: *Cybernetics in Service for Communism*, Vol. 2, Energiya, Moscow
- E.E. Moore and C.E. Shannon (1956). Reliable circuits using less reliable relays. *J. of Franklin Inst.*, vol. 262.
- F. Moskowitz and J. McLean (1956). Some reliability aspects of system design. *IRE Trans.* Vol. PGRQC-8.
- W. Nelson (1982). *Accelerated Testing*. John Wiley, New York
- G.A. Ososkov (1956). A limit theorem for flows of similar events. *Theory Probab. Appl.*, V. 1, No. 2
- F. Proschan and T. Bray (1965). Optimum Redundancy under Multiple Constraints. *Opns. Res.*, Vol. 13, No. 5.
- Renyi (1956). Poisson-folyamat egy jellemzese (Hungarian). *Ann. Math. Statist.* V. 1, No. 4
- Yu.N. Rudenko and I.A. Ushakov (1989). *Reliability of Power Systems (Russian)*. Nauka, Novosibirsk
- F.A. Tillman, H. Ching-Lai, and W.Kuo (1980). *Optimization of System Reliability*. Marcel Dekker, New York
- I.A. Ushakov, ed. (1994). *Handbook of Reliability Engineering*. John Wiley, New York
- I.A. Ushakov (1969). *Solution of Optimal Redundancy Problem under Constraints (Russian)*. Sovyetskoe Radio, Moscow
- I.A. Ushakov and E.I. Litvak (1977). An upper and lower estimate of the parameters of two-terminal networks. *Engrg. Cybernet. (USA)*, vol. 15
- W. Weibull (1939). A statistical theory of the strength of materials. *Ing.Vetenskaps Akad. Handl.*, No. 151.

НАДЕЖНОСТЬ: ПРОШЛОЕ, НАСТОЯЩЕЕ, БУДУЩЕЕ

Пленарный доклад на открытии конференции «Математические методы в надежности» (MMR-2000), Бордо, Франция, 2000

Игорь Ушаков
(Сан-Диего, США)

*Я люблю обе стороны математики:
чистую – как возвышенный уход от
реальности, прикладную – как
страстное стремление к жизни.*

И.Хеллер

Абстракт: Кратко описываются основные направления современной теории надежности. вероятностное моделирование, статистический анализ, оптимизация технического обслуживания и запасов запасных частей. Дается краткий обзор наиболее значительных публикаций.

1.1. Введение

Я расцениваю как огромную честь приглашение сделать пленарную открывающую лекцию перед всемирным форумом специалистов по надежности. Еще совсем молодым человеком я бросился в бурный поток интенсивно тогда развивавшейся теории надежности и ее применений. Конец пятидесятых - начало шестидесятых были действительно годами бурного развития этого нового направления в прикладной математике и инженерии. С тех пор надежность развилась в мощную прикладную математическую дисциплину с развитыми теоретической и прикладной сторонами. Невозможно представить какой-либо исследовательский институт или производственное предприятие без лаборатории или отдела надежности.

Мне посчастливилось последние годы поработать в широко известной телекоммуникационной компании, где мне удалось применить свой опыт и свои знания в различных направлениях надежности: от анализа и расчета надежности и готовности спутниковой телекоммуникационной системы до контроля качества сотовых телефонов, от оптимального размещения запасных элементов для наземных базовых станций до прогноза гарантийных возвратов телефонов от пользователей. Каждый день приносил новые интересные задачи, которые требовали

решения. Новые решения порождали новые приложения и новые задачи. Что может быть более захватывающим, чем такого рода надежностное проектирование?

Я надеюсь, что мы все – от работников в производственной сфере до научно-исследовательских кадров, специалисты из промышленности и из университетов – докажем нашу полезность в следующем, XXI индустриальном веке, как мы делали это в прошлом и как мы это продолжаем делать сейчас.

1.2. Основные направления современной теории надежности

Можно выделить несколько направлений в современной теории надежности, основными из которых являются:

1. «Чистый» анализ надежности
 - Структурные модели
 - Функциональные модели
 - Модели технического обслуживания
2. Анализ эффективности
3. Анализ живучести
4. Анализ безопасности
5. Анализ защищенности
6. Анализ надежности математического обеспечения.

Первый пункт не нуждается в особых комментариях – это предмет нашей ежедневной деятельности. На остальных мы вкратце остановимся.

Анализ эффективности касается систем, для которых нельзя сформулировать критерий отказа в форме «все – или ничего». Показатели эффективности характеризуют способность системы выполнять свои основные функции с пониженным уровнем производительности, качества, скорости и т.п., т.е. с меньшей эффективностью. Отказы некоторых (или даже многих) элементов приводят лишь к частичной деградации операционных возможностей системы. На практике мы часто имеем дело с так называемым «частичным коэффициентом готовности» или с «частичным отказом». Такого рода модели используются для описания многоканальных систем (например, коммуникационных, транспортных, энергетических) или же систем с «встроенной избыточностью», где имеются дополнительные способы выполнения требуемых задач, хотя, возможно, и с пониженной эффективностью.

Для таких систем, у которых качеством функционирования в текущем состоянии, показатель эффективности, E , может быть записан в виде:

$$\sum_{\forall s} \Phi_s H_s$$

где H_s есть вероятность состояния s , и Φ_s есть условная вероятность того, что система в этом состоянии успешно функционирует.

Для систем, эффективность функционирования зависит от траектории изменения состояний, аналогичная формула может быть легко записана в общей форме (хотя немного примеров конструктивного применения общего случая известны нам).

Конечно, легко свести анализ эффективности к стандартному анализу надежности, выбрав соответствующий критерий отказа. Например, система может рассматриваться как отказавшая, если результирующая «пропускная способность» системы упала ниже некоторого заданного уровня.

Живучесть есть специальное свойство системы, характеризующее ее способность «выдержать» внешнее воздействие. Такими воздействиями могут быть грубые непредсказуемые ошибки оператора, внешние природные воздействия (землетрясения, ураганы, наводнения) или враждебные действия (военные действия неприятеля, теракты). В этом случае рассматривается ситуация, когда указанное возмущение на систему оказывается на наиболее критичный элемент системы. Анализ живучести обычно проводится в минимаксных терминах и сводится к анализу «узких мест», или «минимальных

сечений». Обычно живучесть рассматривается как характеристика больших территориальных систем.

Мерой живучести обычно выбирают мощность множества элементов, разрушение которых приводит к гибели системы. Одна из возможных характеристик живучести есть минимальное подмножество, X^* , такое, что:

$$X^* = \min \{X: \Phi_{\bar{X}} = 0\}$$

где X есть подмножество разрушенных элементов, а $\bar{X}$ есть дополнительное подмножество.

Хотя живучесть, вообще говоря, не является вероятностной характеристикой, тем не менее, иногда используются несколько уровней «возможностей возникновения» того или иного возмущения.

Безопасность есть свойство системы, характеризующее ее функционирование (производство товаров, генерация электроэнергии, транспортировка газа и нефтепродуктов, и т.п.) без опасных последствий для человека и окружающей среды. Обычно безопасность характеризуется показателями вероятностной природы, близкими тем, которые используются при анализе надежности. В некотором смысле появляется двумерная модель. Например, можно сформулировать следующую оптимизационную задачу:

$$\min_{\Psi} \{C(\Psi): R(\Psi) \geq R_{required}, C(\Psi) \geq C_{required}\}$$

где Ψ есть конфигурация системы, C – ее стоимость, R – показатель надежности, а S – показатель безопасности.

В последнее время задачи живучести и безопасности часто рассматриваются в рамках вероятностной теории риска.

Защищенность системы рассматривается часто в рамках проблем, связанных с анализом надежности и безопасности. Действительно, многие системы должны работать не только надежно, но должны быть также защищены от несанкционированного доступа. Многие военные, банковские и другие телекоммуникационные системы, имеющие дело с предельно конфиденциальной информацией, немыслимы без обеспечения их высокой защищенности. В этой связи возникает вопрос: “*Quis custodiet ipsos custodes?*” (“Кто сторожит самих сторожей?”) Поскольку рассматриваемые системы нельзя считать функционирующими нормально, если

защита у них не работает, возникает вопрос о «двух надежности» – технической и информационной.

Надежность программного обеспечения... Здесь мы подошли к наиболее двусмысленному вопросу в теории и практике надежности – так называемой надежности программного обеспечения (софтвера). Многократные попытки применения традиционных концепций теории надежности оказались практически безуспешными и привели только к определенной неразберихе. Действительно, кто может толком объяснить, что такое «среднее время безотказной работы» для программы? И прежде всего, что понимать под отказом в данном случае?

Ответ на эти вопросы лежит через другие вопросы: Что понимается под «надежностью» в случае программного обеспечения? Давайте рассмотрим основные характеристики, принятые в теории надежности:

- случайная природа отказов
- зависимость появления отказов от времени
- независимость отдельных отказов (или вероятностная зависимость)

С чем имеем дело мы, анализируя программное обеспечение? Прежде всего, отказы программного обеспечения не имеют случайной природы: они возникают всякий раз, как повторяются породившие их условия. В некотором смысле, отказы программного обеспечения не являются «объективными», они зависят от вида выполняемых операций, от характера входных данных, наконец, даже от типа пользователя. Позвольте мне сравнить отказы программного обеспечения с опечатками в книге. Допустим, что глава 1 некоей книги содержит массу ошибок, а во второй главе ошибок нет вовсе. Один из пользователей обращается исключительно к первой главе и считает, что книга фантастически плоха. Другой работает только с главой 2 и говорит всем, что книга превосходна. Кто из них прав?

Отказы программного обеспечения не зависят от времени так, как это принято понимать: если вы не используете программу, она не может отказать! Наконец, независимость отказов. Для компьютерных программ нет понятия выборки, все программы идеально репродуцируются («cloning»). «Замена» «отказавших» программ не имеет смысла! Какой смысл заменять одну Молли-Долли на другую Молли-Долли с теми же генами, с теми же болезнями, с теми же прочими свойствами...

Проблема *качества* компьютерных программ представляется предельно важной, тем более если учесть, что все больше и больше современных систем зависит от этого. Настало время посвятить решению

этой проблемы больше времени и сил со стороны прикладных математиков. Однако попытки механически распространить математические модели и методы традиционной теории надежности на так называемую «надежность программного обеспечения» представляется не только бесперспективной, но и вредной.

Конечно, в этой новой области уже имеется много интересных и полезных публикаций [Муса и др., 1987; Сингпурвалла и Уилсон, 1999]. Однако в целом, это направление еще остается весьма противоречивым.

1.3. История идей в теории надежности

Конечно, развитие теории надежности началось не вчера. Первая волна современной теории надежности прокатилась по Соединенным Штатам Америки в конце 50-х годов. Впервые специалисты по теории и практике надежности начали собираться на Конференции по надежности, организованные Институтом Радиоинженеров (IRE¹), которые сразу же стали регулярными (ежегодными). Первый же сборник докладов конференции сыграл революционизирующую роль в информационном обмене между экспертами в области надежности. С небольшой задержкой подобные же конференции стали собираться в бывшем Советском Союзе. Правда, те конференции были закрытыми, поэтому их влияние на широкие инженерные круги было достаточно ограниченным. В определенном смысле, подгоняемые психозом «холодной войны» и соревнованием в области вооружения, обе великие державы стали полюсами развития исследований в области надежности.

Однако, нетрудно найти примеры активности в области надежности и в более раннем периоде. Мы начнем с хорошо известного исторического примера.

В середине 30-х годов шведский инженер и математик В. Вейбулл, анализируя отказы, связанные с износом шарикоподшипников, предложил простую и удобную математическую модель для их описания, которая известна теперь как распределение Вейбулла [Weibull, 1939]. Это хорошо известное всем распределение очень удобно, поскольку два его параметра – масштаба и формы – позволяют аппроксимировать практически любые эмпирические распределения. Вскоре выдающийся русский математик Б. Гнеденко нашел три класса предельных распределений [Gnedenko, 1943], один из которых

¹ Позднее преобразованное в Институт инженеров по электронике и электротехнике (IEEE).

совпадал с распределением Вейбулла. Эти фундаментальные результаты Б. Гнеденко были не простой (пусть даже и гениальной) догадкой: они были научно обоснованным строгим результатом. Мне представляется, что это был первый шаг последовавшего развития теории надежности.

Теперь давайте вернемся к тому потоку идей в теории надежности, который хлынул после окончания Второй Мировой войны. Пятидесятилетие, прошедшее с тех пор, отмечено огромным числом новых теоретических результатов и инженерных решений в области надежности.

Возможно, работы Б. Эпштейна и М. Соболя [Epstein, 1960; Epstein and Sobel, 1953, 1954, 1955] оказали в свое время наибольшее влияние на развитие статистической ветви теории надежности.

Д. Ллойд и М. Липов [Lloyd and Lipow, 1962] рассмотрели новую интересную задачу в статистике: оценка доверительных границ для показателей надежности систему, основанная на результатах испытаний входящих в нее элементов. Первый строгий результат в этом направлении был получен Р. Мирным и А. Соловьевым [1964] для случая безотказных испытаний. Их модель соответствовала модели «наислабейшего звена». Затем некоторые результаты были получены Ю. Беляевым [1967], который предложил метод Монте Карло для общего случая. Большое число новых аналитических результатов для различных случаев было получено И. Павловым [1972, 1974, 1976, 1982; см. также Gnedenko, B.V., I.V. Pavlov, and I.A. Ushakov, 1999] и другими [Беляев, 1968; Беляев и др., 1967; Судаков, 1974; Тескин, 1969].

Нужно особо отметить, что развитие теории массового обслуживания, и в первую очередь, работы А.Хинчина [1963] и Б. Гнеденко и Коваленко [1966, 1987], сыграло свою решающую роль в развитии аналитических методов анализа систем с восстановлением. Использование марковских процессов положило начало практическому оцениванию систем с восстановлением [Гнеденко, Беляев, Соловьев, 1966; Козлов и Ушаков, 1966, 1975].

Много работ было посвящено анализу сложных систем с деградацией качества функционирования за счет «частичных отказов». Существенный толчок развитию этого направления был дан работами [Birnbbaum, 1969; Birnbbaum et al., 1961; Birnbbaum and Esary, 1965; Esary and Proschan, 1963].

В России близкие по духу работы носили название оценки эффективности функционирования сложных систем [Ушаков, 1960, 1966; Дзиркал, 1974; Gnedenko

and Ushakov, 1995;]. Действительно, вряд ли сложную систему можно характеризовать примитивными бинарными критериями работоспособности типа «да-нет».

Заметим, кстати, что все упомянутые выше идеи оценки эффективности по существу только развивают основную идею, высказанную еще в годы войны А.Н. Колмогоровым [1945], когда он анализировал вероятность поражения вражеских самолетов зенитным огнем.

Первые статьи по оптимальному резервированию были опубликованы еще в середине 50-х годов [Moscowitz and McLean, 1956]. С нынешних позиций те статьи выглядят несколько наивными, однако нельзя не заметить, что они были первыми ласточками в этом важном практическом направлении теории и практики надежности. Первый строгий алгоритм применительно к задачам надежности был получен Р. Беллманом и С. Дрейфузом [Bellman and Dreyfus, 1958]. Однако только Д. Кеттелл [Kettelle, 1962] предложил эффективный практический алгоритм решения этой важнейшей практической проблемы (см. изложение в [Козлов и Ушаков, 1966, 1975] и в [Надежность технических систем: Справочник, 1985]).

Хотя это была лишь модификация алгоритма динамического программирования, именно эта работа привела к широкому внедрению методов оптимального обеспечения запасными элементами в практику.

Столь же важной была и работа Дж. Блэка и Ф. Прошана [Black and Proschan, 1959], в которой была строго обоснована применимость метода наискорейшего спуска.

Дальнейшее развитие методы оптимального резервирования получили в работах [Proschan and Bray, 1965; Ушаков, 1966; Tillman et al., 1980; Gnedenko and Ushakov, 1995].

Доказательство двух предельных теорем в теории процессов восстановления (рекуррентных точечных процессов) сыграло решающую роль в развитии теории надежности восстанавливаемых систем. А. Реньи [Renyi, 1956] сформулировал и доказал теорему асимптотического «разрежения» точечного потока, и тогда же Г. Ососков [1956] доказал теорему об асимптотическом поведении суперпозиции точечных потоков. Позже Ю. Беляев [1963], Григелионис [1963] и И.Погожев [1964] обобщили эти результаты. Эти асимптотические теоремы позволяют построить практически удобные инженерные методы приближенного анализа сложных высоконадежных

систем с восстановлением [Gnedenko and Ushakov, 1995].

Результаты Д. Кокса в теории точечных случайных процессов [Cox, 1962; Cox and Isham, 1980] оказали существенное влияние на развитие теории надежности, открыв новые пути исследования.

Б. Гнеденко [1964a, 1964b] был первым, кто начал разрабатывать асимптотические методы анализа систем с восстановлением еще в начале 60-х годов. Он рассмотрел дублированную систему с ненагруженным и нагруженным резервом и показал, что асимптотическое распределение времени безотказной работы таких систем является экспоненциальным и не зависит от распределения времени восстановления (если это время в среднем мало по сравнению с наработкой на отказ). Эти первые работы открыли новое направление в теории надежности, которое затем успешно развивали, в первую очередь, И. Коваленко [1967; 1975; 1980] и А. Соловьев [1968, 1970; см. также Гнеденко и Соловьев, 1974, 1975]. Сейчас методы асимптотического оценивания надежности широко используются для анализа высоконадежных сложных систем с восстановлением [Gnedenko and Ushakov, 1995].

Интересные идеи агрегирования состояний полумарковских процессов с применениями к задачам надежности были предложены В. Королюком и А. Турбиным [1978, 1982], а затем развиты в ряде работ [Korolyuk and Korolyuk, 1997; Павлов и Ушаков, 1978]. Интересные приложения к надежности содержатся в работах В. Анисимова [Anisimov, 2000]) и Д. Сильвестрова [1976].

В конце 40-х годов Джон фон Нейман применил статистическое моделирование (метод Монте-Карло) для вычисления многомерных интегралов по весьма замысловатым областям интегрирования. Вскоре эта техника стала использоваться для численного анализа систем массового обслуживания, включая и анализ надежности систем с восстановлением. В этой связи следует в первую очередь отметить работы Н. Бусленко и его учеников [1968; см. также Бусленко, Калашников и Коваленко, 1973], а также Р. Рубинштейна [Rubinstein, 1981].

В начале 50-х годов Е. Мур и К. Шеннон публикуют свою знаменитую статью по асимптотическому анализу надежности двухполюсных сетей [Moore and Shannon, 1956]. Они показали так называемую S-образную зависимость надежности сети от надежности ее элементов. Позднее, в конце 60-х годов Р. Барлоу и Ф. Прошан получили верхнюю и нижнюю оценки для произвольных двухполюсных сетей [Barlow and Proschan, 1965, 1975]. Эти границы

выражались через полное множество путей и разрезов графа. Затем появились верхняя и нижняя оценки Литвака-Ушакова [Ушаков и Литвак, 1977; Gnedenko and Ushakov, 1995], основанные на использовании реберно-непересекающихся путей и разрезов графа. В определенном смысле последние граничные оценки являются более конструктивными для практических приложений. Работы Р. Барлоу и Ф. Прошана оказали также влияние и на М. Ломоносова² и В. Полесского [1971, 1972].

Р. Барлоу, К. Дерман, Л. Хантер и Ф. Прошан были первыми, кто уделил серьезное внимание задачам технического обслуживания [Barlow and Hunter, 1960; C. Derman, 1963; Barlow et al., 1963]. К сожалению, эти методы, развитые в дальнейшем в изощренные математические модели все еще не достигли уровня, пригодного для применения на практике (во многом благодаря нехватки необходимых исходных данных).

Р. Барлоу и Ф. Прошан [Barlow and Proschan, 1965, 1975] ввели в рассмотрение весьма продуктивную идею разделения распределений вероятностей на «стареющие», с возрастающей функцией интенсивности, и «молодеющих», с убывающей функцией интенсивности. Это открыло пути анализа надежности, инвариантные типу распределения и зависящие только от класса, к которому данное распределение относится. (Последнее легко формулируется на базе физических свойств технического изделия.)

Введенный Б. Эфроном [Efron and Tibshirani, 1979] быстрый метод сейчас широко используется в прикладной статистике. Одно из интересных приложений для доверительной оценки надежности системы на основании надежности элементов приводится Г. Марцем и Б. Дюраном [Martz and Duran, 1985].

Такое важное направление в теории надежности как ускоренные испытания, возникло много лет назад [Miner, 1945; Седакин, 1966; Герцбах и Кордонский, 1966; Перроте и др., 1968]. Новаторская работа Кокса [Cox, 1972], касающаяся пропорциональной случайной модели, оказала свое влияние на развитие теории ускоренных испытаний. В последние годы произошел буквально скачок в этом направлении. Среди новых книг заслуживает особого внимания книга У. Нельсона [Nelson, 1990], ставшая настольной книгой инженера-испытателя. Отметим также и другие интересные работы в этой области [Cox and Oaks, 1984; Lawless, 1986; Crowder et al., 1988]. Микер и Эскобар [Meeker and Escobar, 1999]

² Не путать с Михайло Васильевичем Ломоносовым (1711-1765) !

развили новый класс моделей, так называемые модели деградации.

Интересные результаты можно найти в [Shaked and Singpurwalla, 1983; Sethuraman and Singpurwalla, 1982]. Н. Сингпурвалла [Singpurwalla, 1995] предложил новую модель деградации, учитывающую воздействие окружающей среды. Модели ускоренных испытаний с нагрузками, зависящими от времени, рассмотрели В. Багданавич и М. Никулин [Bagdanavichius and Nikulin, 1997]

В последние годы появилось много интересных публикаций по байесовским методам в надежности: Н. Манн и др. [Mann, Schafer and Singpurwalla, 1974], Г. Марц и Б. Дюрэн [Martz and Duran, 1985], В. Савчук [1989]. Эти методы могут привести к конструктивным способам агрегации данных разнородных испытаний, оценки надежности уникальных изделий по их прототипам и т.п.

* * *

Эти краткие заметки, конечно же, не смогли отметить всех тех, кто внес заметный вклад в развитие теории и практики надежности. Автор попытался лишь сделать краткий обзор идей в области теории надежности, хотя и здесь читатель может найти серьезные прорехи. Каждый понимает, что подобного рода обзоры всегда страдают от авторского субъективизма и степени его компетентности. Более того, это задача достаточно неблагодарная – можно потерять друзей, которых забыл вспомнить.

1.4. В бурном потоке публикаций по надежности

С момента бурного расцвета теории надежности произошла одна тревожная штука: нас захлестнул буквально шквал публикаций: сотни новых книг, тысячи новых статей... Хорошо ли это или плохо? Хорошо, потому что это говорит о глубоком проникновении идеи надежности в «народные массы». Но становится ли наша профессиональная жизнь легче под этой лавиной информации? Не напоминает ли это ситуацию, когда попросившего напиток бросают в безбрежное и бездонное озеро (Байкал, например)?

Давайте вспомним только самые существенные публикации в области надежности.

Одной из первых удачных книг по теории надежности была книга И.Базовского [Bazovsky, 1961]. Эта книга была проста, информативна и конструктивна.

Следующей значительной и весьма содержательной книгой была книга Д. Ллойда и М. Липова [Lloyd and Lipow, 1962]. Эта книга была наполнена множеством интересных идей и оригинальных решений.

Истинную революцию (в положительном смысле, конечно) произвело появление книг Б. Гнеденко, Ю. Беляева и А. Соловьева [1965] и Р. Барлоу и Ф. Прошана [Barlow and Proschan, 1965]. Роль этих двух прекрасных книг трудно переоценить. В первой из них содержалось много новых интересных результатов, касающихся расчета надежности систем с восстановлением (включая асимптотические методы), специальные методы анализа полевых данных о надежности, а также другие важные в инженерном смысле задачи. Вторая книга ввела концепцию монотонных структур и их вероятностного анализа, привела интересные исследования распределений а возрастающей и убывающей интенсивностями отказов, систематически рассмотрела задачи оптимального резервирования и оптимальных профилактик.

Можно с полным основанием сказать, что эти две книги заложили прочный фундамент современной теории надежности. А ними последовали книга под редакцией Б. Гнеденко [1983] и книги Р. Барлоу и Ф. Прошана [Barlow and Proschan, 1975; Barlow, 1998].

В 1966 был опубликован Справочник [Козлов и Ушаков, 1966], который был переведен в США [Kozlov and Ushakov, 1970], а затем неоднократно дополнялся и переиздавался в СССР [Козлов и Ушаков, 1975; Ушаков, ред., 1985], обеих Германиях [Kozlov und Uschakow, 1978, 1979], Чехословакии [Usakov, ed.1989] и США [Ushakov, ed., 1995].

Поток издаваемых книг возрастает буквально экспоненциально, однако некоторые из них сверкают так ярко, что не обратить на них внимание просто невозможно: [Mann, Schafer and Singpurwalla, 1974; Kapur and Lamberson, 1977; Gertsbakh, 1977; Tillman, Ching-Lai and Kuo, 1980; Lawless, 1982; Nelson, 1982; Beihelt and Franken, 1983; Getsbakh, 1989; Voinov I Nikulin, 1993; Viertl, 1996; Birulini, 1997; Kovalenko, Kuznetsov and Pegg, 1989].

Некоторые книги (например, [Болотин, 1971; Руденко и Ушаков, 1989]) могут быть упомянуты, как книги со специфической проблемной ориентацией (механические системы, системы энергетики).

Однако найти стоящие книги в нынешнем потоке литературы по надежности становится все труднее и труднее... Иногда даже создается впечатление, что какого-либо отбора рукописей для публикации не производился вовсе: издательства просто «зашибают

деньгу». Необходимо организовать какой-то Форум специалистов по надежности, который был бы способен осуществлять честную и жесткую оценку публикаций в регулярно издаваемом обзоре новых публикаций. В противном случае, новое поколение специалистов по надежности потеряет всякую ориентацию в этом мире. Пора уже кричать: «S.O.S.!!! Save Our Science!» («Спасите нашу науку!»)

1.5. Проблемы, ожидающие решения

«История учит нас, что наука развивается непрерывно. Мы знаем, что каждое поколение имеет свои собственные задачи, которые последующие поколения или решают или же вовсе о них забывают, как о не имеющих ценности, заменяя их новыми задачами.» Это цитата из лекции Давида Гильберта «Математические проблемы», прочитанной в 1900 году. Гильберт говорил о «чистой» математике, однако те же слова – даже спустя 100 лет – остаются справедливыми для прикладной математики, в том числе такой ее ветви как теория надежности.

Прошедшее столетие было очень продуктивно для теории надежности: обилие новых идей, множество полезных результатов, интересные практические приложения... Иногда раздаются голоса, что наступил чуть ли не кризис в теории надежности и ее приложениях. Лучший ответ на такие сомнения содержится в уже упоминавшейся лекции Гильберта!

Инженерная теория надежности напоминает медицину. Разница лишь в областях приложения: техническая система и человеческое тело. Можно ли представить себе, что медицина исчерпает себя?! Как говорил Марк Твен: «Слухи о моей смерти оказались сильно преувеличенными».

Действительно, имеется много важных проблем, которые ожидают своего решения. Перечислим некоторые из них.

- **«Надежность программного обеспечения».** Неважно, как мы будем называть эту проблему, корректно ли само такое название: проблема существует и проблема эта архиважная. Разработка конструктивной теории качества софтвера вне прокрустового ложа традиционной теории надежности – важная и интригующая задача.
- **«Человеческий фактор» в надежности.** Львиная доля отказов в системах с активным участием людей связана с ошибками обслуживающего персонала (авиационные аварии, катастрофы на атомных станциях, и

т.п.). В отличие от оборудования, человек не может быть описан простыми вероятностными моделями, хотя некоторые операции и носят повторяющийся характер. А каково поведение человека в экстремальных ситуациях? Ясно, что и здесь тупой перенос методов современной теории надежности обречен на провал. Проблема ждет новых и конструктивных методов своего решения.

- **Анализ надежности уникальных изделий.** Несмотря на наш индустриальный век, где почти все производится в десятках и сотнях тысяч экземпляров, мы наблюдаем создание уникальных единичных образцов: космические аппараты, огромные плотины, ядерные реакторы, и т.д. Все эти объекты выполняют предельно ответственные функции, а потому должны быть предельно надежными. Обычно такие новые изделия не имеют каких-либо прототипов, у нас нет никакого опыта по созданию подобных изделий... Как оценить их надежность? В каких терминах? Как оценить достоверность подобных оценок?
- **Глобальные территориальные системы.** Все больше и больше систем представляют собой огромные территориально распределенные комплексы: это и телекоммуникационные сети, и трубопроводы для перекачки газа и нефти, и электроэнергетические передачи, и военные системы. Подобные системы, для которых даже само определение надежности функционирования представляет весьма непростую задачу, ждут развития специального аппарата для их анализа и оценки.
- **Телекоммуникационные сети.** Стандартный анализ надежности таких сетей сводится обычно к анализу связности. Однако сеть имеет каналы с различной пропускной способностью, очень многое зависит от протоколов передачи информации, сами критерии успешности функционирования телекоммуникационных сетей часто остаются неопределенными. Почти очевидна необходимость симбиоза теории надежности с теорией массового обслуживания в каком-то новом качестве.
- **Статистическое моделирование (метод Монте-Карло).** Статистическое моделирование, являющееся очень эффективным средством анализа различных сложных систем, остается пока искусством, овладение которым под силу только профессионалам в данной области. Возможно, создание простых и доступных

(“user friendly”) специальных языков высокого уровня поможет более широкому внедрению методов статистического моделирования в инженерную практику.

- **Развивающиеся системы.** Еще одна интригующая сфера – анализ надежности развивающихся систем. Как использовать текущую информацию о надежности функционирования системы для управления процессом ее развития? Как учесть в текущем проектировании будущие изменения в структуре и в самой комплектации системы? Как спроектировать систему таким образом, чтобы текущее оптимальное решение не вступило бы в противоречие с требуемым оптимальным решением на следующем этапе разворачивания системы
- **Иерархические системы запасных частей.** Нахождение оптимального состава запасных элементов для отдельно взятой системы – задача хорошо известная и в общем решенная. Однако решение этой задачи для иерархической системы складов (центральный, региональные, локальные) запасных элементов со специфическими правилами пополнения складов и доставки запасных деталей пользователям еще ждет своего решения. Возможно, вопрос стоит о некоем сплыве теории надежности с теорией управления запасами.
- **«Непрерывные» модели надежности.** Некоторые очень сложные системы практически не допускают возможности использования моделей с дискретными состояниями. Уже есть начальные попытки анализа подобных систем как «непрерывных объектов», однако основная работа в этом направлении все еще впереди.
- **Элементы с несколькими состояниями.** Некоторые системы состоят из элементов, каждый из которых может иметь более, чем два состояния: работоспособности и отказа. Примеры нынешних разработок в этой области носят больше характер чистых теоретических изысканий, нежели практически применимых методов.
- **Развитие работ в области ускоренного моделирования.** Ускоренные испытания во многих случаях являются единственным инструментом прогноза надежности новых изделий массового производства. Решение проблемы организации реальной обратной связи таких испытаний с результатами полевых испытаний и реальной эксплуатации очевидна. Однако на практике здесь часто существует настоящая пропасть! Только такая обратная связь позволит

подойти к разработке адекватных моделей ускоренных испытаний.

- **Агрегирование данных о надежности.** Данные полевых испытаний и реальной эксплуатации являются обязательной основой любых достоверных расчетов надежности. Однако сами эти данные оказываются разрозненными, собранными в разных условиях, по разным планам испытаний и даже для не совсем идентичных образцов. Как корректно (в определенном смысле) объединить такие данные с целью получения более достоверных результатов?

1.6. Заключение

Представляется, что возникла острая необходимость создания информационной системы с регулярными обзорами хотя бы книг по надежности. Например, допустим, 20-30 специалистов по надежности могут посылать свои балльные оценки о различных сторонах той или иной книги, т.е. выходящие книги будут иметь соответствующий «рейтинг». Необходимо также публиковать достаточно регулярно (например, ежегодно) обзоры новых работ по различным направлениям в теории и практике надежности.

В международное сообщество специалистов по надежности входят десятки стран: Англия, Болгария, Германия, Дания, Израиль, Индия, Испания, Италия, Китай, Россия, Соединенные Штаты Америки, Украина, Франция, Швеция, Япония... Назрела необходимость в Международном научном обществе специалистов по надежности для лучшего обмена информацией, идеями и результатами. Принимая во внимание исключительную роль, какую сыграл в развитии теории надежности Борис Владимирович Гнеденко, это общество следовало бы назвать в его честь. Это Гнеденковское Общество должно бы иметь свой вебсайт на Интернете для широкого информационного обмена, рецензирования работ по надежности, сообщения о новых публикациях, и т.п. необходим и международный журнал по надежности (возможно, также на Интернете). Представляется, что этот журнал должен публиковать в основном обзоры и заказные статьи. Это не означает, что журнал этот должен быть «элитным». По рекомендациям ведущих специалистов здесь могут перепечатываться некоторые интересные статьи из других изданий.

Создание такого общества было бы неплохим началом нового тысячелетия!

Заключительное прошение о помиловании: В любом обзоре кто-нибудь оказывается забытым... Простите меня, если чьи-то имена не вошли в мой обзор. Это, безусловно, не умышленное действие, а только лишь следствие того, о чем хорошо сказал Козьма Прутков: «Не объять необъятного!»

Библиография

- Беляев Ю.К. (1968) Об упрощенных методах построения доверительных границ для надежности систем по результатам испытаний компонент. Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика, №5.
- Беляев Ю.К., Дугина Т.Н., Чепурин Е.В. (1967) Вычисление нижней доверительной оценки для вероятности безотказной работы сложных систем. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, №2, 3
- Болотин В.В. (1971) Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат
- Бусленко Н.П. (1968) Моделирование сложных систем. М., Наука.
- Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. (1973) Лекции по теории сложных систем. М., Сов. радио.
- Гнеденко Б.В. (1964а) О ненагруженном дублировании. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, №4.
- Гнеденко Б.В. (1964б) О дублировании с восстановлением. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, №5.
- Гнеденко Б.В. (1968) Асимптотические методы в теории надежности. Стандарты и качество, №2.
- Гнеденко Б.В., редактор (1983) Вопросы математической теории надежности. (Авт.: Е.Ю. Барзилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко, А.Д. Соловьев, И.А. Ушаков.) М., Радио и связь
- Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. (1965) Математические методы в теории надежности. М., Наука.
- Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. (1966) Введение в теорию массового обслуживания. (Второе дополненное изд., 1987). М., Наука.
- Гнеденко Д.Б., Соловьев А.Д. (1974) Одна общая модель резервирования с восстановлением. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, №6.
- Гнеденко Д.Б., Соловьев А.Д. (1975) Оценка надежности сложных восстанавливаемых систем. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, №3.
- Григелионис Б. (1963) О сходимости сумм ступенчатых процессов к пуассоновскому. Теория вероятностей и ее применения, том 8, №2.
- Дзиркал Э.В. (1974) Задание и проверка требований к надежности сложных изделий. М., Радио и связь.
- Коваленко И.Н. (1967) Асимптотический метод оценки надежности сложных систем. В кн. О надежности сложных систем. М., Сов. радио.
- Коваленко И.Н. (1975) Исследования по анализу надежности сложных систем. Киев, Наукова думка.
- Коваленко И.Н. (1980) Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. М., Сов. радио.
- Козлов Б.А. и Ушаков И.А. (1966) Краткий справочник по расчету надежности радиоэлектронной аппаратуры. М., Сов. радио.
- Козлов Б.А. и Ушаков И.А. (1975) Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. М., Сов. радио.
- Колмогоров А.Н. (1945) Число попаданий при нескольких выстрелах и общие принципы оценки эффективности стрельбы. Тр. МИАН СССР. Том 12.
- Кордонский Х.Б., Герцбах И.Б. (1966) Модели отказов. М., Сов. радио
- Ломоносов М.В., Полесский В.С. (1971) Верхняя граница для надежности информационных сетей. Проблемы передачи информации, Вып. 7.
- Ломоносов М.В., Полесский В.С. (1972) Нижняя граница надежности сети. Проблемы передачи информации, Вып. 8.
- Надежность технических систем: Справочник. (1985). Под ред. И.А. Ушакова. М., Радио и связь.
- Ососков, Г.А. (1956) Предельная теорема для потоков подобных событий. Теория вероятностей и ее приложения, Том 1, №2.
- Павлов И.В. (1972) Оценка вероятности безотказной работы системы по результатам испытаний стареющих элементов. Надежность и контроль качества, №14.
- Павлов И.В. (1974) Оценка надежности системы по результатам испытаний стареющих элементов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, № 3.
- Павлов И.В. (1976) Интервальное оценивание надежности системы по оценкам надежности ее компонент. Надежность и контроль качества. №10.
- Павлов И.В. (1982) Статистические методы оценки надежности сложных систем по результатам испытаний. Под ред. И.А. Ушакова. М., Радио и связь.
- Павлов И.В., Ушаков И.А. (1978) Асимптотическое распределение времени до выхода из ядра полумарковского процесса. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, №5.
- Перроте А.И., Карташов Г.Д., Цветаев К.Н. (1968) Основы ускоренных испытаний на надежность. М., Сов. радио
- Руденко Ю.Н., Ушаков И.А. Надежность систем энергетики. Под ред. Б.В. Гнеденко. Новосибирск, Наука
- Седякин Н.М. (1966) Об одном физическом принципе в теории надежности. Техн. кибернетика, №3.
- Сильвестров Д.С. (1976) Об одном обобщении теоремы восстановления. ДАН СССР. Серия А11.
- Соловьев А.Д. (1968) Предельные теоремы для процесса гибели и размножения. Теория вероятностей и ее применения, №4.
- Соловьев А.Д. (1970) Резервирование с быстрым восстановлением. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, №1.
- Судаков Р.С. (1974) К вопросу об интервальном оценивании показателя надежности последовательной системы. Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. №3.
- Тескин О.И. (1969) Точные доверительные границы для надежности резервированных систем при безотказных испытаниях их элементов. – Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика, №4.

- Ушаков И.А. (1960) Оценка эффективности сложных систем. В кн. «Надежность радиоэлектронной аппаратуры». М., Сов. радио.
- Ушаков И.А. (1966) Эффективность функционирования сложных систем. В кн. «О надежности сложных систем». М., Сов. радио.
- Ушаков И.А. (1969) Методы решения простейших задач оптимального резервирования при наличии ограничений. М., Сов. радио.
- Ушаков И.А., редактор (1985) Надежность технических систем: Справочник. (Авт.: Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др.). М., Радио и связь
- Ушаков И.А., Литвак Е.И. (1977) Верхняя и нижняя оценки параметров двухполюсных сетей. Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика, №1.
- Ушаков И.А., Черкесов Г.Н. (1985) Роль математических методов в оценке и обеспечении надежности больших систем энергетики. В кн. Теоретико-методические проблемы надежности систем энергетики. Ред. Ю.Н. Руденко. Новосибирск, Наука.
- Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания. Изд. АН СССР.
- Anisimov, V.V. (2000) Asymptotic analysis of reliability for switching systems in light and heavytraffic conditions. Recent Advances in Reliability Theory. Ed. by N. Limnios and M. Nikulin. Birkhauser, Boston-Basel-Berlin
- Bagdanavichius, V., and M. Nikulin (1997) Accelerated testing when process of production is unstable. Statist. and Probab. Letters, Vol. 35.
- Barlow, R. (1998) Engineering Reliability. ASA-SIAM, Philadelphia, PA
- Barlow, R., and F. Proschan (1965) Mathematical Theory of Reliability. John Wiley & Sons, NY. (Русский перевод: Р. Барлоу, Ф. Прошан. Математическая теория надежности. Под ред. Б.В. Гнеденко. М., Сов. радио, 1969.)
- Barlow, R., and F. Proschan (1975) Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Probability models. John Wiley & Sons, NY. (Русский перевод: Р. Барлоу, Ф. Прошан. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. Пер. с англ. И.А. Ушакова. М., Наука, 1984.)
- Bazovsky, I. (1961) Reliability: Theory and Practice. John Wiley & Sons, NY. (Русский перевод: И. Базовский. Надежность: теория и практика. Пер. с англ. под ред. Б.Р. Левина. М., Мир, 1965.)
- Bellman, R., and S. Dreyfus (1958) Dynamic programming and reliability of multi-component devices. Opns Res., Vol. 6, № 2. (Русский перевод: Р.Беллман, С.Дрейфус. Динамическое программирование и надежность многоэлементных устройств. В сб. переводов: Оптимизационные задачи надежности. Под ред. И.А. Ушакова. М., Стандарты, 1968)
- Birnbaum, Z. (1969) On importance of different components in multicomponent system. In «Multivariate Analysis, II». Ed. by P. Krishnaiah. Academic Press, NY.
- Birnbaum, Z., and J.D. Esary (1965) Modules of coherent binary systems. SIAM Journal of Appl. Math., № 13
- Birnbaum, Z., J.D. Esary, and S.C. Saunders (1961) Multicomponent systems and structures, and their reliability. Technometrics, №3.
- Black, G., and F. Proschan (1959) On optimal redundancy. Opns Res., Vol. 7, №5 (Русский перевод: Дж. Блэк, Ф. Прошан. Оптимальное резервирование. В сб. переводов. Оптимизационные задачи надежности. Под ред. И.А. Ушакова. М., Стандарты, 1968)
- Cox, D. (1962) Renewal Theory. John Wiley & Sons, NY. (Русский перевод: Кокс, Д. Теория восстановления. Пер. с англ. под ред. Ю.К. Беляева. М., Сов. радио, 1967)
- Cox, D. (1972) Regression models and life tables. J. of Royal Statist. Society, Vol. 34
- Cox, D., and Isham, (1980) Point Processes. Chapman and Hall, London.
- Cox, D., and Oakes (1984) Analysis of Survival Data. Chapman and Hall, London.
- Crowder, M.J., A.C. Kimber, R.L. Smith, and T.J. Sweeting (1994). Statistical Analysis of Reliability data. Chapman and Hall, London.
- Efron, B.A., and Tibshirani (1979) An Introduction to the Bootstrap. Chapman and Hall, London.
- Epstein, B. (1960) Testing for validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential. Technometrics, № 1, 2.
- Epstein, B., M. Sobel (1953) Life testing. J. Amer. Stat. Assoc., Vol. 48.
- Epstein, B., M. Sobel (1954) Some theorems relevant to life testing from exponential distribution. Ann. Math. Statist., Vol. 25.
- Epstein, B., M. Sobel (1955) Sequential life test in the exponential case. Ann. Math. Statist., Vol. 26.
- Esari, J.D., and F. Proschan (1963) Coherent structures of non-identical components. Technometrics, №5.
- Gnedenko, B.V. (1943) Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire. Ann. Math., №44.
- Gnedenko, B.V., and I.A. Ushakov (1995) Probabilistic Reliability Engineering. John Wiley & Sons, NY.
- Gnedenko, B.V., I.V. Pavlov, and I.A. Ushakov (1999) Statistical Reliability Engineering. John Wiley & Sons, N.Y.
- Handbook of Reliability Engineering (1994). Ed. by I.A. Ushakov. John Wiley & Sons, NY.
- Kapur, K.C., and L.R. Lamberson (1977) Reliability in Engineering Design. John Wiley & Sons, NY.
- (Русский перевод: К. Капур, Л. Ламберсон. Надежность и проектирование систем. Пер. с англ. под ред. И.А. Ушакова. М., Мир, 1980.)
- Kettelle, J. (1962) Least-cost allocation of reliability investment. Opms Res., Vol. 10, №2. (Русский перевод: Дж. Кеттель. Увеличение надежности при минимальных затратах. В сб. переводов Оптимизационные задачи надежности. Под ред. И.А. Ушакова. М., Стандарты, 1968)
- Korolyuk, V.S., and Korolyuk, V.V. (1999) Stochastic Models of Systems. Kluwer Academic Publisher. Netherland
- Kozlov, B.A., and I.A. Ushakov (1970) Reliability Handbook. Ed. by L. Koopmans and J. Rosenblatt. Holt, Rinehart and Winston, Inc., N.Y.
- Kozlov, B.A., and Uschakov, I.A. (1979) Handbuch zur Berechnung der Zuverlässigkeit für Ingenieure. Ed. by K. Reinschke. Carl Hanser Verlag, München-Vien
- Kozlov, B.A., and Uschakov, I.A. (1978) Handbuch zur Berechnung der Zuverlässigkeit in Elektronik und Automatechnik. Ed. by K. Reinschke. Akademie-Verlag, Berlin
- Lawless, J.F. (1982) Statistical Models and Methods for Lifetime Data. John Wiley & Sons, NY.

- Lawless, J.F. (1986) A note on lifetime regression models. *Biometrika*, vol. 73.
- Lloyd, D.K., and M. Lipow (1962). *Reliability: Management, Methods, and Mathematics*. Prentice Hall, Engelwood Cliffs, NJ. (Русский перевод: Д. Ллойд, М. Липов. Надежность: организация исследования, методы, математический аппарат. Пер. с англ. под ред. Н.П. Бусленко. М., Сов. радио, 1964.)
- Mann, N.R., R.E. Schafer, and N.D. Singpurwalla (1974) *Methods of Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. John Wiley & Sons, NY.
- Martz, H.F., and B.S. Duran (1985) Comparison of three methods for calculating lower confidence limits of system reliability using component data. *IEEE Transaction on Reliability*, Vol. R-34, №2.
- Martz, H.F., and R.A. Waller (1982) *Bayesian Reliability Analysis*. John Wiley & Sons, NY.
- Meeker, W.Q., and L.A. Escobar (1998) *Methods for Reliability Data*. John Wiley & Sons, NY.
- Miner, M. (1945) Cumulative damage in fatigue, *J. of Appl. Mechanics*, Vol. 12.
- Moore E.E., and C.E. Shannon (1956) Reliable circuits using less reliable relays. *J. of Franklin Inst.*, Vol. 262.
- Nelson, W. (1990) *Accelerated Life Testing: Statistical Models, Test Plans and Data Analysis*. John Wiley & Sons, NY.
- Proschan, F., and Bray T. (1965) Optimum redundancy under multiple constraints. *Opns Res.*, Vol. 13, №5. (Русский перевод: Ф. Прошан, Т. Брей. Оптимальное резервирование при наличии ограничений. Дополнение к переводу книги Barlow, R., and F. Proschan (1965) *Mathematical Theory of Reliability*.)
- Renyi, A. (1956) Poisson-folyamat egy jellemzése. (Венгерский). *Ann. Math. Statist.*, Vol. 1, №4.
- Rubinstein, R. (1981) *Simulation and Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, NY.
- Tillman, F.A., H. Ching-Lai, and W. Kuo (1980) *Optimization of System Reliability*. Marcel Dekker, NY.
- Usakov I.A., editor (1989) *Prirucka Spolehlivosti v Radielektronice a Automatizani Technice*. Ed. by L. Sebek, L. Vonka and M. Lulay. Tech. Literatura, Prague
- Ushakov, I.A., editor (1994). *Handbook of Reliability Engineering*. John Wiley & Sons, NY.
- Viertl, R. (1986). *Statistical Methods in Accelerated Life Testing*. Nottingen, Vandenhoeck & Ruprecht.
- Weibull, W. (1939) Statistical theory of the strength of materials. *Ing. Vetenskaps Akad. Handl.*, № 151.



Gregory Levitin

THE UNIVERSAL GENERATING FUNCTION IN RELIABILITY ANALYSIS AND OPTIMIZATION

Springer, 2005

The author develops techniques of Universal Generating Function introduced by I. Ushakov in the middle of 80-e. The book offers a description of the universal generating function technique and its applications in Reliability Analysis of binary and multi-state systems and as well to optimization of series-parallel structures under certain constraints. The book supplies with a number of examples from engineering practice.

Many real systems are composed of multi-state components with different performance levels and several failure modes. These affect the whole system's performance. Most books on reliability theory cover binary models that allow a system only to function perfectly or fail completely. *The Universal Generating Function in Reliability Analysis and Optimization* is the first book that gives a comprehensive description of the universal generating function technique and its applications in binary and multi-state system reliability analysis. It features: an introduction to basic tools of multi-state system reliability and optimization; applications of the universal generating function in widely used multi-state systems; examples of the adaptation of the universal generating function to different systems in mechanical, industrial and software engineering.

This monograph will be of value to anyone interested in system reliability, performance analysis and optimization in industrial, electrical and nuclear engineering.

Table of Contents

1. Basic Tools and Techniques
2. Universal Generating Function (UGF) in Reliability Analysis of Binary Systems
3. Introduction to Multi-state Systems (MSS)
4. UGF in Analysis of Series-parallel MSS
5. UGF in Optimization of Series-parallel MSS
6. UGF in Analysis and Optimization of Special Types of MSS
7. UGF in Analysis and Optimization of Consecutively Connected Systems and Networks
8. UGF in Analysis and Optimization of Fault-tolerant Software.

Автор развивает метод универсальных производящих функций, введенных И. Ушаковым в середине 80-х годов. В книге предлагается описание метода и применение его к анализу надежности систем с двумя и многими состояниями, а также к решению задач оптимизации при наличии ограничений. Книга снабжена большим числом примеров практического применения метода.

Многие реальные системы состоят из элементов, имеющих несколько уровней функционирования, чьи состояния влияют и на оперативные возможности систем. В данной книге дается детальный анализ подобных систем с использованием метода универсальных производящих функций, приводится много практических примеров.

Книга будет интересна для всех, кто интересуется надежностью различных технических систем и их оптимизацией.

Оглавление книги:

1. Описание метода
2. Универсальная производящая функция (УПФ) в расчетах надежности систем с двумя состояниями
3. Введение в анализ систем с многими состояниями (СМС)
4. Использование УПФ для анализе последовательно-параллельных СМС
5. Использование УПФ для оптимизации последовательно-параллельных СМС
6. Использование УПФ для оптимизации специальных видов СМС
7. Использование УПФ для оптимизации последовательно соединенных систем и сетей
8. Использование УПФ для анализа и оптимизации программного обеспечения

A MONTE CARLO APPROACH TO ESTIMATION OF G-RENEWAL PROCESS IN WARRANTY DATA ANALYSIS

Mark Kaminskiy, (College Park, USA)

Vasiliy Krivtsov, (Dearborn, USA)

1. Introduction

For many years, the most commonly used models for the failure process have been the renewal process (RP) and the nonhomogeneous Poisson process (NHPP). In the framework of the repairable system applications, RP is used to model the situations with restoration to "good-as-new" condition (perfect repair assumption), meanwhile NHPP is applied to the situations with the "same-as-old" restoration (minimal repair assumption). In a sense, these two assumptions can be considered as extreme ones from both theoretical and practical standpoints. In order to avoid this "extremism", several generalizing models have been introduced in recent years. References include Brown & Proschan (1982), Kijima & Sumita (1986), Filkenstein, (1993), Lindqvist (1999). Among these models, the G-Renewal Process (GRP) introduced by Kijima & Sumita (1986) is very attractive, since it covers the intermediate "better-than-old-but-worse-than-new" repair assumption and results in a G-renewal equation, which is a generalization of the well-known ordinary renewal equation. Unfortunately, a closed form solution of the equation is unavailable, which makes the respective statistical estimation challenging.

The objective of this paper is limited to statistical estimation of the parameters of G-Renewal Process, based on typical one-dimensional warranty (grouped failure time) data. The Monte Carlo approach considered below can be also applied to parameter estimation of Kijima's Model I and II (Kijima, 1989).

2. G-Renewal Process

Kijima and Sumita (1986) introduced a *G-Renewal Process*, which can model restoration conditions ranging from "good-as-new" to "same-as-old". The GRP is introduced using the notion of *virtual age*.

Let A_n be the virtual age of a system immediately after the n th repair. If $A_n = y$, then the system has the time to the $(n + 1)$ th failure X_{n+1} , which is distributed according to the following cumulative distribution function (CDF):

$$F(X | A_n = y) = \frac{F(X + y) - F(y)}{1 - F(y)},$$

where $F(X)$ is the CDF of the time-to-first-failure (TTFF) distribution of a new system. The sum

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

with $S_0 = 0$, is called the *real age* of the system.

In the framework of the GRP it is assumed that the n th repair can remove the damage incurred only during the time between the $(n - 1)$ th and the n th failures, so that the respective virtual age after the n th repair is

$$A_n = A_{n-1} + q X_n = q S_n, n = 1, 2, \dots$$

where q is the *parameter of rejuvenation* (or *repair effectiveness parameter*) and the virtual age of a new system $A_0 = 0$, so that the TTFF is distributed according to $F(t|0) \equiv F(t)$.

The time between the first and second failures is distributed according to (1) with $A_1 = qX_1$. Respectively, the time between the second and third failure is distributed according to (1) with $A_2 = q(X_1 + X_2)$, and so on.

It is clear that for $q = 0$, the considered process coincides with an ordinary RP, thus, modeling the "good-as-new" repair assumption. With $q = 1$, a system is restored to the "same-as-old" condition, which is similar to NHPP. The case of $0 < q < 1$ corresponds to the intermediate "better-than-old-but-worse-than-new" repair assumption. Finally, with $q > 1$, the virtual age $A_n > S_n$, i.e., the repair damages the system to a higher degree than it was just before the respective failure, which corresponds to the "worse-than-old" repair assumption.

The expected number of failures in $(0, t]$, which is called a *cumulative intensity function*, is given by a solution of G-renewal equation (Kijima, et al., 1988):

$$H(t) = \int_0^t \left(g(\tau | 0) + \int_0^\tau h(x) g(\tau - x | x) dx \right) d\tau,$$

where

$$g(t|x) = \frac{f(t+qx)}{1-F(qx)}, \quad t, x \geq 0,$$

is the conditional probability density function (PDF) such that $h(t) = d(H(t))/dt$, $g(t|0) = f(t)$, and $F(t)$ and $f(t)$ are the CDF and PDF of the TTFF distribution.

The closed form solution of (2) is not available, and even numerical solutions are difficult to obtain, since the equation contains a recurrent infinite system (Finkelstein, 1997). A Monte Carlo based solution is, however, possible and was discussed by Kaminskiy and Krivtsov (1998).

3. Warranty Data

Typical one-dimensional warranty data are collected as results of observations on a large population of identical repairable units. The population size, N_0 , is known and it

can be assumed as constant in time (the number of lost units, if any, is negligible with respect to N_0). The following

table provides an example of real warranty data, which are analyzed in the next section.

Table 1. Example of Warranty Data for a Repairable System. Population Size, $N_0 = 100000$.

Month in Service, t	3	6	9	12	15	18	21	24	27
Cumulative Number of Failures Per System, $H_{emp}(t)$	0.03	0.09	0.14	0.24	0.38	0.54	0.70	0.90	1.17

4. Estimation Procedure

Based on the warranty data, the *empirical cumulative intensity function*, $H_{emp}(t)$, is calculated as

$$H_{emp}(t_i) = \frac{N(t_i)}{N_0}, \quad t_i < t_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

where $N(t)$ is the cumulative number of failures in $(0, t]$. Denote a solution of G-renewal equation (2) obtained by Monte Carlo simulations by

$$H_{mc}(t) = f(F(\tau/\alpha), q, t), \quad (4)$$

where $F(\tau/\alpha)$ is a given time-to-first-failure CDF with unknown vector of parameters, α .

Using (3) and (4), the least squares estimates of GRP parameters α and q can be obtained as a solution of GRP parameters α and q can be obtained as a solution of the following optimization problem:

$$\min_{\alpha, q} \left(\sum_{i=1}^n (H_{emp}(t_i) - H_{mc}(F(\tau/\alpha), q, t_i))^2 \right)$$

5. Examples

5.1 Simulated Data

The empirical cumulative intensity function, $H_{emp}(t)$, was obtained by simulating a GRP with a Weibull distributed TTFF (shape parameter, $\beta = 1.5$ and scale parameter, $\Theta = 1$) and the GRP rejuvenation parameter, $q = 0.5$ using $N_0 = 100$ realizations over the observation interval, $T = 5\Theta$.

Estimates of β , Θ , and q were obtained based on $n_0 = 1000$ realizations of GRP as follows:

$$\hat{\beta} = 1.48, \quad \hat{\Theta} = 1.00, \quad \hat{q} = 0.49.$$

Tables 2 - 3 show the sample correlation and covariance matrices for the obtained estimates of GRP parameters for 30 simulated empirical cumulative intensity functions, $H_{emp}(t)$.

Table 2. Sample Correlation Matrix

	β	Θ	q
β	1.000		
Θ	0.702	1.000	
q	0.079	-0.523	1.000

Table 3. Sample Covariance Matrix

	β	Θ	q
β	$2.6 \cdot 10^{-3}$		
Θ	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	
q	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$-1.6 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$

With the empirical cumulative intensity function simulated for $N_0 = 100000$ realizations (which is a more typical case for a company concerned with mass production) and using $n_0 = 1000000$, the estimation procedure returns the original GRP parameters with close to zero variance.

5.2 Real Data

The warranty data collected on a system during first 18 months (see Table 1) were used for estimation of GRP parameters. The Weibull distribution with the shape parameter, β , and the scale parameter, Θ , was assumed as the underlying TTFF distribution. The solid line in Figure 1 represents the least squares fit from a family of G-renewal functions simulated in the following parameter domain: $\{1 < \beta < 2, 10 < \Theta < 50, 0 < q < 1\}$.

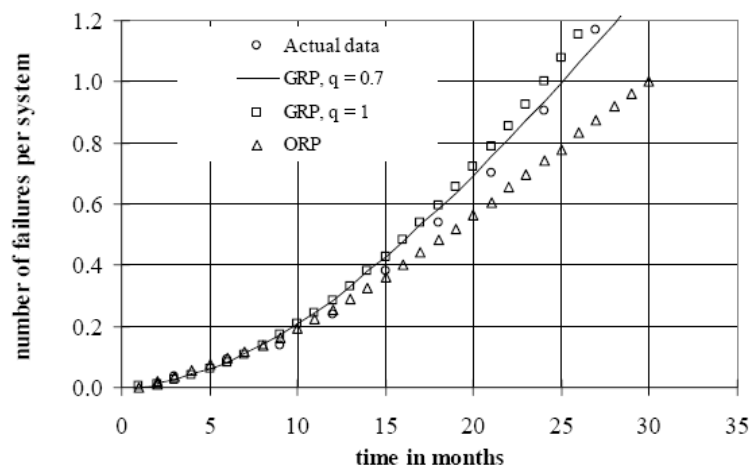


Figure 1. A Least Square Fit of G-Renewal Function

The obtained estimates of GRP parameters are $\hat{\beta} = 1.8$, $\hat{\theta} = 24$, $\hat{q} = 0.70$. The estimated G-renewal function shows a good fit to the data not only in the interval (0, 18] months (used for estimation) but also in the remaining interval (18, 30] months (obtained by prediction), see Figure 1. The figure also shows the extreme repair conditions modeled by the RP ($q = 0$) and the GRP ($q = 1$). It is reasonable to conclude that the approach considered above is not only practically applicable for estimation of the GRP parameters, but also for prediction of the G-renewal function, which is often essential in warranty data analysis.

References

- 1 M. Brown, and F. Proshan, "Imperfect Maintenance" - in Crowley J. and Johnson R. (ed) *Survival Analysis*. Vol. 2, 1982, pp 179-188.
- 2 M. S. Filkenstein, "The Concealed Age of Distribution Function and the Problem of General Repair", *Journal of Statistical Planning and Inference*, # 65, 1997, pp. 315-321.
- 3 M. P. Kaminskiy and V.V. Krivtsov, "A Monte Carlo Approach to Repairable System Reliability Analysis" - in *Probabilistic Safety Assessment and Management*, Springer-Verlag London Ltd, 1998, pp. 1063-1068.
- 4 M. Kijima and N. Sumita, "A Useful Generalization of Renewal Theory: Counting Process Governed by Non-negative Markovian Increments", *Journal of Applied Probability*, # 23, 1986, pp. 71-88.
- 5 M. Kijima, "Some Results for Repairable Systems with General Repair", *Journal of Applied Probability*, # 26, 1989, pp. 89-102.
- 6 H. Lindqvist, "Statistical Modeling and Analysis of Repairable Systems" - in *Statistical and Probabilistic Models in Reliability*, Birkhauser, Berlin, 1999, pp. 3-25.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО К ОЦЕНКЕ ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ДАННЫХ ОБ ОТКАЗАХ В ПЕРИОД ДЕЙСТВИЯ ГАРАНТИЙНЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ

Марк Каминский, (Колледж Парк, США)

Василий Кривцов, (Диборн, США)

1. Введение

В течение многих лет большинство используемых моделей процесса возникновения отказов было представлено процессом восстановления (ПВ) и неоднородным пуассоновским процессом (НПП). В рамках приложений к восстанавливаемым системам, ПВ используется для моделирования ситуаций с восстановлением до состояния «как новое» (полное восстановление), в то время, как НПП применяется в ситуациях восстановления до состояния «как было перед отказом» (минимальное восстановление). В общем, эти два состояния можно рассматривать в качестве крайних, как с точки зрения теории, так и с точки зрения практики. Для того, чтобы избежать таких крайних «экстремальных» оценок, в последние годы было предложено несколько обобщающих моделей. В этой связи можно упомянуть работы Brown и Proschan (1982), Kijima и Sumita (1986), Finkelstein, (1993), Lindqvist (1999)). Особый интерес вызывает модель обобщенного процесса восстановления (ОПВ). Эта модель была предложена Kijima и Sumita (1986 г.) для описания промежуточного состояния восстановления («лучше чем было перед отказом, но хуже чем новое») и позволяет получить уравнение ОПВ, которое является обобщением известного уравнения восстановления. К сожалению, это уравнение не имеет решения в замкнутом виде, что, по сути, ставит под вопрос возможность соответствующего статистического оценивания.

Целью настоящей работы является статистическая оценка параметров ОПВ, на основании (группированных) данных стандартной одномерной гарантии. Рассматриваемое ниже решение может применено к оценкам параметров моделей Kijima I и II (Kijima, 1989).

2. Обобщенный процесс восстановления

Kijima и Sumita в 1986 году ввели понятие ОПВ, который позволяет моделировать уровень восстановления ремонтируемой системы от состояний «как новое» до «как было перед отказом». ОПВ вводится через понятие *виртуального возраста*.

Пусть A_n виртуальный возраст системы сразу же после n -го восстановления. Если $A_n = y$, а время на $(n + 1)$ -й отказ X_{n+1} , то это время распределено согласно следующей функции распределения:

$$F(X | A_n = y) = \frac{F(X + y) - F(y)}{1 - F(y)},$$

где $F(X)$ - функция распределения времени-до-первого отказа (ВДПО) для новой системы. Сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

при $S_0 = 0$, называется *реальным возрастом* системы.

В рамках ОПВ это предполагает, что n -ое восстановление может устранить нанесенный ущерб только во временном промежутке между $(n - 1)$ -ым и n -ым отказом, таким образом, соответствующий виртуальный возраст после n -го ремонта

$$A_n = A_{n-1} + q X_n = q S_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

где q - коэффициент восстановления (или коэффициент эффективности восстановления) и виртуальный возраст новой системы $A_0 = 0$, причем ВДПО - распределение согласно $F(t|0) \equiv F(t)$.

Время между первым и вторым отказами распределено согласно уравнению (1) с $A_1 = qX_1$. Соответственно, время между вторым и третьим отказами распределено согласно уравнению (1) с $A_2 = q(X_1 + X_2)$, и так далее.

Понятно, что при $q = 0$, полученный процесс совпадает с обычным ПВ, т.е., моделируется полное восстановление. При $q = 1$, система восстанавливается до состояния "как было перед отказом", что описывается НПП. Случай $0 < q < 1$ соответствует промежуточному состоянию «лучше чем было перед отказом но хуже чем новое». Наконец, при $q > 1$, виртуальный возраст $A_n > S_n$, то есть, ремонт ухудшает состояние системы по сравнению с тем в котором она была перед отказом.

Ожидаемое количество отказов в промежутке $(0, t]$, которое называют *кумулятивной функцией интенсивности*, определяется решением уравнения ОПВ (Kijima, et al., 1988):

$$H(t) = \int_0^t \left(g(\tau | 0) + \int_0^\tau h(x)g(\tau - x | x)dx \right) d\tau, \quad (2)$$

где

$$g(t|x) = \frac{f(t+qx)}{1-F(qx)}, \quad t, x \geq 0,$$

- функция интенсивности условного распределения такая, что $h(t) = d(H(t))/dt$, $g(t|0) = f(t)$, и $F(t)$ и $f(t)$, - функция распределения и плотность вероятности ВДПО.

Решение уравнения (2) в аналитическом виде невозможно, и даже численное решение трудно реализовать, поскольку уравнение содержит повторяющуюся бесконечную систему (Finkelstein, 1997). Решение, с использованием метода Монте-Карло, тем не менее, возможно, и оно было получено Каминским и Кривцовым в 1988 году (Kaminskiy & Krivtsov, 1988).

3. Данные о работе изделия в период действия гарантийных обязательств

Типичные данные об отказах в период действия гарантии собраны в результате наблюдения за большим числом идентичных ремонтируемых устройств. Объём выборки, N_0 , известен и может быть принят постоянным во времени (т.е., число списанных изделий пренебрежимо по отношению к N_0). Следующая таблица даёт пример реальных данных о работе изделия в период действия гарантийных обязательств, которые будут проанализированы ниже.

Таблица 1. Пример данных о работе изделия в период действия гарантийных обязательств для восстанавливаемой системы. Объём генеральной совокупности, $N_0 = 100000$.

Месяцы в эксплуатации, t	3	6	9	12	15	18	21	24	27
Среднее число отказов на систему, $H_{emp}(t)$	0.03	0.09	0.14	0.24	0.38	0.54	0.70	0.90	1.17

4. Процедура оценивания

Основанная на гарантийных данных эмпирическая кумулятивная функция интенсивности, $H_{emp}(t)$, вычисляется следующим образом:

$$H_{emp}(t_i) = \frac{N(t_i)}{N_0}, \quad t_i < t_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

где $N(t)$ – кумулятивное количество отказов на промежутке времени $(0, t]$.

Обозначим решение уравнения ОПВ (2), полученное с использованием метода Монте-Карло как

$$H_{mc}(t) = f(F(\tau(\alpha), q, t)), \quad (4)$$

где $F(\tau(\alpha))$ – функция распределения ВДПО с неизвестным вектором параметров, α .

Используя (3) и (4), оценка методом наименьших квадратов параметров α и q ОПВ может быть найдено из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\min_{\alpha, q} \left(\sum_{i=1}^n (H_{emp}(t_i) - H_{mc}(F(\tau(\alpha), q, t_i)))^2 \right)$$

5. Примеры

5.1 Моделированные данные

Эмпирическая кумулятивная функция интенсивности, $H_{emp}(t)$, была получена моделированием ОПВ с Вейбулловски распределенным ВДПО (параметр формы, $\beta = 1.5$, параметр масштаба, $\Theta = 1$) и параметром

восстановления, $q = 0.5$. Моделирование опиралось на $N_0 = 100$ реализаций на интервале, $T = 5\Theta$.

Оценки β , Θ и q были получены на основании $n_0 = 1000$ реализаций ОПВ и имеют следующие значения: $\hat{\beta} = 1.48$, $\hat{\Theta} = 1.00$, $\hat{q} = 0.49$. Таблицы 2 - 3 дают пример ковариационной и корреляционной матриц полученных оценок параметров ОПВ для 30 моделируемых эмпирических кумулятивных функций интенсивности, $H_{emp}(t)$.

Таблица 2. Пример корреляционной матрицы

	β	Θ	q
β	1.000		
Θ	0.702	1.000	
q	0.079	-0.523	1.000

Таблица 3. Пример ковариационной матрицы

	β	Θ	q
β	$2.6 \cdot 10^{-3}$		
Θ	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	
q	$2.3 \cdot 10^{-4}$	$-1.6 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$

Для эмпирической кумулятивной функцией интенсивности, построенной на основе $N_0 = 100000$ реализаций (что является типичным случаем для компании с массовым производством), процедура оценки находит исходные параметры ОПВ с практически нулевой дисперсией.

5.2 Реальные данные

Для оценки параметров ОПВ были использованы гарантийные данные, собранные за первые 18 месяцев эксплуатации (см. Таблицу 1). Распределение Вейбулла с параметром формы β и параметром масштаба θ ,

предполагалось в качестве распределения ВДПО. Тонкая сплошная линия на рисунке 1 – оценка функции ОПВ по методу наименьших квадратов в следующей области поиска параметров: $\{1 < \beta < 2, 10 < \theta < 50, 0 < q < 1\}$.

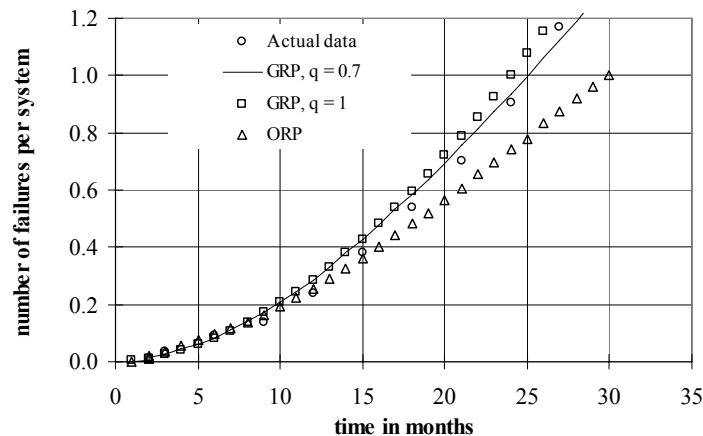


Рисунок 1. Оценка функции ОПВ по методу наименьших квадратов.

Таким образом были получены следующие оценки параметров ОПВ: $\hat{\beta} = 1.8$, $\hat{\theta} = 24$, $\hat{q} = 0.70$. Как следует из Рисунка 1, оцененная функция ОПВ показывает хорошее соответствие данным не только в интервале (0, 18] месяцев (использованном для нахождения оценок), но также и в остальном интервале (18, 30] месяцев. На Рисунке 1 также показаны крайние условия восстановления, соответствующие ПВ ($q = 0$) и НПП ($q = 1$). В заключении заметим, что рассмотренный подход практически применим не только для оценки параметров ОПВ, но также и для прогноза функции ОПВ, которая часто используется при анализе гарантийных данных.

Литература

- 1 M. Brown, and F. Proshan, "Imperfect Maintenance" - in Crowley J. and Johnson R. (ed) *Survival Analysis*. Vol. 2, 1982, pp 179-188.
- 2 M. S. Filkenstein, "The Concealed Age of Distribution Function and the Problem of General Repair", *Journal of Statistical Planning and Inference*, # 65, 1997, pp. 315-321.
- 3 M. P. Kaminskiy and V.V. Krivtsov, "A Monte Carlo Approach to Repairable System Reliability Analysis" - in *Probabilistic Safety Assessment and Management*, Springer-Verlag London Ltd, 1998, pp. 1063-1068.
- 4 M. Kijima and N. Sumita, "A Useful Generalization of Renewal Theory: Counting Process Governed by Non-negative Markovian Increments", *Journal of Applied Probability*, # 23, 1986, pp. 71-88.
- 5 M. Kijima, "Some Results for Repairable Systems with General Repair", *Journal of Applied Probability*, # 26, 1989, pp. 89-102.
- 6 H. Lindqvist, "Statistical Modeling and Analysis of Repairable Systems" - in *Statistical and Probabilistic Models in Reliability*, Birkhauser, Berlin, 1999, pp. 3-25.

RELIABILITY-DIRECTED COMPUTER-AIDED DESIGN SYSTEM

Oleg Abramov

(Vladivostok, Russia)

Abstract.

A theoretical approach and applied techniques for designing analogous engineering devices and systems with due account of random variations in system parameters and reliability specifications are considered. For solving this problem a so-called operational/parametric approach is used. This approach is based on the computer-aided simulation of system capability and availability, parameter deviations and techniques of optimal parametric synthesis in terms of reliability criteria. Special attention is paid to algorithms that reduce the labour content of parameters optimisation problems. For seeking a numerical solution of the parametric design problem a computer-aided reliability-oriented design system is proposed.

1. Introduction

The design process consists of group of particular tasks such as analysis or synthesis one. Any technical object can be stated as a pair $W = \langle X, S \rangle$, where $X = (x_1, \dots, x_n)$ are parameters and S is the object structure. We can consider a function $\Phi = \Phi(W, Q)$ as a criteria of object's operation quality (here Q is the operation conditions).

The synthesis problem can be formulated as an optimization task

$$\Phi(W, Q) \rightarrow \underset{W \in \Omega_W}{extr} \Rightarrow W_Q^0,$$

where Ω_W is the possible set of object variations and W_Q^0 is the optimal object under the conditions Q . The analysis task can be divided to the parametric and structural ones

$$\Phi(X, S, Q) \rightarrow \underset{W \in \Omega_X}{extr} \underset{S \in \Omega_S}{extr} \Rightarrow X_Q^0, S_Q^0,$$

where Ω_X is the set of possible parameters and Ω_S is the set of possible structures.

Therefore, the synthesis of engineering systems consists of two basic parts: developing of structure (structural

synthesis) and internal parameter values choosing (parametric synthesis).

The studies have shown that the engineering system parameters are subject to random variations and the variations may be considered as non-stationary stochastic processes. The conventional methods for choosing parameters (for parametric synthesis) generally do not take account of parameter production and field deviations of parameters from their design values. As a result, the engineering systems designed in such a manner are not optimal in the sense of their gradual failure reliability.

This paper proposes the approach and some algorithms for seeking a numerical solution of the parametric optimization problem with a stochastic (reliability) criterion, which has made possible to implement and extend the concepts discussed in [1], [2], [3].

On the basis of the proposed methods and algorithms a computer-aided reliability-oriented design system called CARD has been developed. The CARD system builds mathematical models and calculates ratings of component parameters so that achieve the highest precision, acceptability (manufacturing yield) or reliability of engineering systems under design.

2. Parametric synthesis problem

Let $S(\mathbf{x})$ be a system which depends on a set of n parameters $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. We say that system $S(\mathbf{x})$ is acceptable if $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$ satisfy the conditions (1):

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} \quad (1)$$

where $\mathbf{Y}$, $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are m -vectors of system responses (output parameters) and their specifications, e.g. $Y_1(\mathbf{x})$ - average power, $Y_2(\mathbf{x})$ - delay, $Y_3(\mathbf{x})$ - gain. The inequalities (1) define a region D in the space of design parameters

$$D = \{ \mathbf{x} | \mathbf{a} \leq \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} \} \quad (2)$$

D is called the tolerance margin domain (region of acceptability) for S .

Fig.1 illustrates such a region. The values given for a and b are the specifications for the system.

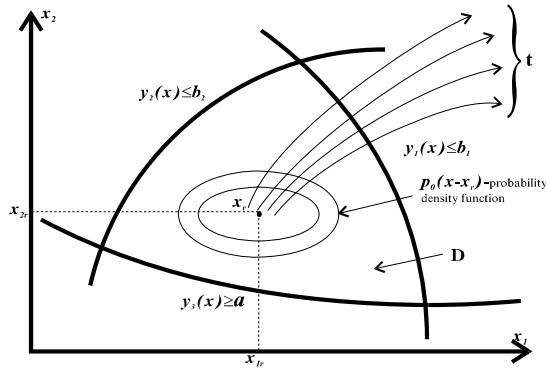


Fig. 1. Region of acceptability D defined by system response functions.

As it was mentioned above, the engineering system parameters are subject to random variations (aging, wear, temperature variations) and the variations may be considered as stochastic processes:

$$\mathbf{X}(t) = \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}.$$

In general the optimal parametric design (synthesis) problem can be stated as follows. Given the characteristics of random processes $\mathbf{X}(t)$ of system parameters variations, a region of admissible deviation- D and a service time T , find such a deterministic vector of parameter ratings (nominals) $\mathbf{x}_r = (x_{1r}, \dots, x_{nr})$ that the probability

$$P_r(\mathbf{x}_r, T) = P_r\{[X_1(t) - x_{1r}, \dots, X_n(t) - x_{nr}] \in D, \forall t \in [0, T]\}$$

be maximized.

Any optimization technique requires, first, a method of objective function calculation and, second, an extremum searching method which allows to find a solution with a minimum cost.

3. Reliability estimation

The proposed method of reliability estimation, called "the method of critical sections", is based on the following fundamental ideas.

As known, any random process can be presented as a set of random values, or as an ensemble of functions $y_{\omega}(t)$ in some functional space, where functions $y_{\omega}(t)$ depend on the parameter ω which characterizes the realization or the selective function of a random process. The entire set of this functions will define the output parameter degradation process.

The probability $P_{rt}(D_Y)$ of matching to given constraints $D_Y = \{Y/a \leq Y \leq b\}$ at the time t for any t -section of output parameters space

$$P_{rt}(D_Y) = \int_a^b f_t(y) dy,$$

where $f_t(y)$ is a one-dimensional distribution density of a random process.

Let us select from the entire set of random processes a subset S_{μ} of such realizations that their values will belong to the numeric ensemble D at the times $t_1, t_2, \dots, t_{\mu}$. The value of the probability index corresponding to this subset can be defined as

$$P_r(S_{\mu}) = \int_a^b \dots \int_a^b \underbrace{f_{t_1, \dots, t_{\mu}}(y_{t_1}, \dots, y_{t_{\mu}})}_{\mu} dy_1 \dots dy_{\mu}, \quad (3)$$

where $f_{t_1, \dots, t_{\mu}}$ is the joint distribution density of random values for $t_1, \dots, t_{\mu}$ -sections.

If the number of t -sections within $[0; T]$ is large enough, the $P_r(S_{\mu})$ may be considered as a probability of system non-fault operationality.

Usage of equation (3) is very difficult, but it can be simplified by applying some constraints to the selective functions. For example, for smooth processes we can suppose that in order to determine acceptability of any realization it will suffice to determine acceptability of this realization only for few t -sections (called critical sections). In usual practice the number of such critical sections is not more than three for real engineering devices.

Let the random parameter changing process $Y(t)$ be monotonous. In this case in order to any it realization $y(t)$ lie in the region of acceptable changes $[a, b]$ during the time interval T , it is necessary and enough that they lie in this region in the boundary (critical) sections $t=0$

and $t=T$. The conditions of lying of $Y(t)$ in the region of acceptable values during time T will be as follows:

$a \leq Y(0) \leq b$, $a \leq Y(T) \leq b$,
where $Y(0)$ and $Y(T)$ are random values appeared on the corresponded t -sections of process $Y(t)$.

The probability of lying of $Y(t)$ inside $[a, b]$ during given time can be stated as

$$P_r(T) = P_r\{[a \leq Y(0) \leq b] \cap [a \leq Y(T) \leq b]\}$$

If the tendency of parameter changing is known, then using some allowances we can write

$$P_r(T) = \int_a^\infty f_0(y)dy - \int_b^\infty f_T(y)dy, \quad \text{for } \frac{dy}{dt} \geq 0,$$

$$P_r(T) = \int_a^\infty f_T(y)dy - \int_b^\infty f_0(y)dy, \quad \text{for } \frac{dy}{dt} < 0,$$

where $f_0(y)$ and $f_T(y)$ are the probability density functions at the sections $t=0$ and $t=T$ respectively.

An important problem of system design is to choose the nominal design $\mathbf{x}_r$, so that the "yield" is maximized. The yield is the probability that the system will work, i.e., pass specifications (1) at the time $t=0$. Now suppose that a joint probability density function (PDF) for internal parameters $p(\mathbf{x})$ is given which characterizes the random variations of the parameters at $t=0$. The designer usually has design control on the nominal $\mathbf{x}_r$ of this distribution. To emphasize this dependence of the PDF on the nominal design, we write the probability density function as $p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)$. In terms of $p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)$ the yield is

$$P_r(\mathbf{x}_r) = \int_D p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) d\mathbf{x}$$

(D - is the region of acceptability). Thus the design problem is to choose $\mathbf{x}_r$ so that $P_r(\mathbf{x}_r)$ is maximum.

The practical algorithm of the stochastic criterion calculation is based on the conventional Monte Carlo method.

At the beginning, the random vector of parameters is generated (this vector means random manufacturing device realization), and then the internal parameters degradation is simulated using degradation model. For example, parameters variations can be approximated as follows

$$X(t) = \sum_{k=0}^m x_r u_k(t)$$

where x_k is a random variable; $\{u_k(t)\}_{k=0}^m$ are continues deterministic functions of time.

The Monte Carlo method approximates $P_r(\mathbf{x}_r, T)$ by the ratio of number of acceptable realizations (falling in region D)- N_a to the total number of trials - N .

$$P_r = N_a / N,$$

Unfortunately, often the region D is unknown. It is given only implicitly through system's equations and the systems response functions. If we do not know the region D , then a Monte Carlo evaluation of probability $P_r(\mathbf{x}_r, T)$ at particular nominal value $\mathbf{x}_r$ requires N system analyses for each trial set of parameter $\mathbf{x}_r$. Typically, hundreds of trials are required to obtain a reasonable estimate for $P_r(\mathbf{x}_r, T)$.

Optimization requires the evaluation of our probability $P_r(\mathbf{x}_r, T)$ for many different values of the nominal values of the parameters $\mathbf{x}_r$. Therefore to make practical the use of Monte Carlo techniques in statistical system design, it is necessary to reduce the number of system analysis required during optimization.

As a solution, the following two-steps technique and the corresponding algorithms can be used for practical reliability optimization.

4. Optimization techniques

The first step consists in replacing the original stochastic criterion with a certain deterministic one, allowing nearby optimum solutions to be obtained. The two such objective functions are possible. One of them is a so-called a "minimal serviceability reserve" that can be presented in the general form:

$$F(\mathbf{x}) = \min_{i=1, m} \left[\frac{a_i - Y_i(\mathbf{x})}{w_i} - 1 \right],$$

where $Y_i(\mathbf{x})$ - the i -th output value, a_i - the i -th constraint ($Y(\mathbf{x}) \leq a$) and w_i - the i -th weight coefficient.

From this, we have a following optimization problem:

$$\mathbf{x}_r = \arg \max_{\mathbf{x} \in D} F(\mathbf{x}).$$

It means that such a nominal point should be found that will have the largest distance from the acceptability region margins.

An other method which can be used for the reliability optimization is so-called "equal densities method". This

method is of combined type, that uses statistical data and a deterministic optimization technique.

At the first step we should estimate distribution density function (DDF) for output parameter. As can be shown analytically, probability maximum will be achieved, if DDF will be shifted such, that both lower and upper constraints will cut equal densities on DDF [1]. Advantages of this approach are fairly clear, but there is one serious restriction - this method may be applied only in case of one output parameter.

Now the first design step is completed. At the same time the next design step must be made if the reliability index that was achieved by using deterministic methods is not high enough. This step is a direct probability optimization, i.e., methods of stochastic optimization should be used here.

First, it should be pointed out that most of optimization methods have the highest convergence speed when they start at a "good" initial point. Therefore, it would be most natural to get a previous solution as an initial point for the next design step.

As it was mentioned above, the stochastic methods are very time-consuming. And now some techniques that allow us to decrease computational cost will be considered. The first method, we dwell on, is the "correlated samples method".

It is clear that the optimization process needs only the value of difference ΔP between to points probabilities, not probability values. And the variance of ΔP is estimated to be

$$\sigma^2\{\Delta\hat{P}\} = \sigma^2\{\hat{P}_1\} + \sigma^2\{\hat{P}_2\} - 2R\{\hat{P}_1; \hat{P}_2\}\sigma\{\hat{P}_1\}\sigma\{\hat{P}_2\},$$

where R is the correlation coefficient between two estimates. When the samples are independent, the R is equal to zero and the variance

$$\sigma^2\{\Delta\hat{P}\} = \sigma^2\{\hat{P}_1\} + \sigma^2\{\hat{P}_2\}.$$

If a positive correlation can be achieved, R will be more than zero and, therefore,

$$\sigma^2\{\Delta\hat{P}\} < \sigma^2\{\hat{P}_1\} + \sigma^2\{\hat{P}_2\},$$

i. e., for the same precision, simulation with correlated samples will require the less number of model runs, than independent samples. Intuition suggests that the positive correlation can be achieved by use the equal random influences for both device realizations to be compared.

The next approach is based on the supposition that the device operation state do not change inside the little

region near the previously checked point. Therefore, if a simulated point exists such that the distance from it to the point to be checked is less than a definite value, it is not need to perform the new system simulation.

In practical algorithm the internal device parameters quantization is accomplished. And every generated random point can be assigned to the one of the existing quants. The system simulation will be performed if no early checked points are exist within this quant. Each newly simulated point is presented as a vector of quant coordinates with the acceptability flag (0 or 1), so a database of checked quants can be build, and it is not necessary to make a system simulation more than one time per quant.

The experimental results show that the method in general is highly effective when compared to a conventional Monte Carlo technique, especially in conjunction with the "correlated samples".

The next way to decrease total design time on the phase of statistical optimization is to use modern supercomputing technologies and parallel processing. The easiest implementation of this idea would be multithreading programming on computers with symmetric multiprocessors (SMP) architecture and operating systems that can assign different threads to different processors (like Windows NT or modern clones of Unix). But computational power of conventional SMP systems is very limited - usually they consist of not more than two or four processors. Systems with massive parallel processing (MPP) architecture can contain much more processors (up to few thousands) but are very expensive.

It seems more applicable for most installations usage of distributed processing technologies. In this case computational tasks can be distributed over the set of networked workstations. And, by the way, here each computer can use multithreading and SMP architecture. Now the CAD system to be developed is modified for usage of parallel Monte Carlo method. The implementation of this technology is based on PVM (Parallel Virtual Machine) software package. The work is still in progress.

5. Interactive system for design optimization

All techniques described above were included in the computer-aided reliability-directed system called SPORA. The system SPORA was developed for parametric synthesis of analogous engineering devices with respect to reliability requirements. SPORA is designed to permit a user to observe, interrupt, diagnose, modify and restart a computation as it progress, resulting in very substantial savings not only in computing time, but also in the overall time needed to

carry out a design. For example, when a design or optimization procedure is not succeeding in an attempt to meet specifications, the failure can be identified in an interactive CAD system by observing the output. The designer may therefore stop the computation and, making use of the heuristic information displayed on the screen, the designer could,

- modify the structure of the design,
- relax the constraint specifications,
- reset parameters of the procedure such as scaling, weights etc.,
- change problem formulation or algorithms.

This involvement in the optimization process put the designer in an ideal position to perform tradeoffs.

The system uses a widely distributed SPICE-like circuit simulation program, that allows to simulate a large class of analogous devices in direct current, frequency and time domains. SPORA also consists of features for nominal design, design centering, tolerances assignment, etc. The system has special graphic postprocessor for the best presentation of design results. SPORA is now in service and used for the reliability-oriented design of electronic equipment.

The SPORA system has been tested on a number of complex designs involving integrated circuits, filters and control systems.

6. Design example

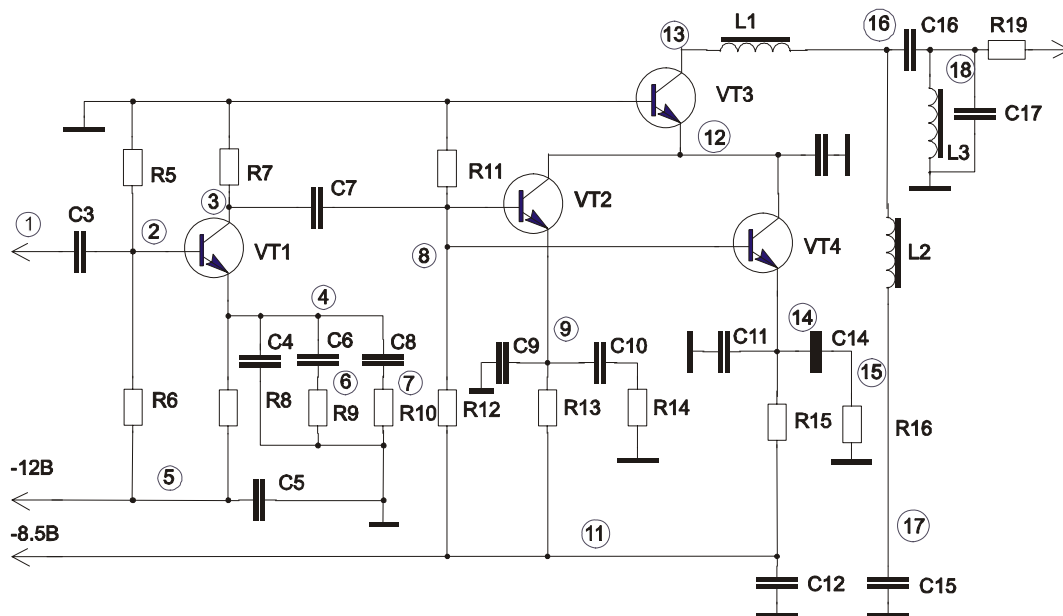


Fig. 2 Band-width amplifier

Requirements:

Frequency band: 800...1800 MHz
 Amplifier ratio: 25 ± 2 DB
 Probability (manufacturing yield) > 0.9

Table 1. Initial nominal values ($P_r = 0.44$)

L1	C4	C9	C10	C11	C13	C14	C17
0.01m	0.05p	20.6p	15p	25p	10p	1.5p	1.5p

Table 2. Nominal values after first optimization step ($P_r = 0.7$)

L1	C4	C9	C10	C11	C13	C14	C17
0.03m	5.6p	8.2p	12p	8.2p	2.2p	12p	1.5p

Table 3. Optimal values ($P_r = 0.92$)

L1	C4	C9	C10	C11	C13	C14	C17
0.012	6.5p	8.5p	10p	8.9p	2.4p	11p	1.4p

7. Conclusion

A theoretical approach and applied techniques for designing analogous engineering devices and systems with due account of random variations in systems parameters and reliability specifications were considered. For solving this problem we use a so-called operational/parametric approach based on the computer-aided simulation of system capability and availability, parameters deviations and techniques of optimal parametric synthesis with respect to reliability criteria.

Under this approach the optimal parametric synthesis task is formulated as an optimization problem with a stochastic criterion.

The replacement of original stochastic criterion with a certain deterministic one is used in order to reduce computational cost of statistical algorithms. Moreover, a few techniques for decreasing the number of model runs in Monte Carlo method were implemented.

On the basis of the proposed methods and algorithms a computer-aided reliability-oriented design system called SPORA has been developed. The SPORA system builds mathematical models and calculates ratings of component parameters so that achieve the highest precision, acceptability (manufacturing yield) or reliability of engineering systems under design.

References

- [1] O.V.Abramov, "Reliability-Directed Parametric Synthesis of Stochastic Systems", *Nauka Publishers, Moscow* (in Russian), 1992.
- [2] O.V. Abramov and K.S.Katuyev, "Effective Methods for Parametric Synthesis of Stochastic Systems", *Proc. First Asian Control Conference, Tokyo*, vol. 3, pp. 587-589, 1994.
- [3] R.Brayton, G.Hachtel and A.Sangiovanni-Vincentelli "A survey of Optimization Techniques for Integrated-Circuit Design", *Proc. IEEE*, vol.69, no. 10, pp 1334-1362, 1981

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА НАДЕЖНОСТНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Олег Абрамов

(Владивосток, Россия)

Аннотация.

Рассмотрена задача проектирования аналоговых технических устройств и систем с учетом случайных процессов изменения их параметров и требований надежности. Для ее решения привлекается функционально-параметрический подход, в основе которого компьютерное моделирование процессов функционирования исследуемых систем и изменения их параметров, а также методы оптимального параметрического синтеза по критериям надежности. Разработана система автоматизированного проектирования, предназначенная для решения задач оптимального параметрического синтеза аналоговых радиоэлектронных схем по критерию надежности.

1. Введение

Проектирование сводится к решению группы задач, относящихся к задачам анализа или синтеза. Любой технический объект можно представить себе в виде «двойки»: $W = \langle X, S \rangle$, где $X = (x_1, \dots, x_n)$ – параметры, а S – структура объекта. Критерий качества функционирования объекта можно задать в виде функционала

$$\Phi = \Phi(W, Q),$$

где Q – условия эксплуатации объекта.

Задача синтеза сводится к решению оптимизационной задачи

$$\Phi(W, Q) \rightarrow \text{extr} \Rightarrow W_Q^O,$$

$$W \in \Omega$$

где Ω – допустимое множество, в рамках которого может варьироваться объект, W_Q^O – оптимальный в условиях Q объект. Задача синтеза допускает естественную декомпозицию на параметрическую и структурную:

$$\Phi(X, S, Q) \rightarrow \text{extr} \quad \text{extr} \Rightarrow X_Q^O, S_Q^O,$$

$$X \in \Omega_X \quad S \in \Omega_S$$

где Ω_X – множество допустимых параметров; Ω_S – множество допустимых структур.

Таким образом, синтез технических объектов включает две основные части: формирование структуры объекта (структурный синтез) и выбор значений внутренних параметров (параметрический синтез).

Известно, что параметры технических систем подвержены производственным и эксплуатационным изменениям, однако традиционные методы выбора номинальных значений параметров (параметрического синтеза), как правило, не учитывают возможных отклонений параметров от расчетных значений. В результате этого проектируемые системы не являются оптимальными с точки зрения их параметрической надежности.

В статье рассмотрены методы и алгоритмы поиска численного решения задачи параметрической оптимизации со стохастическим (надежностным) критерием, которые представляют собой обобщение и развитие результатов, изложенных в работах [1], [2], [3]. На основе этих алгоритмов разработана система автоматизированного надежностного проектирования РЭА. Эта система позволяет осуществлять построение функциональных математических моделей проектируемых систем и рассчитывать номинальные значения параметров их элементов, при которых обеспечивается максимальная серийнопригодность или параметрическая надежность объектов проектирования.

2. Постановка задачи оптимального параметрического синтеза

Рассмотрим некоторую систему $S(x)$, качество функционирования которой зависит значений параметров ее элементов $x = (x_1, \dots, x_n)$. Будем считать

систему работоспособной, если ее определяющие параметры $Y(x)$ удовлетворяют условиям (1):

$$a \leq Y(x) \leq b \quad (3)$$

где Y , a и b - m -векторы выходных параметров системы и условий работоспособности, например, $Y_1(x)$ - выходная мощность, $Y_2(x)$ - запаздывание, $Y_3(x)$ - коэффициент передачи.

Неравенства (1) выделяют некоторую область D в пространстве внутренних параметров

$$D = \{x | a \leq Y(x) \leq b\}, \quad (4)$$

которую D будем называть областью допустимых вариаций параметров (областью работоспособности) проектируемой системы.

На Рис. 1 приведен пример такой области. Здесь величины a и b задают условия работоспособности.

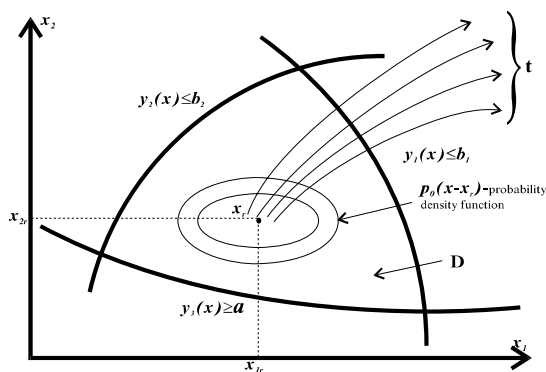


Рис. 1. Область работоспособности D .

Как уже отмечалось, параметры технических систем подвержены случайным изменениям (из-за старения, износа, температурных воздействий) и эти изменения могут быть представлены в виде случайного процесса:

$$X(t) = \{X_1(t), \dots, X_n(t)\}.$$

В общем виде задача оптимального выбора параметров (параметрического синтеза) может быть представлена в следующем виде. Известны характеристики случайного процесса изменения параметров элементов системы $X(t)$, область допустимых изменений параметров- D и требуемое время эксплуатации T , найти такой вектор номинальных значений параметров $X_r = (x_{1r}, \dots, x_{nr})$, при котором вероятность безотказной работы системы в течение времени T :

$$P_r(x_r, T) = P_r\{[X_1(t) - x_{1r}, \dots, X_n(t) - x_{nr}] \in D, \forall t \in [0, T]\}$$

достигает максимума.

Для решения этой задачи необходимо, во-первых, найти метод вычисления целевой функции и, во-вторых, выбрать метод, позволяющий решить задачу поиска экстремума с минимальными затратами.

3. Расчет параметрической надежности

Предлагаемый метод расчета надежности, получивший название метода критических сечений, основан на следующих идеях.

Известно, что любой случайный процесс можно задать либо множеством случайных величин, представляющих его временные сечения (t -сечения), либо множеством функций $y_\omega(t)$ в некотором функциональном пространстве, где функции $y_\omega(t)$ зависят от параметра ω , характеризующего реализацию или выборочную функцию случайного процесса.

Вероятность $P_{rt}(D_Y)$ нахождения некоторого выходного параметра в области работоспособности $D_Y = \{Y / a \leq Y \leq b\}$ в момент времени t можно представить в следующем виде

$$P_{rt}(D_Y) = \int_a^b f_t(y) dy,$$

где $f_t(y)$ одномерная плотность распределения случайного процесса $Y(t)$ в момент времени t .

Выделим из множества всех реализаций исследуемого случайного процесса множество S_μ таких реализаций, значения которых принадлежат числовому множеству D в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_\mu$. Значение вероятностной меры случайного процесса $Y(t)$, соответствующее этому множеству определяется формулой

$$P_r(S_\mu) = \int_a^b \dots \int_a^b f_{t_1, \dots, t_\mu}(y_{t_1}, \dots, y_{t_\mu}) dy_1 \dots dy_\mu, \quad (3)$$

где $f_{t_1, \dots, t_\mu}$ совместная плотность распределения случайных величин, рассматриваемых в сечениях $t_1, \dots, t_\mu$.

При достаточно большом числе t -сечений, выделенных на $[0; T]$, значение $P_r(S_\mu)$ можно принять равным искомой вероятности нахождения случайного процесса в области допустимых значений

в течение требуемого времени T , т.е. вероятности безотказной работы системы.

Воспользоваться соотношением (3) для оценки параметрической надежности чрезвычайно сложно. Однако при наложении определенных ограничений на характер выборочных функций (реализаций) удастся получить сравнительно простые и удобные для практического использования результаты.

Будем считать характер случайного процесса $Y(t)$ таким, что для нахождения любой его реализации в области допустимых значений в течение заданного времени необходимо и достаточно, чтобы эта реализация принадлежала области работоспособности в ограниченном (и небольшом) числе t -сечений $Y(t)$, которые назовем критическими.

Пусть случайный процесс изменения выходного параметра системы $Y(t)$ можно считать монотонным. В этом случае, для того чтобы реализация этого процесса $y(t)$ находилась в пределах $[a, b]$ в течение времени T , необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала диапазону допустимых изменений в граничных сечениях, т.е. при $t=0$ и $t=T$. Тогда условия нахождения процесса $Y(t)$ в допустимых пределах в течение времени T будут иметь вид:

$$a \leq Y(0) \leq b, \quad a \leq Y(T) \leq b,$$

где $Y(0)$ и $Y(T)$ - случайные величины, получающиеся в соответствующих временных сечениях процесса $Y(t)$.

Вероятность невыхода $Y(t)$ за пределы $[a, b]$ в течение заданного времени запишется следующим образом

$$P_r(T) = P_r\{a \leq Y(0) \leq b\} \cap \{a \leq Y(T) \leq b\}$$

Если известна тенденция изменения параметра, то искомую вероятность можно определить, используя соотношения

$$P_r(T) = \int_a^\infty f_0(y) dy - \int_b^\infty f_T(y) dy, \quad \text{при } \frac{dy}{dt} \geq 0,$$

$$P_r(T) = \int_a^\infty f_T(y) dy - \int_b^\infty f_0(y) dy, \quad \text{при } \frac{dy}{dt} < 0,$$

где $f_0(y)$ и $f_T(y)$ одномерные плотности распределения в сечениях $t=0$ и $t=T$ соответственно.

Важной задачей проектирования в ряде случаев становится выбор номиналов параметров x_r , обеспечивающих максимум серийнопригодности (выхода годных). Серийнопригодность представляет собой вероятность заставить систему работоспособной в начальный момент времени, т.е. вероятность выполнения условий работоспособности (1) в момент

времени $t=0$. Пусть известна совместная плотность распределения параметров элементов системы $p(x)$, которая является характеристикой случайного процесса вариаций этих параметров при $t=0$.

Серийнопригодность будет зависеть от выбора номинальных значений параметров x_r и равна

$$P_r(x_r) = \int_D p(x - x_r) dx$$

(D - область работоспособности). Задача состоит в выборе x_r , обеспечивающих максимум $P_r(x_r)$.

Используемые на практике алгоритмы расчета целевой функции основаны на известном методе статистических испытаний (Монте-Карло)

Генерируется случайный вектор параметров и, далее, используя некоторую модель случайного процесса изменений параметров, моделируются реализации этого процесса. В качестве модели случайного процесса изменений параметров можно использовать

$$X(t) = \sum_{k=0}^m x_r u_k(t)$$

где x_k случайные коэффициенты; а $\{u_k(t)\}_{k=0}^m$ - непрерывные детерминированные функции времени.

Метод Монте-Карло позволяет аппроксимировать $P_r(x_r, T)$ в виде отношения числа работоспособных реализаций (принадлежащих области D) - N_a к общему числу испытаний - N .

$$P_r = N_a / N,$$

К сожалению, область работоспособности в пространстве внутренних параметров D обычно неизвестна. Она задается лишь в неявном виде через систему уравнений, связывающую выходные и внутренние параметры, и условия работоспособности, заданные в техническом задании на проектирование. При неизвестной области D , использование метода Монте-Карло для оценки $P_r(x_r, T)$ при различных значениях вектора номиналов x_r необходимо N раз осуществлять анализ системы и проверку условий работоспособности для каждого вектора выбираемых параметров x_r . Для получения оценок $P_r(x_r, T)$ с приемлемой точностью обычно необходимо проводить несколько сотен испытаний.

Оптимизация требует получения оценок вероятности $P_r(x_r, T)$ для большого числа вариантов вектора параметров x_r . Следовательно, для использования такого подхода на практике необходимо найти возможность уменьшения числа испытаний, а также

количества расчетов выходных параметров проектируемой системы.

Ниже рассмотрена двухэтапная процедура и соответствующие алгоритмы, позволяющие уменьшить вычислительные затраты на решение задачи оптимального выбора параметров по критерию надежности.

4. Методы оптимизации

Первый шаг состоит в замене исходного стохастического критерия некоторым детерминированным, позволяющим находить решения, близкие к оптимальному. Рассмотрим два варианта такой замены.

Первым вариантом может быть критерий минимаксного типа. Он позволяет найти такую номинальную точку, которая максимально удалена от границ области работоспособности.

Введем функцию, которую назовем минимальным запасом работоспособности:

$$F(\mathbf{x}) = \min_{i=1,m} \left[\frac{a_i - Y_i(\mathbf{x})}{w_i} - 1 \right],$$

где $Y_i(\mathbf{x})$ - i -й выходной параметр, a_i - i -я граница области работоспособности ($Y(\mathbf{x}) \leq a$) и w_i - i -й весовой коэффициент.

Поставим задачу выбора номинальных значений параметров, при которых минимальный из запасов работоспособности достигает максимума:

$$\mathbf{x}_r = \arg \max_{\mathbf{x} \in D} F(\mathbf{x}).$$

Другой вариант замены состоит в использовании так называемого метода равных плотностей. Это метод комбинированного типа. Он состоит в нахождении оптимального аналитического решения на уровне выходного параметра и последующего поиска таких значений внутренних параметров, при которых обеспечивается максимальная близость выходного параметра к аналитическому решению [1].

После завершения первого этапа необходимо проверить удовлетворяет ли полученное решение заданным требованиям надежности. Если при выбранном на первом этапе векторе номиналов вероятность безотказной работы окажется ниже требуемой, переходим к следующему этапу. Этот этап состоит в поиске решения, оптимального по стохастическому критерию.

Известно, что эффективность методов поисковой оптимизации существенно зависит от выбора начальной точки поиска экстремума. Несложно показать, что в рассматриваемом случае наилучшей начальной точкой поиска будет номинальная точка, рассчитанная на этапе оптимизации по детерминированному критерию.

Как отмечалось выше, методы стохастической оптимизации обладают высокой вычислительной трудоемкостью. Рассмотрим один из возможных путей сокращения трудоемкости вычислений, в основе которого лежат идеи сравнительного моделирования и коррелированных выборок.

В процессе поисковой оптимизации для определения направления поиска не обязательно вычислять значения целевой функции в каждой точке пространства поиска. Достаточно оценить разницу ΔP вероятностей в двух последовательных точках выборочного пространства. Дисперсия оценки ΔP будет иметь вид

$$\sigma^2 \{ \Delta \hat{P} \} = \sigma^2 \{ \hat{P}_1 \} + \sigma^2 \{ \hat{P}_2 \} - 2R \{ \hat{P}_1; \hat{P}_2 \} \sigma \{ \hat{P}_1 \} \sigma \{ \hat{P}_2 \},$$

где R - коэффициент корреляции между оценками для двух сравниваемых точек. Если выборки, используемые для получения оценок, будут независимыми, то естественно, что $R=0$ и дисперсия

$$\sigma^2 \{ \Delta \hat{P} \} = \sigma_i^2 \{ \Delta \hat{P} \} = \sigma^2 \{ \hat{P}_1 \} + \sigma^2 \{ \hat{P}_2 \}.$$

При положительном R

$$\sigma^2 \{ \Delta \hat{P} \} < \sigma_i^2 \{ \Delta \hat{P} \},$$

т.е. для обеспечения той же самой точности оценки в случае коррелированных выборок требуется меньшее число моделирований (расчетов выходных параметров) системы, чем в при независимых выборках.

Радикальным путем уменьшения трудоемкости вычислительного процесса при оптимальном проектировании с учетом требований надежности может стать использование современных технологий параллельных и распределенных вычислений.

В связи с широким распространением сетевых технологий все больший интерес привлекает новое направление в области информационных технологий - распределенная модель вычислений.. Следует отметить, что большинство методов моделирования и поисковой оптимизации достаточно сложно поддаются распараллеливанию, исключение составляет метод сканирования (полного перебора), а

также метод Монте-Карло, используемый для расчета вероятности безотказной работы, которые являются потенциально параллельными. При программной реализации методов параметрического синтеза представляется целесообразным использование возможностей как современных многопроцессорных вычислительных систем, так и распределенных многомашинных комплексов, связанных локальной сетью. Реализация подобных алгоритмов на многопроцессорных машинах, работающих под управлением операционных систем, поддерживающих многопоточность, представляется достаточно тривиальной. В то же время, в распределенных гетерогенных средах, необходимо самостоятельно реализовать механизмы загрузки данных, синхронизации процессов и балансировки вычислительной нагрузки между компонентами комплекса.

К задаче параметрической оптимизации по стохастическим критериям применима так называемая главный-подчиненный (master-slave) парадигма параллельного программирования. Распараллеливание здесь базируется на декомпозиции алгоритма вычислений и в качестве единицы параллелизма выступает задача однократного расчета модели схемы (моделирования схемы), что является самым крупным и вычислительно емким блоком алгоритма статистического анализа и оптимизации.

В настоящее время начаты работы по созданию параллельных алгоритмов решения задач параметрического синтеза по критериям надежности, в частности, разработан параллельный аналог метода статистического моделирования (Монте-Карло).

5. Система оптимального проектирования

На основе приведенных выше методов и алгоритмов разработана автоматизированная система проектирования с учетом требований надежности, получившая название СПОРА. Эта система предназначена для решения задач оптимального параметрического синтеза аналоговых радиоэлектронных схем с учетом требований надежности. СПОРА дает возможность разработчику наблюдать, прерывать, диагностировать, изменять и

возобновлять вычисления в ходе их выполнения, что приводит к экономии не только времени вычислений, но и общего времени проектирования. Так например, если процедура проектирования, или оптимизации, которая должна обеспечить выполнение технических требований, успеха не принесла, то автоматизированная система проектирования позволяет на основе анализа выходных данных выявить причину этого. Разработчик имеет возможность прекратить вычисления и, воспользовавшись эвристической информацией, воспроизведенной на мониторе, провести следующие операции:

- модифицировать структуру проектируемого объекта,
- ослабить технические требования,
- изменить параметры процедуры (весовые коэффициенты, масштаб и т.д.)
- изменить формулировку задачи или алгоритмов.

В качестве модуля построения и анализа математической модели проектируемого объекта используется широко распространенная моделирующая система SPICE, которая позволяет моделировать процессы функционирования широкого класса аналоговых схем во временной и частотной областях.

СПОРА испытывалась на решении ряда сложных задач, в том числе, для оптимального проектирования по критериям серийнопригодности и параметрической надежности интегральных схем, фильтров и систем управления.

6. Пример

На рис. 2 приведена схема усилителя высокой частоты. Требуется рассчитать номинальные значения параметров навесных элементов, при которых с вероятностью $P > 0.9$ обеспечивается выполнение условий работоспособности:

Коэффициент усиления 25 ± 2 дБ
Полоса частот 800...1800 МГц

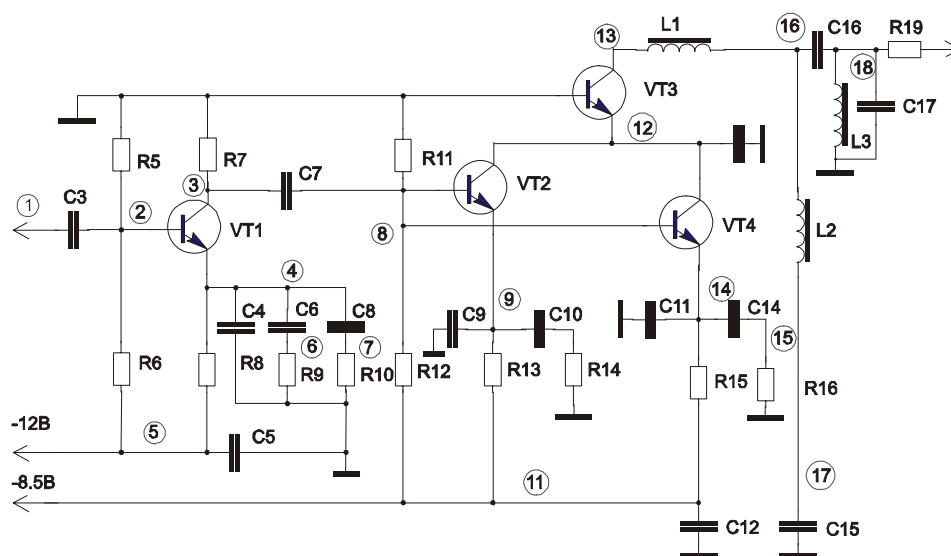


Рис. 2 Принципиальная схема широкополосного усилителя высокой частоты

Исходные значения номиналов варьируемых параметров приведены в табл. 1. Серийнопригодность исходного варианта схемы оказалась равной 0.44.

$$P_r = 0.444$$

Табл. 1. Исходные значения номиналов варьируемых параметров ($P_r = 0.44$)

L1	C4	C9	C10	C11	C13	C14	C17
0.01m	0.05p	20.6p	15p	25p	10p	1.5p	1.5p

Первый этап оптимизации был проведен с использованием критерия минимального запаса работоспособности. В результате была достигнута вероятность 0.7. Значения номиналов варьируемых параметров после первого этапа оптимизации приведены в табл.2.

Табл. 2. Значения номиналов параметров после первого этапа оптимизации ($P_r = 0.7$)

L1	C4	C9	C10	C11	C13	C14	C17
0.03m	5.6p	8.2p	12p	8.2p	2.2p	12p	1.5p

Следующим этапам стала оптимизация по критерию вероятности выполнения условий работоспособности. В результате получены номинальные значения параметров, приведенные в табл. 3. При этих значениях была достигнута вероятность 0.92, что выше требуемой.

Табл. 3. Оптимальные значения номиналов параметров ($P_r = 0.92$)

L1	C4	C9	C10	C11	C13	C14	C17
0.012	6.5p	8.5p	10p	8.9p	2.4p	11p	1.4p

7. Заключение

Рассмотрена задача проектирования аналоговых технических систем с учетом закономерностей случайных вариаций параметров их элементов и требований параметрической надежности. Предложены эффективные методы оптимального выбора номинальных значений параметров проектируемых систем (параметрического синтеза).

На базе предложенных методов и алгоритмов разработана автоматизированная система надежностного проектирования СПОРА

Литература

- [1] Абрамов О.В. Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. М: Наука. 1992.
- [2] O.V. Abramov and K.S.Katuyev, "Effective Methods for Parametric Synthesis of Stochastic Systems", *Proc. First Asian Control Conference, Tokyo*, vol. 3, pp. 587-589, 1994.
- [3] R.Brayton, G.Hachtel and A.Sangiovanni-Vincentelli "A survey of Optimization Techniques for Integrated-Circuit Design", *Proc. IEEE*, vol.69, no. 10, pp 1334-1362, 1981.

ДВА ПОДХОДА К ДЕКОМПОЗИЦИИ СЛОЖНЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ. НЕПРЕРЫВНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОДСИСТЕМЫ

Владимир Рыков
(Москва, Россия)

*Светлой памяти
Бориса Владимировича
Гнеденко посвящаю*

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются два подхода к решению проблемы декомпозиции процессов функционирования сложных иерархических систем, опирающиеся на условия взаимодействия между их подсистемами. Первый подход, которому посвящена первая часть работы (настоящая статья), связан с изучением систем с непрерывно взаимодействующими подсистемами. Типичным примером таких систем являются информационно-вычислительные сети. Традиционно такие системы исследуются с помощью моделей, сетей массового обслуживания, для которых проблема декомпозиции решается в рамках мультипликативного представления для стационарного распределения вероятностей их состояний. Путем расширения метода дополнительной переменной доказана допустимость мультипликативного представления на случай иерархической сети с зависимыми длительностями обслуживания, характерный для систем передачи данных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие современные производственные, экономические информационные социальные и др. системы имеют сложную иерархическую структуру. Под системой будем понимать объект, допускающий разложение на части (подсистемы), сохраняющие, по крайней мере, частично функции всей системы. Сложной называется система, подсистемы которой допускают дальнейшее разложение, неразложимые части системы называются ее элементами, а максимальное число уровней разложения - рангом сложной системы.

Заметим, что системы допускают, вообще говоря, различное разложение относительно различных функций и процессов в них происходящих.

Наибольший интерес с точки зрения анализа систем представляет исследование поведения процессов, протекающих в сложных иерархических структурах, которое в значительной степени зависит от режима взаимодействия ее подсистем. Сложность этих процессов побуждает искать пути их декомпозиции. В работе рассматриваются два подхода к декомпозиции процессов в сложных иерархических стохастических системах, связанные с режимом взаимодействия их подсистем, — один из них допускает декомпозицию при непрерывном взаимодействии, другой использует идею взаимодействия подсистем в дискретные, вообще говоря, случайные моменты времени. Первая часть посвящена системам с непрерывно взаимодействующими подсистемами

на примере информационно-вычислительной сети (ИВС). Во второй рассматриваются системы с дискретно взаимодействующими подсистемами.

Исследуемая здесь модель предложена в работе [1], где она была использована для декомпозиции ИВС, в том числе в предположениях, обеспечивающих описание процессов функционирования сети дискретным марковским процессом. Ниже уточняются и развиваются результаты этой работы применительно к сетям с сообщениями произвольно распределенного объема, не изменяющегося в процессе их передачи по сети, но, возможно, передающихся с различными скоростями различными каналами.

Материал первой части представлен следующим образом. В разделе 2 приводится краткий обзор известных результатов по декомпозиции систем с непрерывно взаимодействующими подсистемами и на примере ИВС предложена модель непрерывно взаимодействующей стохастической иерархической сети. В разделах 3, 4 метод дополнительных переменных применен для исследования ИВС с независимыми на различных каналах длительностями передачи сообщений. Отправляясь от полученных результатов с помощью замены переменных мы перейдем к выражению соответствующих характеристик в терминах объемов (длин) сообщений и скоростей работы каналов с учетом их различия. Наконец, в разделах 5, 6 полученные результаты обобщаются на случай сетей, объемы сообщений в которых не изменяются при передаче по сети, а длительности их передачи определяются скоростью работы соответствующих каналов. Для наглядности используется терминология ИВС.

2. НЕПРЕРЫВНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОДСИСТЕМЫ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Наиболее ярким примером непрерывно взаимодействующих стохастических систем являются современные ИВС. Технология открытости привела к их бурному развитию и объединению локальных сетей в глобальные, имеющие сложную иерархическую структуру, примером которой является, в частности, Internet [2]. Ввиду все возрастающей нагрузки в сетях проблема анализа их производительности приобретает все более важное значение.

Адекватным аппаратом исследования ИВС являются сети массового обслуживания (СеМО), а многочисленные особенности работы ИВС (различные протоколы и способы передачи и обработки информации, используемые в ИВС) приводят к разнообразию используемых моделей. В частности, т.к. наиболее узким местом работы сети являются каналы связи, обеспечивающие ресурсами всю сеть, в то время как серверы решают локальные задачи, то при моделировании ИВС в качестве узлов сети целесообразно рассматривать каналы, отводя серверам положение накопителей информации.

Одним из наиболее эффективных способов передачи сообщений является режим коммутации пакетов, при котором сообщение разбивается на части (пакеты), передающиеся независимо друг от друга наряду с пакетами от других сообщений и собирающиеся вместе при приеме. Естественной моделью организации пакетного режима передачи информации является дисциплина разделения времени. Эта дисциплина не только создает у пользователей иллюзию непрерывной работы в сети, но и обеспечивает определенные "хорошие" свойства работы системы.

Как проблемам моделирования ИВС с помощью СеМО, так и вопросам анализа последних посвящена многочисленная литература (см., например, [3] - [7] и др.). Сложность анализа сетей побуждает искать пути их декомпозиции. Постановка задачи и первые результаты в этом направлении принадлежат Джексону [8, 9], который показал возможность декомпозиции экспоненциальных сетей при естественной дисциплине обслуживания в порядке поступления требований (FIFO) с марковской маршрутизацией сообщений. В дальнейшем этот результат обобщался в различных направлениях, что привело к исследованию сетей типа Джексона и так называемых ВСМР-сетей (см. [10], а также, например, обзоры [11, 12]). В этих сетях предполагается марковская маршрутизация и независимое обслуживание в узлах, что не всегда адекватно отражает ситуацию в реальных сетях передачи данных. Следующий шаг в направлении исследования СеМО был сделан Келли [13], который расширил принципы маршрутизации в сетях, допустив возможность априорного задания маршрута сообщения по сети, и развил общую концепцию декомпозиции, опирающуюся на обратимость соответствующего марковского процесса. Однако используемый им аппарат не позволил ему исследовать сети с зависимыми длительностями передачи сообщений.

В реальных ИВС длина сообщения в процессе его передачи от одного узла к другому не меняется. Это приводит к необходимости исследования сетей с зависимыми длительностями передачи сообщений на каналах.

Для решения этой задачи в настоящей работе обобщается классический метод введения дополнительных переменных, который используется при доказательстве мультипликативного представления стационарных вероятностей состояний сложных иерархических стохастических сетей, работающих в режиме разделения времени, как в случае независимых, так и зависимых длительностей передачи сообщений. При этом мы не затрагиваем тонких вопросов существования стационарных распределений для общих сетей, которые представляют собой предмет самостоятельных исследований (см., например, обзор [14]). Полученные результаты обеспечивают декомпозицию сложных иерархических стохастических систем, работающих в режиме разделения времени.

С точки зрения анализа процессов передачи сообщений сложная иерархическая система может быть представлена в виде сети, изображенной на рис. 2.

Потоки сообщений в такую сеть образованы суперпозицией независимых потоков от многих источников и согласно предельным теоремам для потоков независимых событий могут рассматриваться как пуассоновские. Мы будем предполагать их стационарными с интенсивностями λ_{ij} для потока от i -го источника в j -ый. Объемы (длины) сообщений для простоты будем измерять в единицах объема пакета, а скорости их передачи - в количестве пакетов в единицу времени. Тогда время T передачи сообщения будет пропорционально его объему V и обратно пропорционально скорости μ соответствующего канала, а распределение времени передачи сообщения $B(t)$ связано с распределением его объема $G(x)$ соотношением

$$(1) \quad B(x) = P\{T < x\} = P\{V/\mu < x\} = P\{V < \mu x\} = G(\mu x).$$

Дополнительные предположения относительно объемов сообщений и скоростей их обслуживания будут сделаны в дальнейшем при исследовании конкретных моделей. Начнем с исследования поведения изолированного узла с независимыми длительностями передачи сообщений.

3. НЕЗАВИСИМЫЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ. МОДЕЛЬ УЗЛА

Пусть в узел поступают r независимых пуассоновских потоков сообщений с интенсивностями λ_i , длительности передачи которых независимы и имеют общие распределения $B_i(\cdot), i = \overline{1, r}$. Предположим, что функции распределения (ФР) $B_i(\cdot)$ обладают плотностями и средними значениями, которые обозначим через $b_i(\cdot)$ и m_i^B , соответственно. Обозначим через $\rho_i = \lambda_i m_i^B$ загрузку канала сообщениями типа i , а через $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_r$ - полную его загрузку.

В качестве состояний узла рассмотрим два набора переменных (n, x) , где набор $n = (n_1, \dots, n_r)$ представляет собой количества сообщений различных типов с общим их числом $n = \sum_{i=1}^r n_i$, а набор $x = (x_{ij}, j = \overline{1, n_i}, i = \overline{1, r})$ описывает остаточные длительности передачи ожидающих сообщений, расположение в произвольном (случайном) порядке. Рассмотрим случайный процесс

$X(t) = (n, x)$, если в момент t система находится в состоянии (n, x)

и предположим, что плотности (по переменным x_{ij}) распределения его вероятностей состояний существуют (можно показать, что это имеет место при сделанных предположениях). Справедлива теорема

Теорема 1. При условии

$$(2) \quad \rho < 1$$

процесс $X(t)$ положительно возратен по Харрису, а его предельные стационарные плотности $p(n, x)$ распределения вероятностей состояний существует, и имеет вид

$$(3) \quad p(n, x) = (1 - \rho) \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_i (1 - B_i(x_{ij})).$$

При этом распределение вероятностей макросостояний дается формулой

$$(4) \quad p(n) = (1 - \rho) \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \rho_1^{n_1} \dots \rho_r^{n_r},$$

которой отвечает геометрическое распределение суммарного количества требований в системе

$$(5) \quad p(n) = (1 - \rho) \rho^n.$$

Доказательство. Если процесс $X(t)$ положительно возратен по Харрису, то согласно теории марковских процессов [15] его предельное распределение вероятностей состояний существует, а систему уравнений равновесия для него можно получить приравнявая к нулю частные производные по времени в соответствующей системе уравнений Колмогорова. Последняя выводится обычным методом путем перехода к пределу в системе разностных уравнений, связывающих вероятности состояний процесса в близкие моменты времени.

Для удобства записи этих уравнений введем операторы на пространстве состояний системы, описывающие их изменения при поступлении A_{ij} требования i -го типа на j -ую позицию и окончании обслуживания D_{ij} требования i -го типа на j -ой позиции. Формальное описание этих операторов более громоздко, чем содержательное, поэтому приведем последнее, причем применительно к обратным операторам, которые участвуют в записи соответствующих уравнений. Оператор A_{ij}^{-1} удаляет компоненту x_{ij} из набора $\mathbf{x}$, оператор D_{ij}^{-1} добавляет на j -ое место i -го набора компоненту x_{ij} со значением ноль. С использованием введенных операторов и обозначения $\mathbf{e}_i$ для набора i -ая компонента которого равна 1, а все остальные 0, уравнения для стационарных вероятностей состояний процесса $X(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq n_i} \frac{\partial p(\mathbf{n}, \mathbf{x})}{\partial x_{ij}} + \lambda p(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \\ (6) \quad & = \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq n_i} \frac{\lambda_i}{n_i} p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i, A_{ij}^{-1} \mathbf{x}) b_i(x_{ij}) + \\ & + \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq n_i + 1} \frac{1}{n + 1} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i, D_{ij}^{-1} \mathbf{x}) \end{aligned}$$

с естественными изменениями для уравнений на границе области дискретных значений процесса. По непрерывным переменным эти уравнения выполняются всюду в области их изменения $0 \leq x_{ij} < \infty$, $j = \overline{1, n_i}$, $j = \overline{1, r}$, включая границу.

Для объяснения приведенной системы уравнений заметим, что

- а) при увеличении реального времени на величину h остаточное время каждого из n ожидающих требований уменьшается на величину h/n ,
- б) при поступлении сообщения i -го типа в систему время его обслуживания с равной вероятностью занимает любую из n_i позиций,
- и, наконец,
- в) чтобы одно из $(n + 1)$ сообщений покинуло систему, оно должно иметь остаточное время обслуживания в $(k/(n + 1))$ - окрестности точки ноль.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что выражение (3) удовлетворяет этому уравнению. Интегрируя его по дополнительным переменным x_{ij} получаем распределение вероятностей (4) для макросостояний системы, а суммируя получившийся результат по $n_1 \dots n_r$ таким, что $\sum 1 \leq i \leq r n_i = n$ и распределение (5) для суммарного количества требований в системе.

Чтобы показать, что условие (2) достаточно для положительной возвратности процесса $X(t)$ по Харрису [15] заметим, что процесс $X(t)$ неразложим, так как состояние "0", например,

достижимо из любого другого с положительной вероятностью и, наоборот, любое состояние можно достичь из нулевого с положительной вероятностью. Так как нулевое состояние является положительным атомом для этого процесса, то для доказательства его положительной возвратности по Харрису достаточно показать конечность среднего времени возвращения в нулевое состояние. Однако, так как время возвращения складывается из конечного (со средним $1/\lambda$) свободного периода и периода занятости системы, то достаточно показать конечность в среднем последнего. Наконец, период занятости этой системы исследуется классическими методами (см., например, [16]), и условие (2) обеспечивает конечность его среднего значения.

Чтобы перейти к соответствующему выражению вероятностей состояний через распределение объемов V сообщений с учетом скорости работы канала воспользуемся заменой (1), из которой следует, что соответствующие средние значения связаны соотношением $m^B = m/\mu$. Поэтому, подставляя последнее выражение в формулу (3), получим

Следствие. В терминах распределений объемов сообщений стационарные плотности распределения вероятностей состояний имеют вид

$$(7) \quad p(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = (1 - \rho) \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{1 \leq j \leq n_i} \lambda(1 - G_i(\mu x_{ij}))$$

с распределением макросостояний вида (4), где

$$\rho_i = \frac{\lambda_i m_i}{\mu}, \quad \rho = \sum_{1 \leq i \leq r} \rho_i.$$

4. НЕЗАВИСИМЫЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ. МОДЕЛЬ СЕТИ

Переходя к исследованию модели сети, ограничимся исследованием ее фрагмента, состоящего из двухуровневой подсети (см. рис. 2) и рассмотрим сначала случай независимых длительностей передачи сообщений на различных уровнях сети с распределениями $B_{ij}^{(1)}(\cdot)$ и $B_{ij}^{(2)}(\cdot)$ для длительностей передачи сообщений на каналах первого и второго уровней, соответственно. Для описания пространства состояний сети используем набор переменных $(\mathbf{n}, \mathbf{x})$, где $\mathbf{n} = (\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)})$, а $\mathbf{n}_i^{(1)} = (n_{ij}^{(1)})$, $\mathbf{n}_i^{(2)} = (n_i^{(2)})$, $i, j = \overline{1, r}$ и $n_{ij}^{(1)}$ означает число сообщений, передающихся i -ым каналом в j -ом направлении на нижнем уровне, $n_i^{(2)}$ - число сообщений, передающихся на верхнем уровне в i -ом направлении, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$, а переменные $x_i^{(1)} = (x_{ijl}^{(1)}, l = \overline{1, n_{ij}^{(1)}})$; $\mathbf{x}^{(2)} = (x_{il}^{(2)}, l = \overline{1, n_i^{(2)}})$ описывают остаточные длительности передачи сообщений на разных каналах в рассматриваемый момент времени. Эти переменные располагаются в произвольном (случайном) порядке в своих наборах. Введем процесс $X(t) = (\mathbf{n}, \mathbf{x})$, если в момент t система находится в состоянии $(\mathbf{n}, \mathbf{x})$ и предположим существование плотностей (по переменным $x_{ijl}^{(1)}, x_{il}^{(2)}$) распределения вероятностей его состояний. Справедлива теорема.

Теорема 2. Если процесс $X(t)$ положительно возратен по Харрису, то он обладает предельным распределением, вероятностей, плотности $p(n, x)$ которого допускают мультипликативное представление

$$(8) \quad p(n, x) = \prod_{1 \leq i \leq r} \hat{p}(n_i^{(1)}, x_i^{(1)}) \times \hat{p}(n^{(2)}, x^{(2)}),$$

где распределения вероятностей состояний узлов $p(n, x)$ задаются формулой (3) с соответствующими распределениями длительностей передачи сообщений, а интенсивности потоков на каналы нижнего и верхнего уровней равны

$$(9) \quad \lambda_{ij}^{(1)} = \lambda_{ij}, \quad (j \neq i), \quad \lambda_{ii}^{(1)} = \lambda_{ii} + \sum_{j \neq i} \lambda_{ji}, \quad \lambda_i^{(2)} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ji}.$$

Соответствующее распределение вероятностей макросостояний имеет вид

$$(10) \quad p(n) = \prod_{1 \leq i \leq r} \hat{p}(n_i^{(1)}) \times \hat{p}(n^{(2)}),$$

где распределения $p(n)$ определяются формулами (4) с соответствующими наборами p числа сообщений и нагрузками, определяемыми соотношениями

$$(11) \quad \rho_{ij}^{(1)} = \lambda_{ij}^{(1)} m_{ij}^B, \quad \rho_i^{(1)} = \sum_{1 \leq j \leq r} \rho_{ij}^{(1)}, \quad \rho_i^{(2)} = \lambda_i^{(2)} m_{ii}^B.$$

Доказательство. Если процесс $X(t)$ положительно возратен по Харрису, то согласно теории марковских процессов его предельное распределение вероятностей состояний существует, а систему уравнений стационарного режима для их плотностей можно получить, приравнявая к нулю производные по времени в системе дифференциальных уравнений Колмогорова. Последняя получается обычным методом путем предельного перехода в соответствующей системе разностных уравнений, связывающих вероятности состояний процесса в близкие моменты времени.

Для удобства записи этих уравнений введем операторы на пространстве состояний системы, описывающие их изменения при поступлении сообщения типа ij на l -ую позицию - A_{ijl} , при передаче (ij) -сообщения с l -ой позиции нижнего уровня на m -ую позицию верхнего - $T_{ij}^{(12)}(lm)$, и j -сообщения с m -ой позиции верхнего на l -ую позицию нижнего - $T_j^{(21)}(ml)$, и при окончании обслуживания требования i -го типа на l -ой позиции - D_{iil} .

Так как в уравнениях Колмогорова участвуют обратные операторы, приведем сразу их содержательное описание:

- оператор A_{ijl}^{-1} удаляет компоненту $x_{ijl}^{(1)}$ из набора x ,
- оператор $(T_{ij}^{(12)}(lm))^{-1}$ добавляет компоненту $x_{ijl}^{(1)}$ со значением ноль и удаляет компоненту $x_{jm}^{(2)}$,
- оператор $(T_j^{(21)}(ml))^{-1}$ добавляет компоненту $x_{jm}^{(2)}$ со значением ноль и удаляет

компоненту $x_{jil}^{(1)}$, и, наконец,

- оператор D_{iil}^{-1} добавляет компоненту $x_{iil}^{(1)}$ со значением ноль.

С использованием введенных операторов уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i,j,l} \frac{1}{n_i^{(1)}} \frac{\partial p(\mathbf{n}, \mathbf{x})}{\partial x_{ijl}^{(1)}} - \frac{1}{n^{(2)}} \sum_{j,l} \frac{\partial p(\mathbf{n}, \mathbf{x})}{\partial x_{jl}^{(2)}} + \lambda p(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \\
 & = \sum_{i,j,l} \frac{\lambda_{ij}}{n_{ij}^{(1)}} p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_{ij}^{(1)}, A_{ijl}^{-1} \mathbf{x}) b_{ij}^{(1)}(x_{ijl}^{(1)}) + \\
 & + \sum_{i,j \neq i,l,m} \frac{1}{(n_i^{(1)} + 1) n_j^{(2)}} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{ij}^{(1)} - \mathbf{e}_j^{(2)}, (T_{ij}^{(12)}(lm))^{-1} \mathbf{x}) b_j^{(2)}(x_{jl}^{(2)}) + \\
 & + \sum_{j,l,m} \frac{1}{n_{jj}^{(1)} (n^{(2)} + 1)} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j^{(2)} - \mathbf{e}_{jj}^{(1)}, (T_{jl}^{(21)}(ml))^{-1} \mathbf{x}) b_{jj}^{(1)}(x_{jjl}^{(1)}) + \\
 & (12) \qquad \qquad \qquad + \sum_{i,l} \frac{1}{n_i^{(1)} + 1} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{ii}^{(1)}, D_{iil}^{-1} \mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

Суммирование в этих уравнениях ведется по всем допустимым значениям индексов i, j, l, m , что обеспечивает их выполнение на границе области дискретных значений процесса. По непрерывным переменным эти уравнения выполняются всюду в области допустимых значений переменных, включая границу

$$\begin{aligned}
 0 \leq x_{ijl}^{(1)} < \infty, \quad l = \overline{1, n_{ij}^{(1)}}, \quad i, j = \overline{1, r}, \\
 0 \leq x_{jm}^{(2)} < \infty, \quad m = \overline{1, n_j^{(2)}}, \quad j = \overline{1, r}.
 \end{aligned}$$

Для пояснения этих уравнений обозначим через $\mathbf{1}$ набор из единиц соответствующей размерности и заметим, что переход в состояние $(\mathbf{n}, \mathbf{x})$ за малое время h возможен следующими несовместимыми способами:

- из состояния $(\mathbf{n}, x_i^{(1)} - (h/n_i^{(1)})\mathbf{1}, x^{(2)} - (h/n^{(2)})\mathbf{1})$, если за это время не поступит ни одного сообщения;
- из состояния $(\mathbf{n} - \mathbf{e}_{ij}^{(1)}, A_{ijl}^{-1} \mathbf{x})$ при поступлении (с плотностью распределения вероятностей $b_{ij}^{(1)}(x_{ijl}^{(1)})$) сообщения типа (ij) с длительностью передачи $x_{ijl}^{(1)}$, которое с равной вероятностью занимает любую из $n_{ij}^{(1)}$ позиций среди переменных $x_{ijl}^{(1)}$;
- из состояния $(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{ij}^{(1)} - \mathbf{e}_j^{(2)}, (T_{ij}^{(12)}(lm))^{-1} \mathbf{x})$, при переходе сообщения с первого уровня на второй, при этом, длительность $x_{ijl}^{(1)}$ сообщения, передача которого заканчивается, должна находиться в окрестности нуля, а время его передачи на канале второго уровня приобретает (с плотностью распределения вероятностей $b_j^{(2)}(x_{jm}^{(2)})$) значение $x_{jm}^{(2)}$, при этом на следующем канале оно займет с равной вероятностью любую из $n_j^{(2)}$ позиций;

- г) из состояния $(n + e_j^{(2)} - e_{jj}^{(1)}, (T_{jl}^{(21)}(ml))^{-1}x)$, при переходе сообщения со второго уровня на первый, при этом длительность сообщения, передача которого заканчивается, должна находиться в $h/(n^{(2)} + 1)$ - окрестности нуля, а время его передачи на следующем канале приобретает значение $x_{jjl}^{(1)}$ (с плотностью распределения вероятностей $b_{jj}^{(1)}(x_{jjl}^{(1)})$) и займет с равной вероятностью любую из $n_{jj}^{(1)}$ позиций в своем наборе;
- д) из состояния $(n + e_{ii}^{(1)}, D_{iii}^{-1}x)$, при окончании передачи сообщения, при этом длительность сообщения, передача которого заканчивается, должна находиться в $h/(n_i^{(1)} + 1)$ - окрестности нуля.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение (8), где распределения вероятностей состояний узлов $p(n, x)$ задаются формулой (3), а интенсивности потоков на каналы нижнего и верхнего уровней — выражениями (9), удовлетворяют этому уравнению.

Распределение вероятностей макросостояний (10) для этой системы получается интегрированием по дополнительным переменным $x_{ijl}^{(1)}, x_{il}^{(2)}$.

Полученное мультипликативное представление распределения вероятностей состояний сети обеспечивает ее декомпозицию. При этом, помимо прочего, эти соотношения демонстрируют нечувствительность распределения вероятностей макросостояний модели к виду функций распределения длительностей передачи сообщений.

Как и в случае изолированного узла, справедливо следствие

Следствие. При заданных распределениях объемов сообщений и различных скоростям их передачи в каналах выражение для плотностей распределения вероятностей состояний процесса по-прежнему имеет вид (8), где плотности распределения вероятностей состояний узлов задаются формулой (7), а распределение вероятностей макросостояний совпадает с (10) при нагрузках, задаваемых выражениями

$$(13) \quad \rho_{ij}^{(1)} = \frac{\lambda_{ij}^{(1)} m_{ij}}{\mu_i^{(1)}}, \quad \rho_i^{(1)} = \sum_{1 \leq j \leq r} \rho_{ij}^{(1)}, \quad \rho_i^{(2)} = \frac{\lambda_i^{(2)} m_{ii}}{\mu^{(2)}}.$$

Доказательство получается простой заменой в соотношении (3) функций $B_{ij}^{(k)}(x)$ на $G_{ij}(\mu^{(k)}x)$.

Таким образом, при сделанных предположениях сеть допускает декомпозицию.

В реальных сетях связи предположение о независимости длительностей передачи сообщения на отдельных каналах неестественно, так как передается одно и то же сообщение, хотя, возможно, с различной скоростью разными каналами. Рассмотрим, поэтому вопрос о возможности декомпозиции сети в предположении, что объем сообщения не меняется при его передаче, хотя возможны различные скорости его передачи различными каналами. Чтобы ввести

соответствующие обозначения, анализ сети начнем с изучения простой тандем-системы с неизменными объемами сообщений.

5. НЕИЗМЕННЫЕ ОБЪЕМЫ СООБЩЕНИЙ. ТАНДЕМ-СИСТЕМА

Рассмотрим систему, функционирующую в режиме разделения времени и состоящую из двух последовательно соединенных каналов, работающих со скоростями $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$, соответственно, на которую поступает простейший поток сообщений интенсивности λ , объемы V которых распределены по закону $G(\cdot)$ с заданными плотностью распределения $g(\cdot)$ и средним значением m (рис. 3).

Предполагается, что объемы сообщений не меняются при их передаче, а длительности их передачи выражаются через их объемы формулой (1), так что распределения длительностей передачи и их плотности связаны соотношениями

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\mu^{(1)}} b^{(1)}\left(\frac{x}{\mu^{(1)}}\right) &= \frac{1}{\mu^{(2)}} b^{(2)}\left(\frac{x}{\mu^{(2)}}\right) = g(x), \\ B^{(1)}\left(\frac{x}{\mu^{(1)}}\right) &= B^{(2)}\left(\frac{x}{\mu^{(2)}}\right) = G(x), \end{aligned}$$

Для построения марковского процесса при описании пространства состояний системы нам потребуется информация не только об остаточных, но также и об исходных длительностях передачи сообщений, находящихся на первой фазе. Поэтому для описания состояния системы используется набор (n, x, y) , где переменные $n = (n^{(1)}, n^{(2)})$ указывают число сообщений на первой и второй фазах обслуживания, соответственно, переменные $x = (x_{1i}, i = \overline{1, n^{(1)}}), (x_{2i}, i = \overline{1, n^{(2)}})$ означают остаточные длительности передачи сообщений на первой и второй фазах, соответственно, и переменные $y = (y_i, i = \overline{1, n^{(1)}})$ обозначают исходные длительности передачи сообщений, находящихся на первой фазе. При этом переменные x_{1i} и x_{2i} располагаются в произвольном (случайном) порядке, однако порядок расположения переменных x_{1i} и y_i совпадает. Введем далее процесс $X(t)$ соотношением $X(t) = (n, x, y)$, если в момент t система находится в состоянии (n, x, y) и предположим, что плотности (по переменным x, y) распределения вероятностей его состояний существуют. Для процесса $X(t)$ справедлива теорема.

Теорема 3. При условии, что процесс $X(t)$ положительно возвратен по Харрису, его предельные плотности распределения вероятностей состояний $p(n, x, y)$ существуют и допускают, мультипликативное представление

$$(15) \quad p(n, x, y) = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \prod_{1 \leq i \leq n_1} \lambda \Theta(y_i - x_{1i}) g(\mu^{(1)} y_i) \prod_{1 \leq j \leq n_2} \lambda (1 - G(\mu^{(2)} x_{2j})).$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda m}{\mu^{(1)}}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda m}{\mu^{(2)}},$$

и $\Theta(x)$ есть Θ -функция: $\Theta(x)=0$ при $x < 0$ и $\Theta(x)=1$ при $x > 0$.

Доказательство. Если процесс $X(t)$ положительно возратен по Харрису, то согласно теории марковских процессов [15] его предельное распределение вероятностей состояний существует, а систему уравнений для его плотностей можно получить, приравнивая к нулю частные производные по времени в соответствующих уравнениях Колмогорова. Последние получаются обычным методом путем перехода к пределу в системе разностных уравнений, связывающих плотности распределения вероятностей состояний процесса в близкие моменты времени.

Для упрощения записи этой системы уравнений используем, как и ранее, операторы преобразования состояний A_i , T_{ij} , D_i , соответствующие поступлению сообщения, его переходу с первой фазы на вторую и окончанию обслуживания. Действие этих операторов в рассматриваемом случае отличается от описанного ранее. Оператор A_i добавляет переменные x_{1i} и y_i одновременно, оператор T_{ij} действует на границе при достижении переменной x_{1i} значения ноль, при этом он удаляет ее, помещая на позицию $(2j)$ значение скорости передачи сообщения x_{2j} , соответствующее значению y_i с сохранением его объема, т.е. в соответствии с соотношением: $\mu^{(1)}y_i = \mu^{(2)}x_{2j}$, оператор D_i удаляет переменную x_{2j} по достижении ею значения ноль. Заметим, что в уравнениях равновесия, которые соответствуют обратным уравнениям Колмогорова, участвуют обратные операторы переходов.

Теперь область значений процесса $X(t)$ и соответственно область определения этих уравнений имеет вид

$$0 \leq x_{1i} \leq y_i < \infty, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad 0 \leq x_{2j} < \infty, \quad j = \overline{1, n_2}$$

и при поступлении требования процесс оказывается на границе $x_{1i} = y_i$, $i = \overline{1, n_1}$, что в уравнениях равновесия должно отражаться специальными граничными условиями. Однако с помощью δ -функции Дирака мы введем эти граничные условия в общую систему уравнений.

Заметим, кроме того, что так как дополнительными переменными являются длительности передачи сообщений, то для того чтобы выписать уравнения сразу в терминах распределения объемов сообщений мы воспользуемся формулой (14) для связи соответствующих плотностей.

С учетом введенных операторов и сделанных замечаний система уравнений для стационарных плотностей распределения вероятностей процесса $X(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{n^{(1)}} \sum_{1 \leq i \leq n_1} \frac{\partial p(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_{1i}} - \frac{1}{n^{(2)}} \sum_{1 \leq j \leq n_2} \frac{\partial p(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_{2j}} + \lambda p(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\ & = \frac{\lambda}{n^{(1)}} \sum_{1 \leq i \leq n^{(1)}} p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_1, A_i^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) g(\mu^{(1)} y_i) \delta(y_i - x_{1i}) + \\ (16) \quad & + \frac{1}{(n^{(1)} + 1)n^{(2)}} \sum_{1 \leq i \leq n_1} \sum_{1 \leq j \leq n_2} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, T_{ij}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + \\ & + \frac{1}{n^{(2)} + 1} \sum_{1 \leq j \leq n_2} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_2, D_j^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \end{aligned}$$

Для пояснения этих уравнений заметим, как и ранее, что переход в состояние (n, x, y) за малое время h возможен следующими несовместимыми способами:

- а) из состояния $(n, x_i^{(1)} - (h/n^{(1)})1, x^{(2)} - (h/n^{(2)})1, y)$, если за это время не поступит ни одного сообщения;
- б) из состояния $(n - e_i^{(1)}, A_i^{-1}(x, y))$ при поступлении (с вероятностью λh) сообщения длительности передачи y_i (с плотностью $b^{(1)}(y_i) = g(\mu^{(1)} y_i)$), совпадающее в этот момент с остаточной длительностью x_{li} , которое с равной вероятностью занимает любую из $n^{(1)}$ позиций набора (x_{li}) ;
- в) из состояния $(n + e_1 - e_2, T_{ij}^{-1}x, y)$, при переходе сообщения с первой фазы на вторую, при этом длительность сообщения x_{li} , передача которого заканчивается, должна находиться в $h/(n_i^{(1)} + 1)$ -окрестности нуля, а остаточное время передачи сообщения на второй фазе x_{2j} принимает значение $x_{2j} = (\mu^{(1)} / \mu^{(2)}) y_i$, при этом на следующей фазе оно займет с равной вероятностью любую из $n^{(2)}$ позиций;
- г) из состояния $(n + e_2, D_i^{-1}(x, y))$, при окончании передачи сообщения, при этом длительность сообщения, передача которого заканчивается, должна находиться в $h/(n^{(2)} + 1)$ -окрестности нуля.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что плотность распределения вероятностей (15) удовлетворяет уравнению (16), при этом необходимо учитывать связь между распределениями длительностей передачи сообщений на различных фазах, даваемую соотношением (14).

Заметим, что выражение (15) имеет мультипликативную форму, в которой транзитным сообщениям соответствует плотность

$$\tilde{p}(n, x, y) = (1 - \rho) \prod_{1 \leq i \leq n} \lambda \Theta(y_i - x_i) g(\mu y_i),$$

а выходящим – плотность

$$\hat{p}(n, x) = (1 - \rho) \prod_{1 \leq j \leq n} \lambda (1 - G(\mu x_j)).$$

Распределение вероятностей макросостояний для этой системы, которое получается интегрированием соотношений (15) по переменным x, y , имеет вид

$$p(n_1, n_2) = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2},$$

который также показывает возможность декомпозиции соответствующей сети и нечувствительность стационарных вероятностей макросостояний к виду распределения объемов сообщений.

Не трудно проверить, что для тандем-системы, передающей r потоков сообщений с интенсивностями λ_i и распределениями объемов $G_i(\cdot), i = \overline{1, r}$ со скоростями $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ на первой и второй фазах сохраняются аналогичные утверждения о мультипликативном представлении ее стационарных вероятностей состояний, причем транзитным сообщениям соответствует плотность

$$(17) \quad \tilde{p}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1 - \rho) \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{1 \leq j \leq n_i} \lambda_i \Theta(y_i - x_i) g(\mu^{(1)} y_i),$$

а выходящим, как и в случае независимых длительностей передачи, - плотность, задаваемая формулой (7).

6. НЕИЗМЕННЫЕ ОБЪЕМЫ СООБЩЕНИЙ. МОДЕЛЬ СЕТИ

На основании полученных результатов исследуем теперь поведение двухуровневой сети в случае, когда объемы сообщений произвольно распределены с ФР $G_{ij}(x)$ для сообщений типа (ij) , но не изменяются при их передаче по различным каналам сети. Для исследования этой модели расширим пространство состояний системы, введенное в разделе 4, дополнительными переменными $\mathbf{y} = (y_{ij}^{(1)}, y_j^{(2)})$, указывающими исходные длительности передачи сообщений, находящихся на первом и втором уровнях сети. Обозначим через $X(t)$ процесс $X(t) = (\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, если в момент t система находится в состоянии $(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ и предположим, что плотности (по переменным $x_{ij}^{(1)}, x_j^{(2)}, y_{ij}^{(1)}, y_j^{(2)}$) распределения вероятностей его состояний существуют. Для процесса $X(t)$ справедлива теорема

Теорема 4. При условии, что процесс $X(t)$ положительно возвратен по Харрису, предельные стационарные плотности распределения вероятностей его состояний $p(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ существуют и представимы в виде произведения

$$(18) \quad p(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i \leq r} \tilde{p}(\mathbf{n}_i^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(1)}, \mathbf{y}_i^{(1)}) \times \hat{p}(\mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{y}_i^{(2)}),$$

где плотности распределения вероятностей состояний узлов сети для транзитных $\tilde{p}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ и выходящих $\hat{p}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ задаются формулами (17), (7) со значениями интенсивностей сообщений, определяемыми формулами (9), и распределениями длительностей их передачи - соотношениями.

$$B_{ij}^{(1)}(x) = G_{ij}(\mu_i^{(1)} x), \quad j \neq i,$$

$$B_{ii}^{(1)}(x) = \frac{\lambda_{ii}}{\lambda_i^{(2)}} G_{ii}(\mu_i^{(1)} x) + \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_{ji}}{\lambda_i^{(2)}} G_{ji}(\mu_i^{(1)} x),$$

$$B_i^{(2)}(x) = \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_{ji}}{\lambda_i^{(2)}} G_{ji}(\mu_i^{(2)} x).$$

Доказательство. Если процесс $X(t)$ положительно возратен по Харрису, то согласно теории марковских процессов его предельные вероятности состояний существуют, а система уравнений для их плотностей получается, как и ранее, из системы уравнений Колмогорова.

Для удобства записи этой системы уравнений используем, как и ранее, операторы преобразования состояний системы, соответствующие поступлению сообщений A_{ijl} , передаче их с одного уровня на другой $T_{ij}^{(12)}(lm)$, и окончанию обслуживания D_{iil} . Действие этих операторов в рассматриваемом случае отличается от предыдущих и объединяет их описание в разделах 4 и 5. Оператор A_{ijl} добавляет компоненты $x_{ijl}^{(1)}, y_{ijl}^{(1)}$ в наборы (x, y) одновременно, оператор $T_{ij}^{(12)}(lm)$ действует на границе области определения процесса, при обращении компоненты $x_{ijl}^{(1)}$ в ноль, удаляет ее и присваивает компоненте $x_{jm}^{(2)}$ значение времени передачи сообщения, соответствующее значению $y_{ijl}^{(1)}$ с сохранением его объема, т.е. в соответствии с соотношением $\mu_i^{(1)} y_{ijl}^{(1)} = \mu^{(2)} x_{jm}^{(2)}$ одновременно удаляя последнюю, оператор $T_{ij}^{(21)}(ml)$ действует аналогично при переходе сообщения со второго на первый уровень, наконец оператор D_{iil} удаляет компоненту $x_{iil}^{(1)}$ со значением ноль.

Заметим, кроме того, что уравнения Колмогорова имеют место в области допустимых значений процесса, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{ijl}^{(1)} \leq y_{ijl}^{(1)} < \infty, \quad l = \overline{1, n_{ij}^{(1)}}, \quad j \neq i, \quad i, j = \overline{1, r}, \\ 0 \leq x_{iil}^{(1)} < \infty, \quad l = \overline{1, n_{ii}^{(1)}}, \quad i = \overline{1, r} \\ 0 \leq x_{jil}^{(2)} \leq y_{jil}^{(2)} < \infty, \quad l = \overline{1, n_j^{(2)}}, \quad j = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

На границах этой области

$$x_{ijl}^{(1)} = y_{ijl}^{(1)}, \quad l = \overline{1, n_{ij}^{(1)}} \quad j \neq i, \quad i, j = \overline{1, r},$$

и

$$x_{jm}^{(2)} = y_{jm}^{(2)}, \quad m = \overline{1, n_j^{(2)}} \quad j = \overline{1, r},$$

соответствующих поступлению сообщений и их переход с одного уровня на другой, одновременно изменяются две координаты процесса, что необходимо учитывать с помощью специальных граничных условий. Однако, используя, как и ранее, δ - функции Дирака, мы включим эти граничные условия в общую систему уравнений.

Заметим, кроме того, что в приводимых ниже уравнениях учитывается связь (1) между распределениями объемов сообщений и длительностями их передачи. С использованием введенных операторов и с учетом сделанных замечаний уравнения равновесия для стационарных плотностей вероятностей процесса $X(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
(19) \quad & - \sum_{i,j,l} \frac{1}{n_i^{(1)}} \frac{\partial p(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_{ijl}^{(1)}} - \frac{1}{n^{(2)}} \sum_{j,m} \frac{\partial p(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_{jlm}^{(2)}} + \lambda p(\mathbf{n}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\
& = \sum_{i,j,l} \frac{\lambda_{ij}}{n_{ij}^{(1)}} p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_{ij}^{(1)}, A_{ijl}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) g_{ij}(\mu_i^{(1)} y_{ijl}^{(1)}) \delta(y_{ijl}^{(1)} - x_{ijl}^{(1)}) + \\
& + \sum_{i,j \neq i,l,m} \frac{1}{(n_i^{(1)} + 1) n_j^{(2)}} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{ij}^{(1)} - \mathbf{e}_j^{(2)}, (T_{ij}^{(12)}(lm))^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \delta(y_{jlm}^{(2)} - x_{jlm}^{(2)}) + \\
& + \sum_{j,l,m} \frac{1}{n_{jj}^{(1)} (n^{(2)} + 1)} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j^{(2)} - \mathbf{e}_{jj}^{(1)}, (T_j^{(21)}(ml))^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \delta(y_{jjl}^{(1)} - x_{jjl}^{(1)}) + \\
& + \sum_{i,l} \frac{1}{n_i^{(1)} + 1} p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_{ii}^{(1)}, D_{iil}^{-1}(\mathbf{x})).
\end{aligned}$$

Аргументация относительно вывода этих уравнений аналогична изложенной в разделах 4, 5, и мы ее опускаем. Непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение (18) удовлетворяет этой системе уравнений.

Распределение вероятностей макросостояний для этой системы получается, как и ранее, интегрированием по переменным (x, y) и имеет вид (10), совпадающий с распределением вероятностей для системы с независимыми длительностями передачи сообщений.

Переход к выражениям для распределения вероятностей через распределения объемов сообщений осуществляется, как и ранее, простой заменой переменных.

Этот результат помимо возможности декомпозиции сети показывает также, что дисциплина разделения времени обеспечивает нечувствительность стационарного распределения вероятностей макросостояний системы не только к виду законов распределения длительностей обслуживания, но также, в некотором смысле, к структуре процессов обслуживания.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье, которая является первой частью работы, посвященной проблемам декомпозиции сложных систем, приводится обобщение мультипликативного представления для стационарных вероятностей состояний сети массового обслуживания на случай зависимых длительностей передачи сообщений по каналам, который в действительности имеет место в реальных сетях передачи данных. Именно: предполагается, что сообщения имеют случайные объемы, которые, однако, остаются неизменными в процессе их передачи по сети, а длительности их передачи на различных каналах зависят от скорости последних и пропорциональны этим объемам. Полученные результаты позволяют рассчитывать различные характеристики производительности сетей в процессе их проектирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рыков В. В. О декомпозиции иерархических информационно-вычислительных сетей. Вестник РУДН, 1997 (в печати)
- [2] Храмцов П. Лабиринт Internet. 000 "Электроинформ", 1996.
- [3] Kleinrock L. Queueing systems. V. 1: Theory, John Wiley & Sons. New York, 1975
- [4] Kleinrock L. Queueing systems. V. 2: Computer Applications. John Wiley & Sons. New York, 1976
- [5] Шварц М. Сети связи: протоколы, моделирование и анализ. М.: "Наука", 1992.
- [6] Бочаров П.П., Башарин Г.П., Коган А.Я. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. М.: "Наука", 1989.
- [7] Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и применения к сетям ЭВМ. М.: Радио и связь. 1988.
- [8] Jackson J.R. Networks of waiting lines. Operat. Res., V. 5 (1957), N 4, pp. 518-521.
- [9] Jackson J.R. Job Shop-like Queueing Systems. Manag. Sci. V 10 (1963), N 1, pp. 131-142.
- [10] BaskeU F., Chandy K.H, Muntz R.R., Falacios F.G. Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers. J. of ACM, V. 22 (1975), No 22, pp. 248-260.
- [11] Башарин Г.П., Толмачев А.Л. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем. Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Метем, статистика. Теоретич. киберн. М.: ВИНТИ. Т. 21, 1983, 3-120.
- [12] Bahama S. Properties and analysis of queueing network models with finite capacities. Performance'93. Rome, Springer-Verlag, 1993.
- [13] Kelly F.F. Reversibility and Stochastic Networks. John Wiley & Sons. Chichester, U.K., 1979.
- [14] Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Математические вопросы теории сетей с очередями. Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Метем, статистика. Теоретич. киберн. Т. 26, с. 3-97. М.: ВИНТИ, 1988.
- [15] Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989.
- [16] Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966.

GENERALIZED BIRTH & DEATH PROCESSES AS DEGRADATION MODELS

Vladimir Rykov, (Moscow, Russia)

Abstract

To model degradation processes in technical and biological objects generalized birth and death processes are introduced and studied.

1 Introduction and Motivation

Traditional studies of technical and biological objects reliability mainly deals with their reliability function and steady state probabilities for renewable systems. Nevertheless, because there are no infinitely long living objects and any repair is possible only from the state of partial failure, the modelling of degradation process during a life period of an object is a mostly interesting topic. From the mathematical point of view the degradation during object's life period can be described by the Birth & Death (B & D) type process with absorbing state. For this process the conditional state probability distribution given object's life period is a mostly interesting characteristic.

During last years an intensive attention to the aging and degradation models for technical and biological objects has been attracted. The organization of special scientific conferences devoted to this topics testifies it. The aging and degradation models suppose the study of the systems with gradual failures for which multi-state reliability models were elaborated (for the history and bibliography see, for example, [1]). In [2] - [5] the model of complex hierarchical system was proposed and the methods for its steady state and time dependent characteristics investigation was done. Controllable fault tolerance reliability systems were considered in [6] - [8]. In the present paper a generalized B & D process as a model for degradation and aging process for technical and biological objects is proposed. Conditional state probabilities given object's life period and their limiting values when $t \rightarrow \infty$ are calculated. The variation of the model parameters allows to consider various problems of aging and degradation control. Some simple example illustrate our approach.

2 A General Degradation Model

Most of up-to-date complex technical systems also as biological objects with sufficiently high organization during their life period pass over different states of evolution and existence. From reliability point of view these states can be divided into three groups: the states of normal functioning, the dangerous (degradation) states and the failure states, see fig.1, at which the states are denoted by the letter s , normal, degradation and failure states are joined into the sets N , D , and F respectively, and possible transitions are shown with arrows.

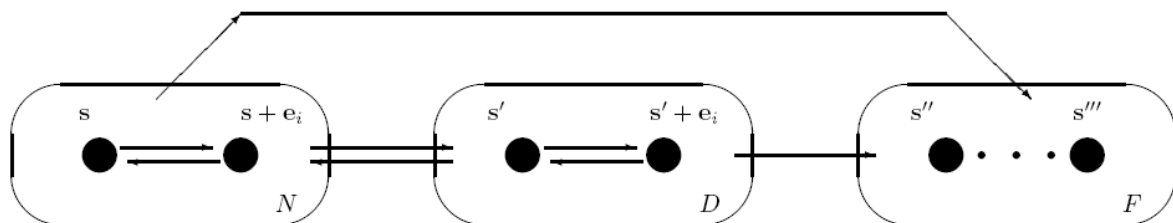


Fig. 1. The structure of the degradation process.

In the simplest case if the nature of the degradation process allows to completely order the states to admit the transition possibilities only to neighboring states it can be modelled by the process of B & D type.

¹The paper was partially supported by the RFFI Grant No. 04-07-90115.

3 Generalized Birth & Death Process

3.1 Definition. Basic Equalities

Suppose that the states of the object are completely ordered, its transitions only into neighboring states are possible, and their intensities depend on the time spend in the present state. Consider firstly the general case of the process with denumerable set of states $E = \{1, 2, \dots\}$. To describe the object behavior by a Markov process let us introduce an enlarged states space $\mathcal{E} = E \times [0, \infty)$ and consider two dimensional process $Z(t) = \{S(t), X(t)\}$, where the first component $S(t) \in E$ shows the object's state, and the second one $X(t) \in [0, \infty)$ denotes the time spent in the state since the last entrance into it. Denote by $\alpha_i(x)$ and $\beta_i(x)$ ($i \in E$) the transition intensities from the state i to the states $i + 1$ and $i - 1$ accordingly under the condition that the time spent at the state i equals to x .

Remark. If the stay time at the state i is considered as a minimum of two independent random variables (r.v): time A_i till to transition into the "next" state $i + 1$ and time B_i till to transition into the "previous" state $i - 1$ with cumulative distribution functions (c.d.f.) $A_i(x)$, $B_i(x)$, probability density functions (p.d.f.) $a_i(x)$, $b_i(x)$, and mean values $a_i = \int [1 - A_i(x) dx]$, $b_i = \int [1 - B_i(x)] dx$, then the introduced process can be considered as a special case of semi-Markov process (SMP) [9], with conditional transition p.d.f.'s $\alpha_i(x)$ $\beta_i(x)$,

$$\alpha_i(x) = \frac{a_i(x)}{1 - A_i(x)}, \quad \beta_i(x) = \frac{b_i(x)}{1 - B_i(x)}.$$

The c.d.f. of the stay time at the state i for this process equals

$$Q_i(x) = 1 - (1 - A_i(x))(1 - B_i(x)),$$

and the elements of semi-Markov matrix are

$$Q_{ii+1}(x) = \int_0^x a_i(u)(1 - B_i(u))du, \quad Q_{ii-1}(x) = \int_0^x b_i(u)(1 - A_i(u))du.$$

Nevertheless, the given formalization open the new possibilities for the investigations and moreover in the degradation models we are studying the conditional probability state distribution on given life period, that did not investigated previously.

Denote by $\pi_i(t, x)$ the p.d.f. of the process $Z(t)$ at time t ,

$$\pi_i(t, x)dx = \mathbf{P}\{S(t) = i, x \leq X(t) < x + dx\}.$$

These functions satisfy to the Kolmogorov's system of differential equations

$$\frac{\partial \pi_i(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \pi_i(t, x)}{\partial x} = -(\alpha_i(x) + \beta_i(x))\pi_i(t, x), \quad 0 \leq x \leq t < \infty, \quad i \in E \quad (1)$$

with the initial and boundary conditions

$$\begin{cases} \pi_1(t, 0) = \delta(t) + \int_0^t \pi_2(t, x)\beta_2(x)dx, \\ \pi_i(t, 0) = \int_0^t \pi_{i-1}(t, x)\alpha_{i-1}(x)dx + \int_0^t \pi_{i+1}(t, x)\beta_{i+1}(x)dx, \quad i \in E. \end{cases} \quad (2)$$

In the following we will suppose the process to be non reducible, non degenerated, i.e. it is defined over all time axis. Sufficient condition for non reducibility is

$$a_i b_i > 0 \quad \text{for all } i \in E.$$

To avoid degeneration of the process it is needed, first of all, to eliminate instant states. For this we suppose that the process possesses the *regularity* property,

$$A_i(0) < 1, \quad B_i(0) < 1 \quad \text{for all } i \in E.$$

Nevertheless, the absence of instant states does not yet guarantee non-degeneration of the process because of the possibility of jumps accumulating during the finite time interval, so that the process "can go to infinity" for the finite time interval. One of possible conditions for the non-reducible SMP without instant states to be non-degenerated is the recurrence of its embedded Markov chain [9]. But this conditions are hardly checked

for general random walk in terms of its parameters. Therefore, we will use more strong, nevertheless very applicable sufficient condition for the process non-degenerateness. It is the condition of *strong regularity*: there exist constants $c > 0$ and $\epsilon > 0$ such, that

$$\mathbf{P}\{A_i > c\} = 1 - A_i(c) > \epsilon, \quad \text{and} \quad \mathbf{P}\{B_i > c\} = 1 - B_i(c) > \epsilon \quad \text{for all } i \in E.$$

The proof of sufficiency of the strong regularity of SMP for its non-degenerateness can be found, for example, in [10], [11].

For the non reducible, non degenerated generalized B & D process the Kolmogorov's system of equations (1) with initial and boundary conditions (2) has a unique solution over all time axis. To find it we use the method of characteristics. Accordingly to [14] the characteristics of this system satisfied to the system of equations

$$dt = dx = -\frac{d\pi_i}{(\alpha_i(x) + \beta_i(x))\pi_i}, \quad i \in E.$$

Thus, two first integrals for the system (1) are

$$t - x = C_1, \quad \frac{\pi_i(t, x)}{(1 - A(x))(1 - B(x))} = C_2.$$

This means that at the line $t - x = u$ the functions $\pi_i(t, x)$ ($i \in E$) have the form

$$\pi_i(t, x) = g_i(t - x)(1 - A_i(x))(1 - B_i(x)), \quad 0 \leq x \leq t < \infty, \quad i \in E, \quad (3)$$

where the functions $g_i(t)$ in accordance with the initial and boundary conditions (2) satisfy to the system of equations

$$\begin{cases} g_1(t) = \delta(t) + \int_0^t g_2(t-x)(1 - A_2(x)b_2(x))dx, \\ g_i(t) = \int_0^t g_{i-1}(t-x)a_{i-1}(x)(1 - B_{i-1}(x))dx + \\ \quad + \int_0^t g_{i+1}(t-x)(1 - A_{i+1}(x)b_{i+1}(x))dx, \quad i = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

The form of these equations shows that their solution should find in terms of its Laplace transforms (LT's). Therefore by passing to the LT's with respect to both variables into relations (3) after the change of the integration order one can get

$$\tilde{\pi}_i(s, v) \equiv \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t e^{-vx} \pi(t, x) dx dt = \tilde{g}_i(s) \tilde{\gamma}_i(s + v), \quad (5)$$

where $\tilde{g}_i(s)$ are the LT of the functions $g_i(t)$, and the functions $\tilde{\gamma}_i(s)$ are

$$\tilde{\gamma}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} (1 - A_i(t))(1 - B_i(t)) dt.$$

From the other side by passing to the LT's with respect to variable t in the system (4) one get

$$\begin{cases} \tilde{g}_1(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st} g_1(t) dt = 1 + \tilde{g}_2(s) \tilde{\psi}_2(s), \\ \tilde{g}_i(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st} g_i(t) dt = \tilde{g}_{i-1}(s) \tilde{\phi}_{i-1}(s) + \tilde{g}_{i+1}(s) \tilde{\psi}_{i+1}(s), \quad i = 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (6)$$

where the functions $\tilde{\phi}_i(s)$ and $\tilde{\psi}_i(s)$ are given by the relations

$$\tilde{\phi}_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx} a_i(x)(1 - B_i(x)) dx, \quad \tilde{\psi}_i(s) = \int_0^\infty (1 - A_i(x)) b_i(x) dx, \quad i \in E.$$

The relations (6) can be presented as a system of equations with respect to unknown functions $\tilde{g}_i(s)$

$$\begin{cases} \tilde{g}_1(s) - \tilde{g}_2(s) \tilde{\psi}_2(s) = 1, \\ -\tilde{g}_{i-1}(s) \tilde{\phi}_{i-1}(s) + \tilde{g}_i(s) - \tilde{g}_{i+1}(s) \tilde{\psi}_{i+1}(s) = 0, \quad i = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (7)$$

The closed form solution of this system in general case even in the simplest case of usual B & D process does not possible.

In the case of finite number $n + 1$ of states in the above system one should put $\tilde{\phi}_{n+1}(s) = 0$.

In spite of the above equations does not possible to solve in closed form they provide calculation different characteristics of the process. Consider some of them.

3.2 Stationary probability distribution

For calculation of the process $Z(t)$ macro-states stationary probabilities

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \pi(t, x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g_i(t-x)(1-A_i(x))(1-B_i(x)) dx$$

we use the connection between asymptotic behavior of functions at infinity and their LT's at zero. Letting $\tilde{\gamma}(0) = \gamma$ and taking into account that accordingly to (5) $\tilde{\pi}_i(s) = \tilde{\pi}_i(s, 0)$, we find

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{\pi}_i(s) = \gamma \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{g}_i(s).$$

Thus, for the problem solution it is necessary to calculate the values

$$g_i = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{g}_i(s),$$

for what we use recursive relations (6). By multiplying equalities in these relations by s , and by passing to limit when $s \rightarrow 0$ from these recursive relations we get

$$\begin{cases} g_1 &= g_2 \psi_2, \\ g_i &= g_{i-1} \phi_{i-1} + g_{i+1} \psi_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (8)$$

where the following notations $\phi_i = \tilde{\phi}_i(0)$, $\psi_i = \tilde{\psi}_i(0)$ were used. Taking into account that $\phi_i + \psi_i = 1$, rewrite the last expressions in the form

$$g_i(\phi_i + \psi_i) = g_{i-1} \phi_{i-1} + g_{i+1} \psi_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots,$$

that can be transformed to the following ones

$$g_i \phi_i - g_{i+1} \psi_{i+1} = g_{i-1} \phi_{i-1} - g_i \psi_i, \quad i = 2, 3, \dots$$

Now put $\psi_1 = 0$ (because this value does not defined) and remark that from (8) it follows $g_1 \phi_1 - g_2 \psi_2 = 0$. Then from the last recursive relation we find

$$g_i \phi_i - g_{i+1} \psi_{i+1} = g_1 \phi_1 - g_2 \psi_2 = 0, \quad i = 2, 3, \dots$$

The last relation allows to calculate recursively coefficients g_i in the form

$$g_i = \frac{\phi_{i-1}}{\psi_i} g_{i-1} = \dots = \left(\prod_{1 \leq j \leq i} \frac{\phi_{j-1}}{\psi_j} \right) g_1.$$

Therefore, the stationary probabilities equal

$$\pi_i = \gamma_i G_i g_1, \quad \text{where} \quad G_1 = 1, \quad G_i = \prod_{1 \leq j \leq i} \frac{\phi_{j-1}}{\psi_j}, \quad i = 2, 3, \dots \quad (9)$$

With the help of normalizing condition $\sum_{i \in E} \pi_i$ we find

$$g_1 = \left(\sum_{1 \leq i < \infty} \gamma_i G_i \right)^{-1} \quad (10)$$

Thus, the convergence of the series

$$\sum_{1 \leq i < \infty} \gamma_i \prod_{1 \leq j \leq i} \frac{\phi_{j-1}}{\psi_j} < \infty \quad (11)$$

is the condition for the stationary regime existence. The same result can be obtained by methods of the SMP theory [9]. We formulate these results as a Theorem.

Theorem 1. *For the generalized B&D process stationary regime existence it is sufficient the convergence of the series (11). In this case the stationary probabilities are given by the formulas (9, 10). ♡*

Moreover, from the form of stationary probabilities it follows the next important corollary

Corollary. *The macro-states stationary probabilities of generalized B&D process are insensitive to the shape of distributions $A_i(x)$, $B_i(x)$ and depend on r.v. A_i , B_i and their distributions only by means of probabilities of jumps embedded random walk up and down and mean time of the process stay in the given state,*

$$\phi_i = \mathbf{P}\{A_i \leq B_i\}, \quad \psi_i = \mathbf{P}\{A_i > B_i\}, \quad \text{and} \quad \gamma_i = \mathbf{E}[\min A_i, B_i]. \quad \heartsuit \quad (12)$$

For the process with finite number of states $n+1$ in the Kolmogorov's system of equations (1) one should put $\alpha_{n+1}(x) \equiv 0$. In this case the stationary probabilities have the same form (9), but the normalizing constant (10) should be changed by

$$g_1 = \left(\sum_{1 \leq i \leq n+1} \gamma_i G_i \right)^{-1}.$$

In the case of exponential distributions $A_i(x) = 1 - e^{-\alpha_i x}$ and $B_i(x) = 1 - e^{-\beta_i x}$ one get

$$\phi_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}, \quad \psi_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i}$$

and the substitution of these expressions into the formulas (9) reduce their to the stationary probabilities of the usual B & D process.

3.3 Distribution of the process states on life period

For many phenomena especially for degradation processes more appropriate is absorbing process model. For the generalized B&D process with absorbing state $n+1$ in the Kolmogorov's system of equations (1) one should put $\alpha_{n+1}(x) = \beta_{n+1}(x) \equiv 0$. In this case the equation for the function $\pi_{n+1}(t)$ takes the form

$$\frac{\partial \pi_{n+1}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \pi_{n+1}(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

with the initial and boundary condition

$$\pi_{n+1}(t, 0) = \int_0^t \pi_n(t-x) \alpha_n(x) dx. \quad (14)$$

Thus, all functions $\pi_i(t, x)$ ($i = \overline{1, n}$) have the same solution (3) as before. But the function $\pi_{n+1}(t, x)$ is a constant over the characteristics, which are determined by the equations

$$-\frac{d\pi_{n+1}}{\pi_{n+1}} = dt = dx.$$

This means that

$$\pi_{n+1}(t, x) = g_{n+1}(t - x),$$

and from the boundary conditions (14) it follows that

$$g_{n+1}(t) = \int_0^t g_n(t-x) \alpha_n(x) (1 - B_n(x)) dx.$$

The solution $\pi_i(t)$ of the system of equations (1, 13, 14) gives the probability of the object stay in some state jointly with its life period T ,

$$\pi_i(t) = \mathbf{P}\{S(t) = i, t < T\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

For the degradation problems investigation more useful and adequate characteristic is the conditional state probability distribution on given object's life period

$$\bar{\pi}_i(t) = \mathbf{P}\{S(t) = i | t < T\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

From the above it follows that for $\bar{\pi}_i(t)$ the following representation is true

$$\bar{\pi}_i(t) = \mathbf{P}\{S(t) = i | t < T\} = \frac{\pi_i(t)}{R(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

where $R(t)$ is the reliability (survival) function of the object, for which the following representation takes place

$$R(t) = 1 - \pi_{n+1}(t).$$

For the LT of the function $\pi_{n+1}(t)$ one can find

$$\tilde{\pi}_{n+1}(s) = \tilde{\tilde{\pi}}_{n+1}(s, 0) = \frac{1}{s} \tilde{g}_{n+1}(s) = \frac{1}{s} \tilde{g}_n(s) \tilde{\phi}_n(s). \quad (15)$$

Therefore, for the LT $\tilde{R}(s)$ of the reliability function $R(t) = 1 - \pi_{n+1}(t)$ one has

$$\tilde{R}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \tilde{g}_n(s) \tilde{\phi}_n(s) = \frac{1}{s} (1 - \tilde{g}_n(s) \tilde{\phi}_n(s)).$$

We will calculate the probability distribution of the object states conditionally given life period in terms of their LT's. It follows from the relation (5) that the LT's $\tilde{\pi}_i(s) = \tilde{\tilde{\pi}}_i(s, 0)$ of the macro-states probabilities $\pi_i(t)$ have the form

$$\tilde{\pi}_i(s) = \tilde{g}_i(s) \tilde{\gamma}_i(s). \quad (16)$$

From the initial and boundary conditions it follows that the functions $\tilde{g}_i(s)$ satisfy to the system of equations (7) for $i = 1, 2, \dots, n$ and

$$\tilde{g}_{n+1}(s) = \tilde{g}_n(s) \tilde{\phi}_n(s).$$

The solution of these equations can be done in terms of Kramer's rule, and it can help to find the limits of the conditional probability states given life period.

To calculate their we should evaluate the asymptotic behavior of the functions $\pi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) and $R(t)$ when $t \rightarrow \infty$. We will do that with the help of their LT. Denote by $\Delta(s)$ the determinant of the matrix of coefficients of n first equations of the system (7) and by $\Delta_i(s)$ the determinant of the same matrix in which i -th column is changed by the vector-column of the equation right side (vector e_n). Then taking into account the expression (16) and the solution of the system (7) in terms of the Kramer's rule we get

$$\begin{cases} \tilde{\pi}_i(s) &= \tilde{\gamma}_i(s) \tilde{g}_i(s) = \tilde{\gamma}_i(s) \frac{\Delta_i(s)}{\Delta(s)} \quad (i = \overline{1, n}), \\ \tilde{\pi}_{n+1}(s) &= \frac{\tilde{\phi}_n(s)}{s} \tilde{g}_n(s) = \frac{\tilde{\phi}_n(s) \Delta_n(s)}{s \Delta(s)}. \end{cases}$$

Theorem 2. *Asymptotical behavior of the functions $\pi_i(t)$ and $R(t)$ when $t \rightarrow \infty$ coincide and is determined by the maximal non-zero root s_1 of the characteristic equation $\Delta(s) = 0$. This provide the existence of the limit*

$$\tilde{\pi}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\pi}_i(t) = \frac{\tilde{\pi}_i(s_1)}{\tilde{R}(s_1)}.$$

Proof. Since the functions $\tilde{\pi}_i(s)$ are analytical in right half-plane, then accordingly to the inverse LT formula the behavior of their originals are determined by their singularities in the left half-plane [16]. Denote by s_1 the maximal non-zero root of the characteristic equation $\Delta(s) = 0$, and suppose that in it neighboring the function $\Delta(s)$ has a pole of the first order. Then the asymptotic behavior of the functions $\pi_i(t)$ when $t \rightarrow \infty$ are determined by the value s_1 of maximal root of the characteristic equation, and the coefficients in it are determined by the residuals of the functions $\tilde{\pi}_i(s)$ at this point. Therefore to find the limit of the functions $\tilde{\pi}_i(t)$ it is necessary to compare the asymptotic behavior of the functions $\pi_i(t)$ and $R(t)$ and to show that their asymptotic behavior when $t \rightarrow \infty$ are coincide.

From the relation (15) for the function $\tilde{\pi}_{n+1}(s)$ it follows that it can be represented in the form

$$\tilde{\pi}_{n+1}(s) = \frac{1}{s} \tilde{g}_n(s) \tilde{\phi}_n(s) = \frac{\tilde{\phi}_n(s) \Delta_n(s)}{s \Delta(s)} = \frac{B}{s} + \frac{\Delta_R(s)}{\Delta(s)}$$

with some coefficient B and some function $\Delta_R(s)$. Let us show that the coefficient B equals to one, $B = 1$. Really, from the definition it follows that

$$B = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{\pi}_{n+1}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\phi}_n(s) g_n(s) = \tilde{\phi}_n g_n(0) = \tilde{\phi}_n \frac{\Delta_n(0)}{\Delta(0)}.$$

Consider the matrix $\Psi'(s)$ of coefficients of the n first equations of the system (7), denote by $\Psi'_n(s)$ the matrix, obtained from this one by changing its last column by the right hand side equation vector (vector $\vec{e}_n$), put $\Psi' = \Psi'(0)$, $\Psi'_n = \Psi'_n(0)$ and consider the matrix

$$\Psi' - \phi_n \Psi'_n.$$

Since elements of matrix Ψ' are the transition probabilities of absorbing random walk, that is $\phi_i + \psi_i = 1$, then the sum of rows of the matrix Ψ' without its last elements are equal to the zero row. Because the matrix Ψ'_n differs from Ψ' only with the last column, thus the sum of rows of the matrix $\Psi' - \phi_n \Psi'_n$ without elements of its last column are also zero row. Consider now the elements of the last column. At the first place in it is an element $-\phi_n$, at the before last one is an element $-\psi_n$, and at the last one is an element $1 = \phi_n + \psi_n$. Thus, the rows of the matrix $\Psi' - \phi_n \Psi'_n$ are linearly dependent, and, therefore, its determinant equals to zero. It follows from this fact that $\phi_n \Delta_n(0) = \Delta(0)$ and consequently $B = \frac{\phi_n \Delta_n(0)}{\Delta(0)} = 1$. At least it follows from that that LT $\tilde{R}(s)$ of the reliability function $R(t)$ is presented in the form

$$\tilde{R}(s) = \frac{\Delta_R(s)}{\Delta(s)}.$$

Thus, the asymptotic behavior of the reliability function $R(t)$ when $t \rightarrow \infty$ also as all others functions $\pi_i(t)$ is determined by the maximal root s_1 of the characteristic equation $\Delta(s) = 0$. In this case the coefficients in asymptotic representation of the functions $\pi_i(t)$ and $R(t)$ when $t \rightarrow \infty$ are the residuals of the functions $\tilde{\pi}_i(s)$ and $\tilde{R}(s)$ at the point $s = s_1$,

$$A_{i1} = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \tilde{\pi}_i(s) = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \gamma_i(s) \frac{\Delta_i(s)}{\Delta(s)} = \frac{\gamma_i(s_1) \Delta_i(s_1)}{\dot{\Delta}(s_1)};$$

$$A_{R1} = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \tilde{R}(s) = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \frac{\Delta_R(s)}{\Delta(s)} = \frac{\Delta_R(s_1)}{\dot{\Delta}(s_1)}.$$

Therefore, when $t \rightarrow \infty$ there exists the limit

$$\bar{\pi}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_i(t)}{R(t)} = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\tilde{\pi}_i(s)}{\tilde{R}(s)} = \frac{\tilde{\pi}_i(s_1)}{\tilde{R}(s_1)} = \frac{\gamma_i(s_1) \Delta_i(s_1)}{\Delta_R(s_1)} = \frac{A_{i1}}{A_{R1}}. \quad \heartsuit$$

4 An Example

To illustrate the above results let us consider a system with only three states, which can be considered as an example of the aggregated states model (see [5], [12]), where all states of each group: normal functioning N , degradation D , and failure F are joined into one. Suppose for the simplicity that the failures arise in accordance with the Poisson flow, but the repair times are generally distributed with c.d.f. $B(x)$ and the hazard rate $\beta(x)$. Moreover suppose that the direct transition from normal state into the failure state are also possible with intensity γ . The marked transition graph for the process at the figure 2 is presented.

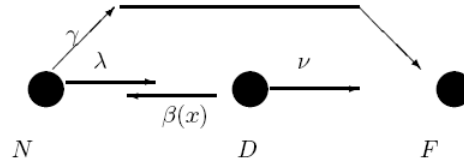


Fig. 2. The marked transition graph of the process with aggregated states.

In accordance with given transition graph the Kolmogorov's system of differential equations for system states probabilities has the form

$$\begin{cases} \frac{d\pi_N(t)}{dt} = -(\lambda + \gamma)\pi_N(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_D(t, x)dx, \\ \frac{\partial \pi_D(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \pi_D(t, x)}{\partial x} = -(\nu + \beta(x))\pi_D(t, x), \\ \frac{d\pi_F(t)}{dt} = \gamma\pi_N(t) + \nu\pi_D(t, x) \end{cases} \quad (17)$$

with the initial and the boundary conditions

$$\begin{cases} \pi_D(t, 0) = \lambda\pi_N(t), \\ \pi_N(0) = 1, \quad \pi_D(0, 0) = \pi_F(0) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

The reliability function of the system is

$$R(t) = 1 - \pi_F(t) = 1 - \int_0^t [\gamma \pi_N(u) + \nu \pi_D(u)] du, \quad (19)$$

where the functions $\pi_N(t)$ and $\pi_D(t, x)$ are the solutions of the two first equations of the system (17) and

$$\pi_D(t) = \int_0^t \pi_D(t, x) dx. \quad (20)$$

The solution of the second equation from the system (17) accordingly to (3) can be given in the form

$$\pi_D(t, x) = g_D(t - x)e^{-\nu x}(1 - B(x)),$$

where the function $g_D(t)$ is determined from the boundary condition (18). It gives

$$\pi_D(t, x) = \lambda \pi_N(t - x)e^{-\nu x}(1 - B(x)). \quad (21)$$

Substitution of this solution into the first equation of the system (17) gives the following equation

$$\frac{d\pi_N(t)}{dt} = -(\lambda + \gamma)\pi_N(t) + \lambda \int_0^t \beta(x)\pi_N(t - x)e^{-\nu x}(1 - B(x))dx. \quad (22)$$

The best method for its solution is a LT approach. In the terms of LT with the initial condition (18) an equation (22) after the usual order of integration changing takes the form

$$s\tilde{\pi}_N(s) - 1 = -(\lambda + \gamma)\tilde{\pi}_N(s) + \lambda\tilde{b}(s + \nu)\tilde{\pi}_N(s),$$

where $\tilde{b}(s) = \int_0^\infty e^{-st}b(x)dx$ is a LT of the p.d.f. $b(x)$. It follows from here that the solution of the last equation has a form

$$\tilde{\pi}_N(s) = \left[s + \gamma + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu)) \right]^{-1}. \quad (23)$$

Next, the calculation of the LT $\tilde{\pi}_D(s)$ of the function $\pi_D(t)$, given by the equality (20) after substitution into it of the expression (23) gives

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_D(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t \pi_D(t, x) dx dt = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t \lambda \pi_N(t - x)e^{-\nu x}(1 - B(x)) dx dt = \\ &= \frac{\lambda \tilde{\pi}_N(s)(1 - \tilde{b}(s + \nu))}{s + \nu} = \frac{\lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))}{(s + \nu)(s + \gamma + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu)))}. \end{aligned} \quad (24)$$

At least for the LT $\tilde{\pi}_F(s)$ of the function $\pi_F(t)$ from the last of equations (17) one can find

$$s\tilde{\pi}_F(s) = \gamma\tilde{\pi}_N(s) + \nu\tilde{\pi}_D(s) = \frac{\gamma(s + \nu) + \lambda\nu(1 - \tilde{b}(s + \nu))}{(s + \nu)(s + \gamma + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu)))}. \quad (25)$$

Therefore, for the LT of the reliability function (19) we get

$$\begin{aligned} \tilde{R}(s) &= \frac{1}{s} - \tilde{\pi}_F(s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\gamma(s + \nu) + \lambda\nu(1 - \tilde{b}(s + \nu))}{(s + \nu)(s + \gamma + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu)))} \right] = \\ &= \frac{s + \nu + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))}{(s + \nu)(s + \gamma + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu)))}. \end{aligned} \quad (26)$$

From the last expression one can find the mean life time of the object

$$m_F = \tilde{R}(0) = \frac{\nu + \lambda(1 - \tilde{b}(\nu))}{\nu(\gamma + \lambda(1 - \tilde{b}(\nu)))}. \quad (27)$$

For calculation of the limiting values of the conditional state probabilities on life period we use the above procedure, which is based on the connection between asymptotic behavior of the functions $\pi_N(t)$, $\pi_D(t)$, $R(t)$

at infinity and their LT at the neighboring of the maximal non-zeros root of the system characteristic equation $\Delta(s) = 0$. In the considered case the characteristic equation has a form

$$\Delta(s) = (s + \nu)(s + \gamma + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))) = 0. \quad (28)$$

One of its roots is $s = -\nu$. The second root is determined by the equation

$$(s + \gamma + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))) = 0$$

or

$$\tilde{b}(s + \nu) = 1 + \frac{s + \gamma}{\lambda}. \quad (29)$$

Since the function $\tilde{b}(s + \nu)$ is a quite monotone one [15], i.e. monotonically decreases, concave upward, takes the value 1 at the point $s = -\nu$ and $\tilde{b}(\nu) < 1 + \frac{\gamma}{\lambda}$, then the equation (29) has a unique negative root, and his value depend on the sign of the difference $\gamma - \nu$. If $\gamma \geq \nu$ the root of this equation, which we denote by s_1 is less than $-\nu$, $s_1 \leq -\nu$. On the other hand if $\gamma < \nu$ the root of this equation s_1 is grater than $-\nu$, $s_1 > -\nu$.

Therefore, when $\gamma \geq \nu$ the maximal root of the equation (29) is $-\nu$, and therefore,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_N &= \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\pi}_N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_N(t)}{R(t)} = \lim_{s \rightarrow -\nu} \frac{\tilde{\pi}_N(s)}{\tilde{R}(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -\nu} \frac{\nu + s}{s + \nu + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))} = \frac{1}{1 + \lambda m_B}; \\ \bar{\pi}_D &= \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\pi}_D(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_D(t)}{R(t)} = \lim_{s \rightarrow -\nu} \frac{\tilde{\pi}_D(s)}{\tilde{R}(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -\nu} \frac{\lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))}{s + \nu + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))} = \frac{\lambda m_B}{1 + \lambda m_B}, \end{aligned} \quad (30)$$

i.e. if the death intensity from the normal state is grater than the death intensity resulting by degradation, then the limiting distribution of the conditional state probabilities is determined by the parameter $\rho = \lambda m_B$.

From another side, under condition $\gamma < \nu$ the greatest root of the characteristic equation (28) is the root of the equation (29), and consequently

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_N &= \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\pi}_N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_N(t)}{R(t)} = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\tilde{\pi}_N(s)}{\tilde{R}(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{s + \nu}{s + \nu + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))} = \frac{s_1 + \nu}{s_1 + \nu + \lambda(1 - \tilde{b}(s_1 + \nu))}; \\ \bar{\pi}_D &= \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\pi}_D(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi_D(t)}{R(t)} = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\tilde{\pi}_D(s)}{\tilde{R}(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))}{s + \nu + \lambda(1 - \tilde{b}(s + \nu))} = \frac{\lambda(1 - \tilde{b}(s_1 + \nu))}{s_1 + \nu + \lambda(1 - \tilde{b}(s_1 + \nu))}. \end{aligned} \quad (31)$$

Therefore, if the death intensity from the normal state is less than the same as a degradation result, then the limiting distribution of the conditional probabilities is strongly depend on the value s_1 of the equation ([?]) root. Note that in the case if direct transitions from the normal state to the failure state are impossible, i.e. when $\gamma = 0$ the second case takes place.

5 Conclusion

Generalized Birth & Death Processes, which are special class of Semi-Markov Processes are introduced for modelling the degradation processes. The special parametrization of the processes allows to give more convenient presentation of the results. The special attention is focused to the conditional state probabilities given life cycle, which are the mostly interesting for the degradation processes.

References

- [1] A. Lisniansky, G. Levitin (2003) *Multi-State System Reliability. Assessment, Optimization and Application*. World Scientific. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 358p.

- [2] B. Dimitrov, V. Rykov, P. Stanchev (2002) On Multi-State Reliability Systems. In: *Proceedings MMR-2002*. Trondheim (Norway) June 17-21, 2002.
- [3] V. Rykov, B. Dimitrov (2002) On Multi-State Reliability Systems. In: *Applied Stochastic Models and Information Processes*. Proceedings of the International Seminar, Petrozavodsk, Sept. 8-13. Petrozavodsk, 2002, pp. 128-135. See also <http://www.jip.ru/2002-2-2-2002.htm>
- [4] V. Rykov, B. Dimitrov, D. Green Jr., P. Stanchev (2004) Reliability of complex hierarchical systems with fault tolerance units. In: *Proceedings MMR-2004*. Santa Fe (U.S.A.) June, 2004. (Printed in CD).
- [5] B. Dimitrov, D. Green, V. Rykov and P. Stanchev. Reliability Model for Biological Objects. In: *Longevity, Aging and Degradation Models. Transactions of the First Russian-French Conference (LAD-2004)*, Saint Petersburg, June 7-9, 2004, Ed. by V. Antonov, C. Huber, M. Nikulin, V. Polischook, Saint Petersburg State Politechnical University, SPB, 2004. Vol. 2, pp. 230-240.
- [6] V. Rykov, D. Efrosinin. Reliability Control of Fault Tolerance Units. In: *Abstracts of The 4-th International Conference on Mathematical Methods in Reliability (MMR-2004)*, Santa Fe, (USA), 21-25 July, 2004 (Published in CD).
- [7] V. Rykov, D. Efrosinin (2004). Reliability Control of Biological Systems with failures. In: *Longevity, Aging and Degradation Models. Transactions of the First Russian-French Conference (LAD-2004)*, Saint Petersburg, June 7-9, 2004, Ed. V. Antonov, C. Huber, M. Nikulin, V. Polischook, Saint Petersburg State Politechnical University, SPB, 2004. Vol. 2, pp. 241-255.
- [8] V. Rykov, E. Buldaeva. On reliability control of fault tolerance units: regenerative approach. In: *Transactions of XXIV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Modes*, September 10-17, 2004, Jurmala, Latvia. Transport and Telecommunication Institute, Riga, Latvia, 2004.
- [9] V.S. Korolyuk, A.F. Turbin. *Semi-Markov processes and their applications*. Kiev: "Naukova dumka". 1976, 184p. (in Russian)
- [10] D. McDonald. On semi-Markov and semi-regenerative processes. I, II. // *Z. fur Wahrch. verw. Geb.*, 42 (1978), No. 2, pp. 261-377; *Ann. of Prob.*, 6 (1978), No.6, pp. 995-1014.
- [11] J. Jacod. Theorems de renouvellement et classification pour les chaines semi-Markoviennes. // *Ann. inst. Henri Poincare*, sect. B, 7 (1971), No.2, pp.83-129.
- [12] V.S. Korolyuk, A.F. Turbin. *Phase aggregation of complex systems*. Kiev: "Vish shkola". 1978, 108p. (in Russian).
- [13] V.S. Korolyuk, V.V. Korolyuk (1999) *Stochastic Models of Systems*. Kluwer Academic Publishers.
- [14] I.G. Penrovsky. *Lectures on the theory of usual differential equations*. M.-L.: GITTL. 1952, 232p. (in Russian).
- [15] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications V. II* John Wiley & Sons, Inc. N.Y.-Lnd.-Sidney, 1966.
- [16] M. A. Lavrent'ev, B.V. Shabat. *Methods of the theory of complex variable functions*. M.: Phismatgiz. 1958, 678p.

REMINISCENCE ABOUT B.V. GNEDENKO

Igor Ushakov,
(San Diego, USA)

I would like to begin a series of stories with the case, which characterizes Boris Vladimirovich Gnedenko not only as a brilliant scientist and outstanding teacher whom some of us knew him personally and other – from his books and papers, but also as wonderful personality – principal and brave.



B. V. Gnedenko at his working table at home.
(The end of 70th.)

Feat nobody has known about

At the banquet after Doctoral dissertation of A.D. Solov'yev, Andrei Nikolaevich Kolmogorov pronounced a toast in honor of B.V. Gnedenko: "I wish to drink this glass of wine for Boris Vladimirovich who is not only a leader of the Reliability School. I wish to drink for him as for a brave citizen". It was a very unusual speech for Kolmogorov, who was always far from "official" words even with a slight color of the so-called "Soviet patriotism". I decided that something unusual was behind those words, and being unable to silence my curiosity, sat next to Kolmogorov and asked Andrei Nikolaevich what he meant under "brave citizen".

Kolmogorov answered, as usually very short and abruptly: "The matter is, Igor Alexeevich, that Boris in that terrible 1937th saved life to some person..." It was said in such a way that I understood that Kolmogorov by some reason did not like give more detailed explanations...

* * *

Boris Vladimirovich and myself were tied not only by personal contacts. We had a lot of mutual duties: I was his deputy at journal "Reliability and Quality Control", where he was Editor-in-Chief; I was his deputy in Central Consulting Center on Reliability and Quality, where he was Scientific Chair; we have been working together at Editorial board of journal "Engineering Cybernetics (he was a Chair of section "Queueing

Theory and Reliability" and I was Scientific Secretary of the journal); we were members of Editorial Council at "Soviet Radio" publishing House and an at couple of Scientific Councils for Doctoral degrees.



Boris Gnedenko and Igor Ushakov discussing current editorial business. (The end of 70th.)

Thus, at least two-three times a week, I met with Boris Vladimirovich at his home. Those meetings with him were unforgettable: Turgenev-like leisurely conversations "about nothing" with a beautiful classical music on background, and as a result – all business question have been solved!

Maybe, it is kind of a nostalgia born by age, though maybe it is a part of reality: sometimes I believe that such kind of personal contacts have gone forever...

* * *

Once I came in the evening to Boris Vladimirovich but he was late: something kept him at the University. Natalya Konstantinovna, his wife, served a tea, and we were sitting and talking. As usual, a dining table was full of various homemade jams and cookies. Drinking the tea, I told her about the

question I asked Kolmogorov at the banquet and asked her what could that mean.

She told me that in 1937 somebody wrote an anonymous slanderous report on Kolmogorov, saying that he led anti-Soviet propaganda among his pupils. However, KGB pretended to play a “clean” game: they needed confirmation made by somebody in person. Their choice was Boris Gnedenko – the beloved pupil and best personal friend of Kolmogorov.

Gnedenko has been arrested and has been kept in a Lubyanka torture-chamber (Lubyanka was the Head Quarter of the KGB) several months. They did not give him to sleep, directing in his face extremely bright light that made him unconscious and psychically degraded. Nevertheless, Gnedenko did not sign any papers against Kolmogorov they gave him. At last, he was released. Acquisitions against Kolmogorov had been fallen as inconsistent...

Natalya Konstantinovna told me: “Igor, please don’t tell anybody about it: nor Andrei, neither Boris like to remember all this. In addition they don’t like exposing their personal relations to the public”.

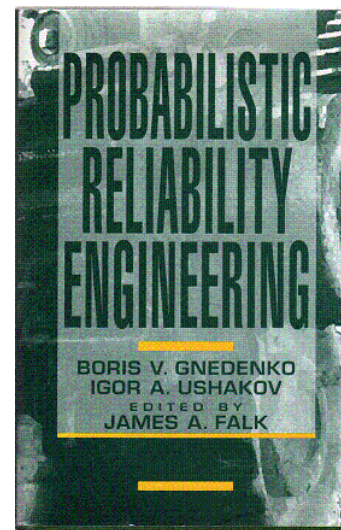
Sure, I would never wrote about it if Boris Vladimirovich did not tell this himself during one of his visit to the USA in 1991, when I arrange his invitation through George Washington University. He was interviewed for journal «Statistical Science»³.

Then once more I heard this story from Gnedenko when he visited American telephone company MCI where I then worked as a consultant.

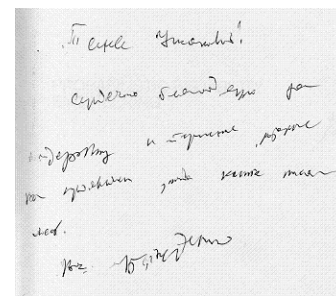
Once we sat with Gnedenko alone, at my apartment in Washington and had a conversation “about life”. Unfortunately, I guessed too late to turn on a tape recorder... Boris Vladimirovich patiently waited when I change tapes. Though I missed his story about his imprisoning, the remaining part of that conversation was extremely interesting. Boris Vladimirovich told me about his first meeting with his future wife, about Kolmogorov, his teacher, and about his pupils – Mikhalevich, Kovalenko, Korolyuk, Skorokhod and others. I remember that I complained that I was not his pupil, and he responded with his soft humor: “However, you are unique inn my experience: you are the only one to whom I was the defender at both scientific defenses – at candidate and doctoral”.

We talked a lot about music and fine art, about our visit to the National Gallery in Washington, where we were recently with him and his son, Dimitri (he accompanied his father in his visits to the USA).

Last time I saw Boris Vladimirovich three months before he died... I was in Moscow and visited him several times. I brought him our first book published in the USA – “*Probabilistic Reliability Engineering*”.



I had a movie camera with me and Gnedenko asked me to record “a letter to Tanya”, my wife who helped us in preparation of the manuscript. Then he signed a copy for her:



“To Tanya Ushakov with gratitude for support and patience, which you showed during the book preparation. Yours Boris Gnedenko”.

It was written by a trembling hand of a deeply ill man who, nevertheless, did not forget to about Good and Love for others. He never saw our second book, “*Statistical Reliability Engineering*”...

³ Statistical Science, 1992, Vol.7, No.2, pp.273-283: N.Singpurwalla & R. Smith “A Conversation with Boris Vladimirovich Gnedenko”.

ВОСПОМИНАНИЯ О БОРИСЕ ВЛАДИМИРОВИЧЕ ГНЕДЕНКО

Игорь Ушаков,
(Сан-Диего, США)

Я хотел бы начать небольшую серию воспоминаний с истории, которая характеризует Бориса Владимировича Гнеденко не только как блестящего ученого и замечательного педагога, которого многие знают по его многочисленным книгам и статьям, но и как удивительную личность – принципиальную и смелую.



Б.В. Гнеденко за своим письменным столом (конец 70-х).

Подвиг, о котором мало кто знает

На банкете после защиты докторской диссертации Александром Дмитриевичем Соловьевым, Андрей Николаевич Колмогоров встал и произнес тост за Гнеденко: «Я хочу выпить этот бокал вина за Бориса Владимировича, который не только лидер школы надежности в нашей стране. Я хочу выпить за него как за смелого гражданина». Подобная речь была довольно необычна для Колмогорова, который всегда был далек от официальных речей с окраской в духе «советского патриотизма». Немного зная Андрея Николаевича, я решил, что что-то необычное кроется за такими его словами. Не будучи в состоянии сдержать свое любопытство, я подсел к Колмогорову и спросил, что означают его слова о «смелом гражданине». Колмогоров ответил, как всегда отрывисто и коротко: «А дело в том, Игорь Алексеевич, что Борис в ужасном 1937-м спас жизнь одного человека ...». Это было сказано так, что я понял, что Андрей Николаевич не склонен пускаться в дальнейшие объяснения.

* * *

У нас с Борисом Владимировичем были очень тесные личные контакты. Мы были прочно завязаны на поприще так называемой общественной работы: я был его замом в журнале «Надежность и контроль качества», где он был

Главным редактором; я был его замом Кабинете надежности и качества, где он был Научным Руководителем; мы вместе были членами редколлегии журнала «Техническая кибернетика» (он был руководителем раздела «Надежность и массовое обслуживание», а я был Ответственным секретарем журнала); мы оба были членами Редсовета издательства «Радио и связь», а также заседали в одном и том же Ученом Совете по защите докторских диссертаций.

Так что мы виделись с ним два, а то и три раза на неделе у него дома. Эти встречи для меня незабываемы: в несколько, я бы сказал, по-тургеневски неторопливой манере мы разговаривали, казалось бы ни о чем; его кабинет был напоен негромкими чарующими звуками классической музыки... Вечер проходил незаметно и безо всякого напряжения, а в результате – все дела оказывались сделанными!



Борис Владимирович и автор за обсуждением очередных редакционных дел в (фото конца 70-х).

Может быть, во мне говорит ностальгия, порожденная возрастом, а может, это и часть нашей нынешней реальной жизни: иногда мне кажется, что такого рода личные

контакты канули в вечность в нашем суетном и вечно спешащем куда-то мире...

* * *

Однажды я пришел к Борису Владимировичу, когда тот еще не вернулся с кафедры. Наталия Константиновна, его жена, накрыла на стол, как всегда, уставив его различными домашними вареньями и печеньями, и мы сели чаевничать. За чаем я рассказал Наталии Константиновне о моем вопросе Колмогорову и о его ответе и спросил, не знает ли она, что это могло бы значить.

Она рассказала мне, что в 37-м кто-то написал клеветническое анонимное письмо на Колмогорова, где сообщалось, что тот ведет антисоветскую пропаганду среди студентов. Иногда НКВД делало вид, что они играют «в чистую игру»: они собирали подтверждения фактов» от людей из окружения оклеветанного. Их выбор пал на Бориса Владимировича — любимого ученика и друга Колмогорова.

Гнеденко был арестован и его продержали в застенках НКВД несколько месяцев. Они не давали ему спать по несколько дней кряду, светили в глаза яркими юпитерами, что доводило его до бессознательного состояния. Однако, Борис Владимирович не подписал ни одной подсовываемой ему бумаги, компрометирующей Колмогорова. В конце концов, его вынуждены были выпустить, а обвинения против Колмогорова были сняты как несостоятельные.

Наталия Константиновна сказала мне: «Игорь, пожалуйста, не рассказывайте об этом никому: ни Андрей, ни Борис не любят вспоминать об этом. К тому же они не любят афишировать на публике своих отношений друг с другом».

Конечно, я бы никогда и не написал об этом, если бы Борис Владимирович не рассказал обо всем впервые сам во время своего визита в США в 1991 году, когда я устроил ему приглашение через Университет Дж. Вашингтона, в котором в то время преподавал. Интервью с ним опубликовано в журнале «Statistical Science»⁴.

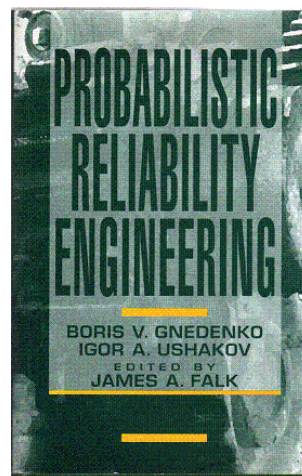
Затем еще раз я слышал эту историю от Бориса Владимировича, когда он посетил с визитом американскую телекоммуникационную компанию Эм-Си-Ай, с которой я тогда сотрудничал.

Однажды мы остались у меня дома в Вашингтоне одни и разговорились, что называется, «за жизнь». К сожалению, я догадался включить магнитофон поздно: «тюремную историю» я пропустил. Но остальная часть беседы — и очень интересная — попала на пленку. Борис Владимирович рассказывал о своей встрече со своей будущей женой, о первых годах их совместной жизни, о рождении сыновей, о своей дружбе с Колмогоровым, о своих учениках В.С. Михалевиче, И.Н. Коваленко, В.С. Королюке, А.В. Скороходе и других. Я помню, что пожалел, что никогда не был его учеником, а что он ответил с мягким юмором: «Ну, Игорь (последние годы он называл меня просто по имени), Вы у меня на особом

месте: я ведь ни у кого, кроме Вас, не был оппонентом дважды — на кандидатской и на докторской диссертациях».

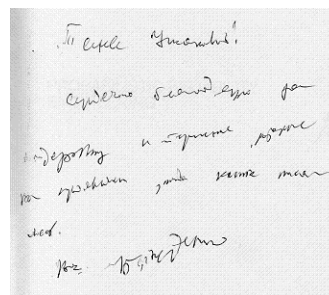
Мы много говорили о музыке, о живописи, о нашем недавнем посещении Национальной галереи в Вашингтоне с ним и с Дмитрием (во время обоих визитов в США он сопровождал отца).

Последний раз я видел Бориса Владимировича месяца за три до его смерти. Я приехал в Москву и во время пребывания там несколько раз заезжал к Гнеденкам. Я привез ему несколько экземпляров только что вышедшей в США первой из написанных нами вместе книг — «Probabilistic Reliability Engineering».



Борис Владимирович был очень слаб, но как всегда, радужен. Он был рад книге, спрашивал, как дела со следующей нашей книгой

У меня была с собой кинокамера. Когда я снимал Бориса Владимировича, то он попросил меня записать письмо для Тани, моей жены, которая помогала нам с оформлением книги. Потом он подписал ей один из экземпляров:



“Тане Ушаковой с благодарностью за поддержку и терпение, которые Вы проявили при подготовке рукописи. Ваш Борис Гнеденко». Это было написано дрожащей рукой очень больного человека, который тем не менее, никогда не забывал делать Добро и проявлять свою Любовь к другим.

Он так никогда и не увидел второй нашей книги — “Statistical Reliability Engineering”...

⁴ Statistical Science, 1992, Vol.7, No.2, pp.273-283: N.Singpurwalla & R. Smith “A Conversation with Boris Vladimirovich Gnedenko”.

KH. B. KORDONSKY: RECOLLECTIONS AND SHORT REVIEW OF SCIENTIFIC RESULTS

Ilya Gertsbakh,
(Beer Sheva, Israel)

Professor Khaim B. Kordonsky was my Ph.D. advisor, my teacher and also my personal friend. I was lucky that during many years I had the unique opportunity to work with that fine man of outstanding intellectual courage combined in him with extreme modesty and personal charm. The notes below is my tribute to his memory.

1. Aircraft Fatigue Life.

Being the leading AEROFLOT expert in aircraft fatigue problems, Kh.B. Kordonsky was often faced with extremely difficult real-life problems. One such problem was aircraft life prediction after a fatal fatigue failure.

In the mid 1960's, one aircraft of the type IL-14 (if I am not mistaken) suffered a catastrophe as a result of fatigue break of the wing. In total, AEROFLOT had several hundred similar aircraft in active use. According to the existing rules, the entire fleet of the IL-14 was grounded and the wings were inspected to reveal the presence (or the absence) of fatigue cracks in the wings. The data gathered after this inspection had the following form:

$$i, \text{ flight time } T_i \text{ hours; } \delta_i, i = 1, \dots, 240, \quad (1)$$

where $\delta_i = 1$ if the crack was present, and 0 - otherwise.

In this messy situation, experienced practitioners were absolutely unable to say anything about the lifetime of fatigue crack, neither theoretically nor by commonsense since the exact time of crack appearance was unknown.

The approach suggested by Kh.B. Kordonsky was elegant and novel for those days when the statisticians did not know how to process censored and

grouped data. Suppose that the random time τ of fatigue crack development has the cumulative distribution function $F[(t - a)/b]$, of location-scale type, which included both lognormal and Weibull distributions, two principal models used to describe fatigue life.

Then the likelihood of the i - th event described in (1), equals

$$L_i = [F((T_i - a)/b)]^{\delta_i} \cdot [1 - F((T_i - a)/b)]^{1-\delta_i}, \quad (2)$$

and the overall likelihood is expressed as

$$Lik = \prod_{i=1}^{240} L_i. \quad (3)$$

The estimates of the parameters were obtained in a standard way by solving the set of equations

$$\partial \log Lik / \partial a = 0, \quad \partial \log Lik / \partial b = 0. \quad (4)$$

Having estimates of a and b , the lifetime prediction for a particular time in the air became a routine calculation. A crucial point in that method was establishing the uniqueness of the solution of the equations (4). In [1] published in the leading Soviet journal in 1970, it was proved that under mild conditions (at not all δ_i are zero or 1) the unique solution always exists.

2. Aviation Schedule

In the period 1965 - 1971 Prof. Kordonsky was the chief scientist and senior manager of an ambitious project on constructing computerized central aviation schedule for AEROFLOT. This schedule was the main document of the Ministry of Civil Aviation (MCA) which determined the transportation and commercial activities of a giant AEROFLOT company having a fleet of more than 600 aircraft and servicing more than 200 airports. When I compare contemporary computers with those available in the USSR in the sixties I realize that only a person of outstanding intellectual courage could accept and carry out this challenging job. Amazingly, the first computerized schedule was composed and implemented in AEROFLOT already in 1971 and continued for 16 years until the collapse of the Soviet Union.

When our work on scheduling started, the MCA schedule was composed manually by a small group of experts specializing in that work for many years.

To us composing the schedule looked like playing a giant game of patience with an unclear set of rules ranging from absolutely strict to quite "soft". These rules included partial optimization of the fleet size, safety regulations in airports and in airspace, and many other written and unwritten instructions. Nobody of the experts was ready and willing (nor possibly able) to explain to us what and why he was doing what he did, which rule was to be followed and which may be violated.

Needless to say, that neither Kh. Kordonsky himself nor any one else in his group had any idea how to compose the schedule. "You will be able to formalize the scheduling process for a computer only when you will be able to do it manually" he said to us. So we went to the Scheduling Department of MCA in Moscow and closely watched two three-week sessions of schedule composing. These sessions took part every six months. Our team included several very smart and devoted young people who returned to Riga after these sessions with numerous observations and ideas. For several months all our group, including Kh. Kordonsky himself, participated in absolutely exciting brainstorming sessions which eventually allowed us to understand and to formalize the principal heuristics which governed the process of schedule composing. The total absence of pressure of the "boss" upon his subordinates was the key element to the success of our work and characteristic of Prof. Kordonsky.

Without going into too many technical details, the basic principles of scheduling were the following. First, it was necessary to optimize the fleet size for each local company in the limits of its fleet and to produce trip-chains which served as a raw material for further work. The second principle was that the schedule should be composed sequentially, using a greedy-type algorithm. The crucial feature of this algorithm was determining the priorities among the trip-chains. At that point Kh.B. Kordonsky suggested using *probability - based* priority rules, a totally novel idea in scheduling. All trip-chains were evaluated according to the probability of positioning the trip-chain without violating basic safety and commercial rules. Afterwards, the trip-chains were ordered in the ascending order of these probabilities and the highest priority for their actual scheduling was given to the trip-chain with the *smallest probability*. The combination of greedy algorithm with probabilistic priorities were later used in many other areas of scheduling, for instance job-shop scheduling [7].

All the above principles were implemented in software and by the winter

of 1967 the first successful trials were made on a computer URAL-4 which was located in the giant hall of an old neglected Russian Orthodox church in Riga. (Let me mention that URAL-4 was a second generation computer with ROM 4K).

In 1970 our group was able to produce a schedule which was in some aspects even better than the existing one made manually. In that year, following the death of the head of Scheduling Department in the MCA from cancer (the name of this outstanding man was Sharkevich) and the inability of his subordinates to proceed without him, the MCA asked for our help. The first computerized schedule was composed for the winter years 1971-1972. Later on, schedules were made yearly and their size increased considerably.

3. Time Scales

In the period 1988-1999, Kh. B. Kordonsky worked on the problem of *lifetime scales* in reliability, see [2]-[5]. Traditionally, the approach to system failure analysis is based on assuming a certain failure model derived from a hypothetical scheme of damage accumulation. As a rule, this process is considered in one, "most appropriate" time scale. For example, the number of loading cycles is the intrinsic time scale for fatigue-type failure.

It is widely recognized today that this intrinsic time can be chosen (and observed) in several ways. For example, two times scales prevail in aircraft reliability analysis: the total flight time and the total number of operation cycles (landings and takeoffs). This fact was the motivation and the starting point for Kordonsky's research in multiple time scales. Once there are at least two observable principal time scales (say for a car - the mileage and the time in use), it is always possible to introduce a family of new time scales by considering a weighted sum of the principal time scales. Proceeding along this line, Kh. Kordonsky suggested an ingenious definition of the "best" time scale [2]: the best time scale is defined to be that time scale which provides the minimal value of the *coefficient of variation* of the time to failure. Suppose T and L are the two principal time scales. Each individual object "lives" in two time scales simultaneously. Its "life history" is represented by a trajectory in the $[T, L]$ -plane. It is called by Kordonsky *operational characteristics* (OC). As a first approximation, the OC's are straight lines whose slope reflects the individual damage accumulation rates in both scales. The notion of the

OC was used also by Lawless and Cao [6]. It is very strange that many people worked in the field of reliability but no one before Kh.B. Kordonsky paid attention to the choice of the most relevant time scale for lifetime data analysis.

To illustrate the importance of multiple time scales, let us consider a hypothetical example from the field of preventive maintenance. Let for a certain device T be the scale of operation hours and L be the scale of operation cycles. 25% of all objects have the OC with a slope $L/T = 5$ and fail when the number of operation hours reaches 1000 hrs (and therefore the number of cycles reaches 5000). 50% of all devices have an OC with a slope $L/T = 1$ and fail when $T = 3000$ hrs. The rest 25% of objects have an OC with a slope 0.25 and fail at $T = 5000$ hrs. So, if we observe failures in each scale *separately*, we see a discrete distribution with probability mass 0.25, 0.5 and 0.25 in the points 1000, 3000 and 5000, respectively.

Now suppose we want to carry out a preventive renewal (PR) of the system for a cost of \$1000 and suppose also that no failures are permitted. Then obviously we will carry out the PR just before 1000 hours or 1000 cycles, according the scale we use. Then we would pay \$1000 each thousand hours, and the cost per unit time will be \$1/hr. Is it possible to do better? At first glance, there is no way to do better. But now look at the both scales together. We immediately observe that the system fails when the value of $L + T$ reaches 6000, on every OC. The new time scale $K = T + L$ is the "best" one according to Kordonsky's definition since the c.v. in this scale equals zero. Now let us carry out the PR just before the K -time reaches 6000. Simple calculations show that now our cost per unit time will be equal $0.25 \cdot 1000/1000 + 0.5 \cdot 1000/3000 + 0.25 \cdot 1000/5000 = 0.47$. There is a reduction of costs by a factor of two!

- [1] Artamanovsky, A.V. and Kh.B. Kordonsky. 1970. Estimate of maximum likelihood for simplest grouped data. *Theory Prob. Appl.*, **15**, 128-132.
- [2] Kordonsky, Kh. and I. Gertsbakh. 1993. Choice of the best time scale for the reliability analysis. *European Journal of Operational Research*, **65**, 235-246.
- [3] Kordonsky, Kh. and I. Gertsbakh. 1995. System state monitoring and lifetime scales -I, II. *Reliability Engineering and System safety*, **47**, 1-14, **49**, 149-154.

A CONVERSATION WITH B.V.GNEDENKO

Nozer Singpurwalla, (Washington, USA)
Richard Smith,⁵ (Raleigh, USA)

Abstract.

This material is a brief presentation of the interview with B.V. Gnedenko that took place in Washington on May 25, 1991. Apart from Gnedenko himself, present were Nozer Singpurwalla, Richard Smith, Gnedenko's son Dimitri, and Distinguished Visiting Professor at the George Washington University Igor Ushakov from Moscow.

At the beginning there are materials that has been abstracted by N. Singpurwalla and R. Smith from tributes paid to Gnedenko on his 50th, 60th and 70th birthdays.

In 1937, under the influence of Khinchin and Kolmogorov, Gnedenko became interested in limit theorems for sums of independent random variables. In the subsequent years, drawing upon results of de Finetti, Kolmogorov and Levy, for the class of infinitely divisible distributions, he derived a series of results in the above topic that are now regarded as his most important contributions to the theory of probability. Gnedenko's research into limit theorems were summed up in a (1949) monograph with Kolmogorov, entitled "*Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*". This monograph was awarded the Chebyshev prize in 1951 and was translated into many languages: English, German, Polish, Hungarian and Chinese, to name a few. This monograph resolved the classic problems of limit theorems for sums of independent random variables, begun by Chebyshev, Lyapunov and Markov.

During 1940-1943, he published several papers on limit distributions for the maximum term of a series of random variables, where he obtained the most definitive results on the necessary conditions of convergence and the domains of attraction of each of the possible limit laws. His work was the first mathematically rigorous treatment of the fundamental limit theorems of extreme value theory. In its influence on the probabilistic theory of extremes, the paper set the agenda for the next 30 years.

In 1941 he published a paper, "*Geiger-Muller Counters*," in the *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. This paper is a landmark in what is now known as the theory of reliability. Gnedenko's contributions to the development of this subject and his role in evolution of the Soviet school of reliability are covered by Professor Igor Ushakov's postscript at the end of this interview.

⁵ N.D. Singpurwalla is Professor of Operations Research and Statistics at The George Washington University (USA).
R.L. Smith is Professor of Statistics at the University of North Carolina (USA).

In 1950, Gnedenko's interest turned to problems in mathematical statistics. Kolmogorov and Smirnov had proved the first theorems establishing the limit distributions for the maximum deviation of an empirical distribution function from the theoretical and for the maximum difference of empirical distributions from two independent samples. Gnedenko succeeded in developing effective methods for obtaining the exact distributions in the case of finite samples in these and other related problems. This cycle of his work received worldwide recognition, because it served as a basis for compiling tables, which are valuable in applied statistics. During the sixties, Gnedenko's interests turned to a new series of problems, namely those of the theory of queues and the theory of reliability. His books on these topics, "*Mathematical Methods in the Theory of Reliability*", with Yu.K. Belyaev and A.D. Solov'yev, and "*Elements of Queuing Theory*", with I.N. Kovalenko, are familiar to anyone having an interest in these subjects.

Besides being an enthusiastic research mathematician, Gnedenko is also a brilliant teacher and popularizer of mathematics. His textbook "*A Course on Probability Theory*" has been used with universal success, both in the Soviet Union and abroad; it has been translated into all the major languages of the world. The history and philosophy of mathematics is another sphere of interest of Gnedenko. In 1946, he published his popular "*Essays on the History of Mathematics in Russia*", the only book of its kind to appear in print at that time. For his service to the development of mathematical science, his passionate support of the mathematization of science, and his years of pedagogical work. Boris Vladimirovich Gnedenko was awarded the order of the Friendship of Nations on his 70th birthday.

THE INTERVIEW

Smith: Professor Gnedenko, could we please begin by asking you tell us something about your early life?

Gnedenko: With great pleasure. I was born in Simbirsk, a city on the Volga River. When I was 3, the family moved to Kazan. My father hoped to study at Moscow University, but the First World War intervened, and he lost any chance of studying at the university.

Singpurwalla: Professor Gnedenko, did your father or mother have any influence on your development as a mathematician?

Gnedenko: They influenced me in different ways. My father wanted me to be a medical doctor. However, I showed interest in mathematics. At my 7th year at school, I began to study mathematics on my own, solving mathematical problems from economics books. My father encouraged me. I graduated at 15 and wanted to go to a technical institute, though I was told that I should wait for 2 years because one should be 17 to go to a university.

Smith: Was it unusual to finish school as young as age 15?

Gnedenko: Yes. I entered a private gymnasium when I was 6. This was a very good school, but I was there only for half a year. After the revolution, private schools were closed and I went to a public school, which was not very good. In 1923 we moved to Galich, because my father had been advised to

change climates for medical reasons. There I was put in the same class as my brother, who was 2 years older than me. So, I graduated 2 years earlier than usual.

Smith: So what did you do then?

Gnedenko: I went to the University of Saratov in 1927. I was given the opportunity to go there by personal permission of Lunacharsky (Anatoly Lunacharsky was Minister of Culture and Education of the USSR in the 1920s). He signed a letter to permit me to enter the university. It was not simple to get that letter. Many people at the university thought he was my uncle! The very first lectures there were wonderful for me, and were a great foundation for the future. There was a very good professor of mathematics by the name of Vladimir Goldebie. He had a big influence on the students. I graduated after 3 years study.

Smith: Were your studies entirely in mathematics, or did they include other subjects?

Gnedenko: Only in mathematics. There were lectures in psychology and philosophy as well, but these were too formal for me.

Singpurwalla: But mathematics is very formal too.

Gnedenko: Oh no! In mathematics the important thing is the ideas, and only then the formalism.

Smith: What did you do after the graduation?

Gnedenko: One of the professors from Saratov University was invited to head a department at the Ivanovo Textile Institute. He asked me to join him, and I spent 4 years there. I gave lectures to the mathematics students, who, by the way, were older than I. Once I substituted two professors who were ill. During about a month, I was lecturing every day from the early morning to the late night. There I began to solve some mathematical problems arising in the textile industry, and this stimulated my interest in mathematics.

Singpurwalla: I notice that your first publications were about machine failures, written at the Textile Institute.

Gnedenko: Yes, they concerned mathematical and statistical problems of machines operation. After 4 years, I decided to continue my education. Solving some practical problems, I found that I was close to using stochastic processes to address these questions. About that time Kolmogorov and Khinchin were giving their first lectures on the topic. In 1934 I went to Moscow for 2 months and met Kolmogorov and Khinchin. After I told Khinchin that I would like to study in Moscow, he suggested me to be his student. After half a year, Kolmogorov told me that he also wanted to take me as a student. So after that I had two advisers: Kolmogorov and Khinchin.

Smith: What were they like?

Gnedenko: Very different. Khinchin was a wonderful lecturer. His language was very literal, very exact. After 5 minutes, students could understand all his ideas. Although he did not say loud, you could follow his every word. Kolmogorov was quite different. He did not like to lecture, and presented his material in a very difficult manner. The students said that they would

not want to hear even the proof of Pythagoras' Theorem if Kolmogorov would present it! However, every week he lectured on mathematical statistics and always presented new insight. Once I went to Khinchin and complained that I could not understand more than 50% of Kolmogorov's lecture. Khinchin replied, "But that is wonderful! I could never understand more than 30%!"

Smith: I suppose Khinchin was older than Kolmogorov. Was Khinchin head of the department?

Gnedenko: Yes. Kolmogorov was professor of mathematical analysis, and gave lectures in calculus and the theory of functions as well as probability and statistics. They had a very good relationship.

I did my first mathematical work in 1935. Luzin in 1915 had posed a problem concerned with the existence of an orthogonal function system. When Khinchin went to Saratov as a visiting professor, I visited him there. He posed to me the following problem: Do there exist two characteristic functions, which agree on an interval and differ elsewhere? Khinchin believed the answer was no, but I knew something about quasi-analytic functions and thought such characteristic functions had to exist. However, I could not find an example. After 2 days we met again and Khinchin asked me, if I had solved the problem. I returned to my room and could not eat or drink. I went to sleep and woke up with the solution in my head. I had found an example of two characteristic functions, which satisfied the conditions. After this I began to study infinite divisibility.

Coming to Moscow to work with Kolmogorov, I submitted two papers on limit laws. In December 1937, I was called up to the military service, but after only 2 weeks I was arrested and put in prison for 6 months!

Singpurwalla: Why were you put in prison?

Gnedenko: Three people made a report that I was a member of a counter-revolutionary organization headed by Kolmogorov.

Singpurwalla: What was this organization?

Gnedenko: There was no such organization, however it was 1937...

Ushakov: It was a time when enormous numbers of honest people were arrested on absurd manufactured charges.

Gnedenko: In the prison, once I was interrogated for 8 days in a row practically without sleep. Eventually, I decided to write a letter to "outside". I had a pencil but no paper, so I stuck cigarette papers together and wrote two tiny notices, one to my parents and another to the public procurator. A warden helped me and sent the letters to the addressees. Both letters reached their destinations, and then my parents started working to publicize my case. After another 2 months, I was released.

Smith: So how long were you in prison altogether?

Gnedenko: Six months. When I was released, Kolmogorov and Khinchin made my rehabilitation in the department possible, in spite of the opposition of some of the faculty. At that time, many of the professors were arrested, including almost all the specialists in mechanics.

Singpurwalla: You said that one of the reasons you were arrested was that you were a member of a counter-revolutionary organization. Does that make you a Czarist?

Gnedenko: It was enough if a single person would denounce you as a counter-revolutionary. If I would confirm anything against Kolmogorov, that would have been enough to arrest him.

Singpurwalla: And were you a counter-revolutionary?

Gnedenko (smiling): Yes, naturally.

Ushakov: All Russians are counter-revolutionary in some sense.

Singpurwalla: Oh, I see: it's only a question of which revolution. . .

Ushakov: Probably, my translation of the last Gnedenko's speech was not good enough. I should explain Professor Gnedenko's last remark. If during these 6 months in prison, he had had agreed with a slightest accusation against Kolmogorov, it would have been enough for his arrest. And arrested people had disappeared forever. . .

Singpurwalla: When you went back to Moscow, was this when you started your work on extreme values?

Gnedenko: Yes, in 1940.

Singpurwalla: What got you interested?

Gnedenko: I was reading a paper about the strength of materials when I realized that the use of extreme values in this area should be useful. I finished my paper in 1941, before the war. It was intended for a special edition dedicated to Kolmogorov works. However, with the war starting it was not printed. In 1942 Kolmogorov suggested sending the paper to an American journal "*Annals of Mathematics*", and it was published in 1943. At that time, my country had good relationship with the United States.

Smith: So this was by special invitation from the American journal?

Gnedenko: Yes. Another of my interests started in 1936 or 1937. At that time every student had to write a paper in history or philosophy. Under Professor Yanovskaya, I wrote a 200-page manuscript on the history of mathematics in Russia. However, after I handed in the manuscript I forgot about it.

In October 1941, the Nazi troops were within 10-20 kilometers of Moscow, and all people were mobilized for fortification labor. However, I was turned down when the officers realized that I was in prison. So, I went back to my university work and wrote a paper on the law of the iterated logarithm. By this time, Moscow University had been evacuated to Ashkhabad, and afterwards to Sverdlovsk. In Sverdlovsk I began working with industry on quality control.

Singpurwalla: Why was the paper you mentioned above published in French?
Why not in Russian?

Gnedenko: The Bulletin of Moscow University required one copy in Russian and another in French, English or German. I gave it in Russian and French. The Russian version was not published, but the French one was.

Singpurwalla: Besides Russian and English, do you also speak French?

Gnedenko: I thought my French is better than my English.

Singpurwalla: And German?

Gnedenko: About the same as French.

Singpurwalla: Can I ask you more about Kolmogorov? He was trained in Germany, wasn't he?

Gnedenko: He was in Germany for a short time, in Gottingen. Then he went to France and met Maurice Frechet. He said that he had two teachers in probability, Khinchin and Frechet.

Singpurwalla: And where was Khinchin trained, in Russia?

Gnedenko: Only in Russia. He was a student of Luzin, and his early work was on the theory of functions.

Smith: We have talked about your work in infinite divisibility and extreme values. At what stage did you complete your doctorate?

Gnedenko: In 1941, my work on infinitely divisible distributions. At the thesis defense, my opponents were Bernstein, Kolmogorov and Khinchin.

Singpurwalla: Who had the biggest influence on your scientific life?

Gnedenko: I think four professors. First, Boev, whom I worked with in Ivanovo. Second, Goldebier. But most of all. Khinchin and Kolmogorov.

Singpurwalla: What about your book with Kolmogorov? Did you have a long scientific relationship with him?

Gnedenko: It was not only a scientific relationship. We were also friends. Kolmogorov proposed that I address him on a first-name basis. All my life, after 1934, I was close to Kolmogorov. After being in prison, I lived for some weeks in Kolmogorov's home. Then I began thinking about the book. I discussed it with Kolmogorov, but started writing it only in 1945, when I moved to the Ukraine.

Smith: So it was originally your idea to write the book?

Gnedenko: Kolmogorov read my manuscript and supplemented it.

Smith: But you initiated it?

Gnedenko: I prepared the plan and a first draft. However, many good ideas in it were due to Kolmogorov.

Singpurwalla: Professor Gnedenko, you were talking about your students. Who were the best of them?

Gnedenko: In 1945 I left Moscow for the Ukraine. I spent 4 years in Lvov, and 11 in Kiev. There I got students interested in mathematical statistics. In Kiev I had some very good students, Skorokhod, Korolyuk. Kovalenko and many others.

Smith: Who were the best from this period?

Gnedenko: I think I started the probability school in the Ukraine. I wanted to give the same emphasis to statistics, but young people prefer probability. I think this is wrong. Mathematical statistics is very important.

Singpurwalla: For me too, for all of us! But let me come back to the question: who is your best students?

Gnedenko (laughing): No one was best! Now my scientific grandson, Sylvestrov, a student of Skorokhod, has a great interest in problems of mathematical statistics. He organized laboratory in computational statistics.

Singpurwalla: Where is he?

Gnedenko: In Kiev. I think the best of my students were Skorokhod, Kovalenko, and Domas Szasz. There was also a wonderful mathematician from Egypt, Hossain Fahid.

Smith: Tell us about your well-known textbook "*Theory of Probability*".

Gnedenko: I started working on my textbook in 1946. It was published in 1949 in Moscow and Kiev. The second edition was published in 1954, and afterwards there were many editions in different countries.

Smith: I think there is now a sixth edition?

Gnedenko: The sixth edition is only in Russian, not in English⁶. This edition is revised. There is an essay on history of the probability theory, and some new scientific material.

In 1944, I met Professor Yanovskaya again, and she advised me to publish my manuscript on history.

Smith: This is the one you wrote back in 1937?

Gnedenko: Yes. It was "*History of Mathematics in Russia*" – a small book of 200 pages.

In Kiev I begin a seminar on queuing theory with both theoretical and applied directions. I began writing the first book on queuing theory, and later took Kovalenko as co-author.

Smith: so with this book, as with the one with Kolmogorov, you wrote the first version?

Gnedenko: Yes, but I think that now Kovalenko has more expertise in these field than I am. From 1957, I worked with engineers to organize a computer center in the Ukrainian Academy. This is now a big center of cybernetics.

Singpurwalla: Professor Gnedenko, have you had a lot of administrative responsibility?

Gnedenko: I don't like administration.

Singpurwalla: But you have done a lot of it?

Gnedenko: For many years I was director of the Institute of Mathematics of the Ukrainian Academy of Sciences.

Singpurwalla: And now you are the Chair of the Department of Probability Theory in Moscow University? Is that an administrative position?

Gnedenko: Not much. I prefer scientific work, lecturing and writing. I enjoy working with students. I have had over a hundred doctoral students, of whom 30 are professors in my country and abroad, and seven of them have the title of Academician. They include Skorokhod, Korolyuk, Mikhalevich, Grigelionis, Kovalenko and Yustchenko.

Smith: Professor Gnedenko, in 1960 you moved from Kiev to Moscow. Several years later you published a famous monograph on reliability with Belyaev and Solovyeu. How did you start working with them?

Gnedenko: In Kiev I was working with a group of engineers on medical diagnosis by computer. We had one case in which a heart-lung monitoring computer system failed and the patient died. After that I became interested in problems of reliability. In 1959 Belyaev came from Moscow to visit me.

Singpurwalla: Was Belyaev your pupil?

Gnedenko: No, he was Kolmogorov's. In August 1960 I moved to Moscow, and in 1963 we began writing our book "*Mathematical Methods in Reliability Theory*".

Smith: Yourself and Belyaev?

Gnedenko: And Solovyeu.

Singpurwalla: Was Solovyeu your pupil?

Gnedenko: No, he was a student of Gelfond, a good specialist in complex analysis and number theory. In 1964 we finished the first draft, and in 1965 it was published in Russian. From 1961 to 1968 I was working on queuing theory and reliability theory. In 1968 I shifted my interest to limit theorems for sums of a random number of random variables. This was motivated by problems in physics, economics and reliability. I first solved a practical problem and then solved theoretical problems. For me, that is the usual way.

Singpurwalla: You mean, solve a practical problem first and then develop the theory?

Gnedenko: Yes. After this, about 1981, my interest turned to the history of probability. I wrote a little brochure on the subject.

Smith: Professor Gnedenko, you are still very active and writing a number of books. Could you tell us about some of the others?

Gnedenko: For the past several years I have written one book a year.

⁶ The 6th edition was translated by I. Ushakov and published in 1997 by Gordon and Breach Science Publication.

Singpurwalla: For how many hours do you work every day?

Gnedenko: Now, very few. About four hours a day.

Singpurwalla: I see your son disagrees with you. (Laughter.) He says more than four.

Dimitri Gnedenko: From five or six in the morning, and during the whole day, he is thinking or writing.

Gnedenko: This year, I wrote a new book for students. It is about what a mathematician is. At the beginning, I discussed the place of mathematics in our life. The second chapter gave some examples of mathematical problems with simplified solutions. The third chapter is about applications of mathematics. At the end, I discuss history of science, philosophical aspects, and methodology of teaching. Without creativity, good teaching is impossible. This year I have also written a short book for school children on mathematics and life.

Smith: What are your plans for future books?

Gnedenko: I have big plans. More than I am capable to complete, I am afraid. Now I am working on three books. The first is about limit distributions for the sum of a random number of random variables. However, there are some unsolved problems. The manuscript is half completed, though I hope to finish it this year. The second book on reliability will be written with Ushakov⁷. Let me explain why such a book is needed. The book "*Mathematical Methods in Reliability Theory*" was written not for engineers. It is a mathematical book and too difficult for engineers.

Smith: So the book with Ushakov will be more elementary?

Gnedenko: Yes. More elementary and more practical. The style of each chapter would be like this: it begins with description of the problem, focusing on its practical aspects, and then we are going to give the solution of the mathematical problem almost without proofs and, finally, discuss the practical applications. After this I present a mathematical supplement.

The third book is also begun, and I want to finish it quickly. It is a textbook on random processes with contributions from Belyaev, Dimitrov and Yanev from Bulgaria, and myself.

I have plans for two more books. The first is a book of memoirs of my life.

Singpurwalla: So, perhaps we should not be conducting this interview and should wait for the memoirs?

Gnedenko: In my life I have met many remarkable people. I worked in Moscow with many outstanding mathematicians, almost all of who are now dead. It is necessary to conserve memories about these people.

Smith: I am sure it is a book that many people will be very interested to read.

Gnedenko: The second book I plan is for school children "*A Journey to the Terra Mathematica*". The third is a textbook on mathematical statistics. I want to give an informal description of the methods. Here in the U.S.A., there are many good books, but they are too formal, with a lot of theoretical results without application. I think a practical book should also give an idea of the mathematical conception.

Singpurwalla: You have written many books. What is the motivation for writing so many books?

Gnedenko: I do not now what to answer.

Singpurwalla: Do you like writing books?

Gnedenko: I write quickly, and it is a pleasure for me.

Singpurwalla: Do you use a word processor or computer?

Gnedenko: No, no I use a typewriter.

Singpurwalla: Do you write one draft or many?

Gnedenko: Usually, one draft.

Singpurwalla: One draft only? No errors in the first draft?

Gnedenko: It is necessary first to think and only then to write.

There is another reason why I write so many books. On January 1st, I will be 80 years old. Eighty is not a good age to delay anything for tomorrow. I have some ideas, I have to express them. Without this I cannot rest.

Singpurwalla: Professor Gnedenko, in Moscow you have an institute⁸ where a number of applied statisticians and probabilists collaborate with engineers. Can you say something about the interaction between engineers and mathematicians? Is it good? Is it active?

Gnedenko: In 1961, after my return to Moscow, some engineers and I organized a seminar on reliability at Moscow University. In a year that seminar became very popular and a number of engineers attended it. The Council of the seminar included two engineers, Sorin and Shor, and a very good economist, Shukhgaltser. All three are dead now.

It was a very successful seminar with 800 participants, including engineers, academicians and mathematicians. Many people came from other cities for public consultations, we gave cycles of lectures for engineers. However, the last 5 years, the Gorbachev's years, were very bad for the seminar.

Singpurwalla: Why?

Gnedenko: Now the interest in quality control and reliability is low. Now I think our industry works only at 60% efficiency. The volume of production is the priority, and quality and reliability are not asked about. This is very bad.

Singpurwalla: Professor Gnedenko, you said that you met a lot of mathematicians in your life. Did you meet de Finetti?

⁷ Probabilistic Reliability Engineering by B.V.Gnedenko and I.A. Ushakov. John Wiley & Sons, New York, 1995

⁸ Singpurwalla means Moscow Consulting Center on Reliability and Quality (the so-called "Chamber of Reliability").

Gnedenko: Yes, in Italy. I remember him with a great pleasure. We had a discussion about subjective probability.

Singpurwalla: And what do you think of it?

Gnedenko: I think he was wrong. Science must not be personalized. Science must be objective. Personality is very important for the development of science, but science itself must be objective. I had many discussions about this subject with de Finetti, and with Professor Savage. He was very learned and modest. I think de Finetti and Savage were most important in that area.

Smith: De Finetti's books on the theory of probability were translated into English; were they translated into Russian?

Gnedenko: No.

Singpurwalla: Professor Gnedenko, since you have objection against subjective probability, you must have objection against Bayesian statistics also?

Gnedenko: I think every method has its possibilities and its limitations.

Singpurwalla: I agree.

Gnedenko: And the Bayes method has limitations. But in practice, dealing with serious problems, we should try all possible methods. I think the Bayes method has good possibilities and this method must be developed, but it is not the only one.

Singpurwalla: So you think that the Bayesian methods with objective probability are acceptable, but Bayesian methods with subjective probability are not?

Gnedenko: It is always necessary to state the assumptions. Subjective probabilities, if necessary, can be made objective.

Singpurwalla: Are there Bayesians in the Soviet Union? Belyaev has been writing Bayesian papers.

Gnedenko: Yes. Many Russian statisticians use Bayesian methods. It is impossible not to use them. These methods are important.

Singpurwalla: Have you used them?

Gnedenko: Yes. I have given my students Bayesian lectures.

Singpurwalla: I'd like to make a comment. When we started this interview, you said that your father wanted you to be a doctor, but you became a mathematician. Your son is a mathematician. Did you advise him to be mathematician?

Gnedenko: He understands applications in psychology very well. It is impossible to do good work in mathematics without applications.

Singpurwalla: So, Dimitri, maybe you can answer this question. Did your father have an influence on you?

Dimitri Gnedenko: Yes, of course.

Singpurwalla: And does he continue to have an influence?

Dimitri Gnedenko: Yes. He was my first and most important teacher. But I had others of course. Professor Solovyev in probability theory and Professor Zhuravlev in mechanics. But first and foremost is my father.

Singpurwalla: Have you and your father written a paper together?

Dimitri Gnedenko: Yes, we have some articles written together, and we plan further articles and books.

Singpurwalla: On reliability?

Dimitri Gnedenko: Not only on reliability.

Singpurwalla: If you write a book on reliability, make sure it is Bayesian!

Smith: How would you view the present state of statistics in the Soviet Union?

Gnedenko: There are good statisticians. Kagan was very good, but he is now in the U.S.A. Zhurbenko worked in statistics, in time series, but he is more of a probabilist than a statistician. There are many others, for example Orlov.

Smith: What about Chibisov? He is well known in the West.

Gnedenko: But his work is closer to probability. Statistics is secondary for him.

Smith: Is there much applied statistics in the Soviet Union?

Gnedenko: I don't know good applied statisticians. However, without statistics it is impossible to make progress in demography, in experimental science, in industry, in economics and so on.

Smith: Professor Gnedenko, we would like to thank you for talking to us. We hope you enjoy your visit to the United States.

Singpurwalla: Well, Professor Gnedenko and Dimitri, thank you for making your time available. We hope you like Washington.

Gnedenko: Thank you very much.

POSTSCRIPT

The following material has been provided by Professor Igor Ushakov, who has been a personal friend of Gnedenko over the last 30 years and has assisted him in many activities of the Committee of Standards of the USSR.

Professor Gnedenko is not only an outstanding mathematician and excellent teacher, he is also an energetic participant in different kinds of public activities. I would like to say a few words about aspects of his personality that have not been covered in the interview.

In the early sixties, Professor Gnedenko established a program of seminars in reliability at the Moscow State University. It brought together people from academia and industry that were working on different aspects of reliability and quality control, and gave birth to many a specialist in reliability in the USSR. Later on, he and Ya.M. Sorin established the Consulting Center in Reliability and Quality Control at the State Committee of Standards. That Center located at the Moscow Polytechnic Museum, a traditional center of enlightenment and intelligentsia.

Gnedenko became the Scientific Head of the Center. He attracted for collaboration tens of Doctors of Sciences and Professors, who gave everyday consultations on practical reliability problems for engineers and presented weekly cycles of lectures on Reliability Theory. That Center – a unique Public Consulting Center – had been existing more than a quarter of century. Doubtless, that Center gave a birth to what we are calling now as “the Soviet School on Reliability”. просуществовал более четверти века. Namely, Gnedenko was the person who had an ability to join applied mathematicians and engineers into a common

This Center has been in operation for more than a quarter of a century, and was responsible for developing what one may call the Soviet School of Reliability.

Professor Gnedenko's scientific generosity is reflected in the fact that he has been an adviser to more than 100 Ph.D.'s, many of whom have become members of the All-Union and Republican Academies of Sciences.

An incident not known to a wide circle of people, and briefly touched upon in the interview, pertains to the episode of his imprisonment. Neither Gnedenko nor Kolmogorov talked about it. I have known about this side of Boris Vladimirovich life from his wife, Natalya Konstantinovna. Telling me the story, she added: "Igor, please never say this to anybody, because Boris and Andrei don't like to advertise this and show the public their deep feelings for each other." Now Gnedenko told about that time himself.

Gnedenko is a real representative of the Russian intelligentsia. He reads a lot of fine literature, and knows much poetry. In his library, you can find a great number of art albums with reproductions from all over the world art museums. He does not like the modern art but he is very tolerant to those who do. This tolerance is one of his main virtues. His collection of musical recordings is tremendous. He likes "classical classics": Bach, Mozart, Beethoven, Tchaikovsky, and Rachmaninoff. There is also a collection of Orthodox Russian Church liturgy. And of course splendid Russian romances.

Professor Gnedenko is an excellent storyteller: soft spoken and artistic. At the same time, he also possesses a wonderful ability to listen to others. All that makes a relationship with him comfortable and simple for anybody. A combination of scientific renown and human qualities makes Professor Gnedenko one of the foremost academicians of recent time.

Photo below: Gnedenko in Washington



БЕСЕДА С БОРИСОМ ВЛАДИМИРОВИЧЕМ ГНЕДЕНКО

Нозер Сингпурвалла, (Вашингтон, США)
Ричард Смит, (Рейли, США)

Аннотация.

Этот материал является сокращенным вариантом интервью Бориса Владимировича Гнеденко, которое имело место 25 мая 1991 г. в Вашингтоне, США. Кроме Б.В. Гнеденко присутствовали проф. Нозер Сингпурвалла и Ричард Смит, сын Гнеденко, Дмитрий, а также проф. Университета Дж. Вашингтона Игоь Ушаков.

В начале приводится справка, подготовленная Н. Сингпурваллой и Р. Смитом на базе статей, опубликованных по случаю 50-, 60- и 70-летия Б.В. Гнеденко.

В 1937 под влиянием Хинчина и Колмогорова, Гнеденко начал интересоваться предельными теоремами для сумм случайных величин. Опираясь на результаты де Финетти, Колмогорова и Леви для класса безгранично делимых распределений, он доказал ряд важных теорем, которые рассматриваются как его наиболее важный вклад в теорию вероятностей. Исследования Гнеденко, касающиеся предельных теорем, были подытожены им в монографии «*Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*», написанной в 1949 г. в соавторстве с А.Н. Колмогоровым. Эта монография была удостоена Премии Чебышёва в 1951 г. и переведена на многие языки мира. Эта книга закрыла классическую проблему предельных теорем для сумм независимых случайных величин, изучение которой начали Чебышёв, Ляпунов и Марков.

В 1940-1943 годах он опубликовал несколько статей о предельных распределениях максимального члена выборки, в которых он получил необходимые условия сходимости и нашел области сходимости для всех возможных предельных распределений. Эти его работы были первыми фундаментальными исследованиями в области предельных теорем, в теории экстремальных значений, они послужили импульсом для последующих работ в этой области на протяжении последующих 30 лет.

В 1941 г. он опубликовал работу «*О счетчиках Гейгера-Мюллера*» в академическом Журнале экспериментальной и теоретической физики. Эта его статья стала краеугольным

камнем того, что сейчас называется теорией надежности. (Вклад Гнеденко в развитие этой теории и роль Гнеденко в становлении советской школы надежности отражены в послесловии, подготовленном профессором Ушаковым заключительной части этого интервью).

В 1950 г. внимание Гнеденко было обращено к проблемам статистики. Колмогоров и Смирнов доказали первые теоремы относительно предельных распределений максимального отклонения эмпирического распределения от теоретического, а также отклонений эмпирических распределений двух независимых выборок, взятых из одной и той же генеральной совокупности. Гнеденко разработал эффективные методы нахождения точных распределений для конечных выборок, а также решил ряд связанных с этим проблем. Этот цикл работ получил мировое признание, поскольку они легли в основу разработки таблиц, так важных для задач прикладной статистики. В 60-е годы Гнеденко занялся новыми проблемами, связанными с теорией массового обслуживания и теорией надежности. Его книги по этим проблемам «*Математические методы в теории надежности*» в соавторстве с Ю.К. Беляевым и А.Д. Соловьевым, и «*Введение в теорию массового обслуживания*» в соавторстве с И.Н. Коваленко знакомы каждому, кто имеет отношение к данной проблематике.

Кроме того, что Гнеденко прекрасный математик, он к тому же замечательный преподаватель и популяризатор математики. Его учебник «*Курс теории вероятностей*» пользовался и пользуется неизменным успехом как в его стране, так и за рубежом. Эта книга была переведена на все основные языки мира. История и философские проблемы математики являются еще одной сферой интересов Гнеденко. В 1946 г. он опубликовал свои широко известные «*Очерки по истории математики в России*».

За развитие математики и педагогическую деятельность, к 70-летию со дня рождения Борис Владимирович был удостоен ордена Дружбы Народов.

ИНТЕРВЬЮ

Смит: Профессор Гнеденко, позвольте начать с вопросов о Вашей жизни.

Гнеденко: Конечно. Я родился в Симбирске, городе на берегах Волги. Когда мне было 3 года, вся семья переехала в Казань. Мой отец собирался поступить в Московский Университет, но началась Первая Мировая война, и его мечты рухнули.

Сингпурвалла: Профессор Гнеденко, повлияли ли Ваш отец и мать на Ваш выбор стать математиком?

Гнеденко: Конечно. Мой отец хотел, чтобы я стал врачом, но я проявлял интерес к математике. В седьмом классе я начал самостоятельно заниматься математикой, решая задачи из книги по экономике. Мой отец поддержал мое увлечение. Я кончил школу, когда мне

⁹ N.D. Singpurwalla is Professor of Operations Research and Statistics at The George Washington University (USA). R.L. Smith is Professor of Statistics at the University of North Carolina (USA).

было всего 15 лет и хотел пойти учиться в технический институт, однако меня не приняли, сказав, что в ВУЗы принимают только тех, кому исполнилось 17.

Смит: Было ли это необычным, закончить школу в возрасте 15 лет?

Гнеденко: Да. Я начал учиться в частной гимназии, когда мне было 6 лет. Это была хорошая школа, но я проучился в ней всего полгода. После революции все частные школы были закрыты и я пошел учиться в общую школу, которая оказалась не из лучших. В 1923 семья переехала в Галич, поскольку моему отцу врачи рекомендовали сменить климат. Там меня определили в один класс с моим братом, который был на 2 года старше меня. Поэтому-то я и закончил школу на два года раньше, чем остальные мои сверстники.

Смит: Что же Вы делали потом?

Гнеденко: Я поступил в 1927 г. в Саратовский Университет, благодаря личному разрешению от А.В. Луначарского, который был тогда Министром культуры и высшего образования. Он подписал письмо с ходатайством о моем зачислении в университет. Многие в университете думали, что он мой дядя!

Первые же лекции произвели на меня неизгладимое впечатление и оказались хорошим фундаментом для будущего. Там был очень хороший профессор – Владимир Гольдбейер, который оказал на меня большое влияние. Закончил университет я за 3 года.

Смит: Вы учили только математику или и другие предметы?

Гнеденко: Только математику. Там были еще лекции по психологии и философии, но они казались мне чересчур формальными.

Сингпурвалла: Но математика тоже очень формальная дисциплина.

Гнеденко: О нет! В математике главное – это идея, а уже потом - формализм.

Смит: Что вы делали после окончания университета?

Гнеденко: Один из профессоров Саратовского университета был приглашен заведовать кафедрой в Ивановский текстильный институт. Он предложил мне поехать с ним, и я провел там 4 года. Я читал лекции по математике студентам, которые, кстати, все были старше меня. Однажды мне пришлось замещать двух заболевших профессоров. В течение приблизительно месяца я читал лекции каждый день с раннего утра до позднего вечера... Тогда же я начал решать некоторые проблемы, возникавшие в текстильной промышленности. Это еще больше стимулировало мой интерес к математике.

Сингпурвалла: Я обратил внимание, что Ваши первые публикации, касавшиеся отказов станков, были написаны в Текстильном институте.

Гнеденко: Да, они были связаны с проблемами функционирования станков. После четырех лет работы, я решил продолжить свое образование. Решая практические проблемы, я обнаружил, что они требуют знания случайных процессов. Как раз в это время Колмогоров и Хинчин давали свои первые лекции по этому предмету. В 1934 г. я поехал на 2 месяца в Москву, где встретился с Колмогоровым и Хинчиным. Когда Хинчин узнал, что я хотел бы учиться в Москве, он предложил мне стать его аспирантом. Через полгода моей учебы, Колмогоров также предложил мне быть его аспирантом. Так получилось, что у меня было сразу два научных руководителя – Хинчин и Колмогоров.

Смит: Какими они были преподавателями?

Гнеденко: Очень разными. Хинчин был прекраснейший лектор. Он излагал все на хорошем литературном языке, очень четко. Через каких-нибудь 5 минут студенты уже понимали все основные идеи того, что он излагает. Хотя он говорил очень негромко, все легко улавливали каждое его слово. Колмогоров же был прямой его противоположностью. Он не любил читать лекции, его представление материала было сложным. Студенты шутили, что они не хотели бы слышать даже доказательство Теоремы Пифагора из уст Колмогорова! Однако, на каждой своей еженедельной лекции по математической статистике он излагал новые и интереснейшие вещи. Однажды в разговоре с Хинчиным, я заметил, что понимаю едва ли 50% того, что говорит Колмогоров на лекции, на что Хинчин заметил: «Я не понимаю и 30%...»

Смит: Мне кажется, что Хинчин был старше Колмогорова? Хинчин был заведующим кафедрой?

Гнеденко: Да. Колмогоров был профессором математического анализа, читал дифференциальное исчисление и теорию функций, а также теорию вероятностей и математическую статистику. У них с Хинчиным были прекрасные отношения.

Свою первую работу я сделал в 1935 г. Лузин еще в 1915 г. поставил задачу, касающуюся существования систем ортогональных функций. Когда Хинчин приехал в Саратовский Университет почитать лекции, я навестил его, и он сформулировал мне следующую задачу: *Существует ли пара функций, совпадающих на некотором интервале и различных всюду вне него?* Хинчин предполагал, что ответ отрицателен, но я уже был знаком с квазианалитическими функциями и подозревал, что подобные функции могут существовать. Однако я не мог найти примера таких функций. Через два дня Хинчин, встретив меня, спросил, решил ли я его задачу. Я вернулся в общежитие и не мог ни пить, ни есть – я был поглощен задачей. Я лег спать, а на утро проснулся с готовым решением! Именно после этого я стал заниматься проблемой безграничной делимости.

Приехав в Москву для работы с Колмогоровым, я уже подготовил две статьи о предельных распределениях. В декабре 1937 я был призван в армию, но спустя две недели был арестован и провел в тюрьме 6 месяцев!

Сингпурвалла: А за что Вас посадили в тюрьму?

Гнеденко: Каких-то три человека написали на меня донос, что я являюсь членом контрреволюционной организации, возглавляемой Колмогоровым.

Сингпурвалла: И что, такая организация существовала?

Гнеденко: Не было никакой организации. Просто был 1937 год...

Ушаков: Это было время, когда огромное число честных людей было арестовано на базе абсурдных сфабрикованных обвинений.

Гнеденко: В тюрьме меня однажды допрашивали 8 дней подряд, практически не давая спать. Я решил написать «на волю». У меня был огрызок карандаша, но не было бумаги. Тогда я склеил несколько листочков папиросной бумаги и написал две малюсеньких записочки, одну – своим родителям, а другую – прокурору. Надзиратель тайком помог мне переправить обе записки. Каким-то чудом через два месяца после этого моим родителям удалось вытащить меня из тюрьмы.

Смит: Сколько вы пробыли в тюрьме в общей сложности?

Гнеденко: Шесть месяцев. Когда я вернулся домой, Колмогоров и Хинчин сделали все возможное, чтобы вернуть меня на кафедру, хотя некоторые члены кафедры были категорически против. В то время многие профессора были арестованы...

Сингпурвалла: Вы сказали, что одним из обвинений против Вас было то, что Вы были членом контрреволюционной организации. То значило, что Вы были за царя?

Гнеденко: Тогда было достаточно, чтобы кто-то объявил Вас контрреволюционером. Если бы я сказал хоть что-нибудь против Колмогорова, этого было бы достаточно для его ареста.

Сингпурвалла: А были ли Вы на самом деле контрреволюционером?

Гнеденко: (смеясь): Ну, естественно!

Ушаков: В некотором смысле все русские – контрреволюционеры...

Сингпурвалла: О, я понимаю! Вопрос только против какой революции...

Ушаков: Наверное, мой перевод того, что говорил Гнеденко, был недостаточно четким. Я поясню его последнее замечание. Если бы Гнеденко во время своего шестимесячного заключения в тюрьме подтвердил хотя бы малейшее обвинение против Колмогорова, этого было достаточно для того, чтобы того арестовать. А в то время арестованные люди навсегда исчезали...

Сингпурвалла: После Вашего возвращения Вы начали Вашу работу над распределениями экстремальных величин?

Гнеденко: Да, я начал работу над этим в 1940 г.

Сингпурвалла: Что явилось для Вас толчком?

Гнеденко: Я прочитал статью о прочности материалов и понял, что теория экстремальных величин может оказаться полезной. Я закончил статью на эту тему перед самой войной. Она должна была быть опубликована в специальном сборнике, посвященном Колмогорову. Однако из-за начавшейся войны статья не была опубликована. В 1942 г. Колмогоров предложил послать статью в американский журнал “*Annals of Mathematics*”, где он и была опубликована в 1943. К тому времени отношения между нашими странами улучшились.

Смит: Это было приглашение со стороны американского журнала?

Гнеденко: Да. Другое направление моих интересов возникло в 1936 или 1937 годах. В то время каждому студенту давали задание подготовить работу, посвященную истории или философии. Под руководством профессора Яновской я написал рукопись страниц в 200 об истории математики в России. Однако, сдав задание, я забыл про него.

В октябре 1941 г. немецкие войска были в 10-20 километрах от Москвы, и всех мобилизовали на оборонные фортификационные работы. Я тоже был послан, но офицер, под начало которого я попал, узнал, что я побывал в заключении и отослал меня обратно, как неблагонадежного. Я вернулся в университет и вот тогда написал работу о законе повторного логарифма. В это время Московский Университет эвакуировали сначала в Ашхабад, а потом в Свердловск. В Свердловске я начал сотрудничать на промышленных предприятиях, занимаясь проблемами контроля качества.

Сингпурвалла: Почему статья, которую Вы упомянули, была опубликована на французском языке, а не на русском?

Гнеденко: *Бюллетень Московского Университета* требовал представлять одну копию на русском, а вторую на французском, английском или немецком. Я представил русский и французский варианты, но почему-то опубликовали только французскую версию.

Сингпурвалла: Значит, кроме русского и английского вы знаете еще и французский?

Гнеденко: Я полагаю, что мой французский лучше, чем английский.

Сингпурвалла: А немецкий?

Гнеденко: Примерно, как и французский.

Сингпурвалла: Могу я задать еще вопрос про Колмогорова? Он учился в Германии, не так ли?

Гнеденко: Он короткий период был в Германии, в Геттингене. Потом он был во Франции, где встретил Мориса Фреше. Он всегда говорил, что у него два учителя по теории вероятностей – Хинчин и Фреше.

Сингпурвалла: А где учился Хинчин? В России?

Гнеденко: Только в России. Он был учеником Лузина. Его первые работы были в области теории функций.

Смит: Вы рассказывали о работах по безгранично делимым распределениям и по распределениям экстремальных величин. На какой стадии Вы сделали свою докторскую диссертацию?

Гнеденко: Я защищался в 1941 г. по безгранично делимым законам распределения. Моими оппонентами были Бернштейн, Колмогоров и Хинчин.

Сингпурвалла: Кто оказал наибольшее влияние на Вас в Вашей научной судьбе?

Гнеденко: Я думаю, что четыре следующих профессора. Первый – Боев, с которым я работал в Иваново, второй – Гольдебиер. Но, конечно, наибольшее влияние на всю мою научную деятельность оказали Хинчин и Колмогоров.

Сингпурвалла: Расскажите про Вашу книгу с Колмогоровым. Вы у Вас с ним были тесные научные отношения?

Гнеденко: Это были не только научные отношения. Мы были большими друзьями, он даже предложил мне перейти на "ты", хотя был почти на 10 лет старше меня. Всю мою жизнь, начиная с 1934 г. мы были очень близки. Когда я вышел из тюрьмы, я несколько недель жил в семье Колмогоровых. Именно тогда я начал думать о книге, обсуждал ее план с Колмогоровым. Но писать я ее начал только в 1945 г., когда уехал на Украину.

Смит: Значит, это была Ваша идея относительно написания книги?

Гнеденко: Колмогоров прочитал рукопись и сделал много существенных дополнений

Смит: Но инициатива была Ваша?

Гнеденко: Я составил план и сделал первый черновой вариант, но благодаря Колмогорову, в книге появилось много новых идей.

Сингпурвалла: Профессор Гнеденко, Вы говорили о Ваших учениках. Кто лучший из них?

Гнеденко: В 1945 я переехал из Москвы на Украину. Я провел 4 года во Львове и 11 лет в Киеве. Здесь у меня были ученики, интересовавшиеся математической статистикой. В Киеве у меня были очень хорошие ученики – Скороход, Королюк, Коваленко и другие.

Смит: И кто же все-таки был лучшим в тот период?

Гнеденко: Тогда мы начали создавать вероятностную школу на Украине. Я хотел сделать упор на статистику, но молодежь предпочитала вероятностные методы. Хотя мне кажется, что напрасно: математическая статистика очень важна.

Сингпурвалла: Мне тоже так кажется, все мы поддерживаем Вас в этом... Но все же вернемся к вопросу: кто Ваши лучшие ученики?

Гнеденко (смеясь): Да нет лучших, они все для меня лучшие! Вот сейчас мой «научный внук» Сильвестров, ученик Скорохода, проявляет огромный интерес к математической статистике. Он даже организовал лабораторию вычислительной статистики.

Сингпурвалла: Где он сейчас?

Гнеденко: В Киеве. Я думаю, что среди лучших своих учеников я бы выделил Скорохода, Коваленко и Домаса Саса из Венгрии. Был у меня и прекрасный математик из Египта – Хусейн Фахид.

Смит: Расскажите нам о Вашем знаменитом учебнике «Курс теории вероятностей».

Гнеденко: Я начал работать над книгой в 1946 году. Она была опубликована в 1949 в Москве и Киеве. Второе издание вышло в 1954, а потом пошли многочисленные издания в разных странах.

Смит: Сейчас уже вышло шестое издание?

Гнеденко: Да, есть только русское издание, а английского еще нет¹⁰. Это расширенный вариант: в нем помимо некоторых новых результатов помещено приложение с историческим очерком развития теории вероятностей.

В 1944 году я встретил профессора Яновскую и она посоветовала мне напечатать ту мою студенческую работу по истории математики.

Смит: Это та работа, которую Вы написали в 1937?

Гнеденко: Да, это «История математики в России» - небольшая книжка на 200 страничек.

В Киеве я начал семинар по теории массового обслуживания, который имел как теоретическую, так и практическую направленность. Я начал писать первую книгу по этой теме, а позже Коваленко стал моим соавтором.

Смит: Значит, как и в случае с книгой, написанной Вами в соавторстве с Колмогоровым, первая версия была написана Вами?

Гнеденко: Да, но я думаю, что Коваленко сейчас гораздо лучший эксперт в этой области, чем я. С 1957, я работал в Вычислительном Центре Украинской АН, который теперь разросся в огромный Институт кибернетики.

Сингпурвалла: Профессор Гнеденко, у Вас много административных обязанностей?

Гнеденко: Я не люблю администрировать.

¹⁰ The 6th edition was translated by I. Ushakov and published in 1997 by Gordon and Breach Science Publication.

Сингпурвалла: Но у Вас много таких обязанностей?

Гнеденко: Много лет я был директором Института математики Украинской АН.

Сингпурвалла: И теперь Вы Заведующий кафедрой Теории вероятностей МГУ? Это ведь тоже административная должность?

Гнеденко: Не совсем. Но я предпочитаю научную работу, чтение лекций и написание книг. Мне нравится работать со студентами. У меня было больше сотни аспирантов, из которых 30 стали уже профессорами в моей стране и за рубежом, а некоторые – уже академики, среди них Скороход, Королюк, Михалевич, Григелионис, Коваленко и Ющенко.

Смит: Профессор Гнеденко, в 1960 году вы переехали из Киева в Москву. Через несколько лет Вы опубликовали Вашу знаменитую книгу в соавторстве с Беляевым и Соловьевым. Как Вы начали работать с ними?

Гнеденко: В Киеве я сотрудничал с группой инженеров, занимавшихся вопросами компьютерной медицинской диагностики. Однажды система компьютерного мониторинга сердечно-легочной деятельности отказала, вследствие чего пациент скончался. После этого случая я занялся вопросами надежности. В 1959 году из Москвы приехал навестить меня Беляев.

Сингпурвалла: Беляев Ваш ученик?

Гнеденко: Нет, он ученик Колмогорова. В 1963 году мы начали писать нашу книгу *«Математические методы в теории надежности»*.

Смит: Вы с Беляевым?

Гнеденко: И с Соловьевым.

Сингпурвалла: А Соловьев Ваш ученик?

Гнеденко: Нет, его учителем был Гельфонд, прекрасный специалист в теории функций комплексного переменного и теории чисел. В 1964 году мы закончили черновой вариант, а в 1965 книга была опубликована. С 1961 по 1968 годы я работал над теорией массового обслуживания и теорией надежности. В 1968 я переключился на предельные теоремы для случайного числа случайных величин. Мотивацией послужили проблемы, возникавшие в физике, экономике и надежности. Я сначала решил несколько практических проблем, а потом перешел к теоретическим обоснованиям. Для меня этот путь представляется весьма естественным.

Сингпурвалла: Вы имеете в виду, что сначала решаете практическую задачу, а потом разрабатываете соответствующую теорию?

Гнеденко: Да. А где-то в 1981 году я опять вернулся к истории теории вероятностей, и я написал небольшую брошюру на эту тему.

Смит: Профессор Гнеденко, вы все еще удивительно активны и пишете много книг. Могли бы Вы рассказать нам о других Ваших книгах?

Гнеденко: В последние годы я пишу примерно книгу в год.

Сингпурвалла: Сколько часов в день Вы работаете каждый день?

Гнеденко: Сейчас уже не так много, часа 4 в день.

Сингпурвалла: Я вижу, что Ваш сын не согласен с Вами. (Смеется.) Он говорит, что больше.

Дмитрий Гнеденко: Он работает часов 5-6 утром, а потом оставшийся день обдумывает то, что будет делать завтра.

Гнеденко: В этом году я написал новую книгу для студентов о том, кто такой математик. Сначала я обсудил место математики в нашей жизни, потом дал несколько примеров математических проблем с их упрощенным решением, а под конец дал примеры нескольких прикладных проблем. В качестве заключения – небольшой исторический обзор. Еще написана небольшая брошюра для школьников о математике.

Смит: Какие новые книги Вы планируете?

Гнеденко: Планы у меня грандиозные, да боюсь, что они невыполнимы. Сейчас я пишу три книги. Одна о предельных распределениях сумм случайного числа случайных величин. Однако здесь есть еще ряд нерешенных проблем, рукопись лишь наполовину завершена, хотя я надеюсь закончить ее в этом году. Вторую книгу по надежности мы пишем вместе с Ушаковым¹¹. Вот почему эта книга важна: книга *«Математические методы в теории надежности»* написана не для инженеров, это математическая книга, для инженеров она слишком сложна.

Смит: Значит, книга, которую Вы пишете с Ушаковым, более элементарна?

Гнеденко: Да, более элементарная и более практически направлена. Стиль написания примерно такой: дается содержательное описание проблемы, объясняется ее практическое значение, потом дается математическое решение практически без доказательств, а вся математика выносится в приложение в конце книги.

Третья книга, которую я также начал, я хочу закончить быстро: это учебник по случайным процессам с участием Беляева и Димитрова с Яневым из Болгарии.

Я планирую еще две книги, одна из них – мои мемуары.

Сингпурвалла: Значит, мы немного поспешили с интервью, нужно было подождать публикации Ваших воспоминаний?

¹¹ *Probabilistic Reliability Engineering* by B.V. Gnedenko and I.A. Ushakov. John Wiley & Sons, New York, 1995

Гнеденко: Я встречал в своей жизни много замечательных людей. Я работал в МГУ с выдающимися математиками, многих из которых уже нет с нами. Просто необходимо сохранить память о них.

Смит: Я уверен, что эта книга будет интересна многим.

Гнеденко: Следующая запланированная книга – для школьников: «Путешествие в страну Математика». Наконец, третья книга – это учебник по математической статистике, в котором я хотел бы дать неформальное описание математических методов. В США издается много хороших книг, но почти все они формальны, с массой результатов без каких-либо приложений. Я думаю, что практически полезной была бы книга, в которой излагались бы сами математические идеи.

Сингпурвалла: Вы написали много книг. Что является основной мотивацией для того, чтобы писать так много?

Гнеденко: Я не знаю, что и ответить...

Сингпурвалла: Вам нравится писать книги?

Гнеденко: Да, я пишу быстро и получаю удовольствие.

Сингпурвалла: Вы используете компьютер?

Гнеденко: Нет, я печатаю на машинке.

Сингпурвалла: Вы пишете один черновой вариант или работаете над рукописью долго?

Гнеденко: Обычно я пишу сразу окончательный вариант.

Сингпурвалла: Всего один? И никаких ошибок?

Гнеденко: Просто сначала надо подумать, а потом уже излагать на бумаге.

Еще одна причина, почему я пишу так много книг. Первого января мне стукнет 80 лет. 80 – не самый хороший возраст, чтобы что-нибудь откладывать на завтра. У меня есть идеи, и я должен их высказать. Без этого я не могу чувствовать себя спокойно.

Сингпурвалла: Профессор Гнеденко, в Москве у Вас есть институт¹², в котором большое число прикладных вероятностников и статистиков сотрудничают с инженерами. Не могли ли Вы рассказать нам об их взаимодействиях? Хорошо ли оно получается? Продуктивно ли оно?

Гнеденко: В 1961 году, когда я вернулся в Москву, мы вместе с несколькими инженерами организовали регулярный семинар по надежности в МГУ. За год этот семинар стал очень популярным среди инженеров, которые его посещали. В Совет семинара входили инженеры Я.М. Сорин и Я.Б. Шор, а также экономист Л.Я. Шухгальтер. Всех троих уже нет.

Это был весьма успешный семинар, его посещало около 800 человек, включая инженеров, прикладных математиков и преподавателей вузов. Многие приезжали из других городов на общественные консультации и лекции, которые читали специалисты-энтузиасты. Однако последние 5 лет при Горбачеве, наступили плохие для семинара времена.

Сингпурвалла: Почему?

Гнеденко: Интерес к надежности и качеству упал. Сейчас, я думаю, промышленность работает всего на 60% своей мощности. Все гонятся за объемом продукции, никто не интересуется ее надежностью и качеством. Это очень плохо.

Сингпурвалла: Вы говорили, что Вы встречали многих математиков в жизни. Встречались ли вы с Де Финетти?

Гнеденко: Да, когда я ездил в Италию. Я вспоминаю эту встречу с большим удовольствием. Мы беседовали с ним о субъективных вероятностях.

Сингпурвалла: И что Вы думаете об этом?

Гнеденко: Я думаю, что он был неправ. Наука не должна опираться на субъективное, она должна быть объективна. Личность важна в развитии науки, но наука не должна быть субъективной. Я много говорил на эту тему и с Де Финетти, и с Сэвиджем, который очень образованный и очень скромный человек. Я думаю, что Де Финетти и Сэвидж самые главные специалисты в этой области.

Смит: Была ли переведена книга Де Финетти на русский?

Гнеденко: Нет.

Сингпурвалла: Профессор Гнеденко, поскольку Вы не любите субъективные вероятности, из этого можно сделать вывод, что Вы не любите и Байесовскую статистику?

Гнеденко: Я думаю, что каждый метод имеет свои возможности и свои ограничения.

Сингпурвалла: Согласен с Вами.

Гнеденко: И Байесовские методы имеют свои ограничения. При решении практических задач мы должны пробовать все возможные методы. Я думаю, что Байесовские методы имеют ряд преимуществ и должны развиваться. Но не только они одни.

Сингпурвалла: Значит, Вы считаете, что Байесовские методы с объективными вероятностями приемлемы, а с субъективными - нет?

Гнеденко: Всегда нужно формулировать допущения, с которыми Вы работаете. Если необходимо, то субъективные вероятности могут рассматриваться как объективные.

Сингпурвалла: Есть у Вас в стране приверженцы Байесовских методов? Беляев писал статьи на эту тему.

¹² Singpurwalla means Moscow Consulting Center on Reliability and Quality (the so-called "Chamber of Reliability").

Гнеденко: Да, многие наши статистики используют Байесовские методы. Не использовать их невозможно – они важны.

Сингпурвалла: А Вы их используете?

Гнеденко: Да, я читаю Байесовские методы в своих курсах для студентов.

Сингпурвалла: Я хотел бы сделать несколько замечаний. Когда мы начали это интервью, Вы сказали, что Ваш отец хотел видеть Вас доктором, но Вы стали математиком. Ваш сын – математик. Это был Ваш совет ему?

Гнеденко: Но он понимает и приложения, например, в психологии. По-моему, невозможно сделать хорошую математическую работу, если нет приложений.

Сингпурвалла: Тогда, Дмитрий, может, Вы ответите на несколько вопросов. Оказал ли на Вас влияние Ваш отец?

Дмитрий Гнеденко: Да, безусловно.

Сингпурвалла: И продолжает оказывать?

Дмитрий Гнеденко: Да. Он мой первый и самый важный учитель. Конечно, у меня есть и другие, например Профессор Соловьев в теории вероятностей и профессор Журавлев в механике. Но первый и самый главный мой учитель – это мой отец.

Сингпурвалла: Писали ли Вы с Вашим отцом совместные статьи?

Дмитрий Гнеденко: Да, у нас есть несколько общих статей, и мы планируем еще статьи и книги.

Сингпурвалла: По надежности?

Дмитрий Гнеденко: Не только по надежности.

Сингпурвалла: Если будете писать книгу по надежности, не забудьте Байесовские методы!

Смит: Как бы Вы описали состояние работ по статистике в Вашей стране?

Гнеденко: У нас есть хорошие статистики. Был очень хороший – Каган, но сейчас он в США. Журбенко работает над статистикой временных рядов, но все же он больше вероятностник. Много других хороших статистиков, например, Орлов.

Смит: А что насчет Чибисова? Он хорошо известен на Западе.

Гнеденко: Но все же он ближе к вероятностникам, статистика для него вторична.

Смит: А много у вас прикладных статистиков?

Гнеденко: Я не знаю хороших прикладников. Конечно без них никакой прогресс в демографии, прикладных науках, в

промышленности, экономике и других областях просто невозможен.

Смит: Профессор Гнеденко, мы хотим поблагодарить Вас за предоставленную возможность побеседовать с нами. Мы надеемся, что Ваш визит в Соединенные Штаты будет приятным.

Сингпурвалла: Профессор Гнеденко и Дмитрий, спасибо Вам за Ваш визит к нам. Мы надеемся, что Вашингтон Вам понравится.

Гнеденко: Большое Вам спасибо.

Послесловие

Этот материал предоставлен профессором Игорем Ушаковым, который является близким другом Б.В. Гнеденко около 30 лет и помогает ему во многих сферах общественной активности в Комитете Стандартов.

Профессор Гнеденко является не только выдающимся математиком и прекрасным лектором, он также активный общественный деятель. Мне хотелось бы сказать несколько слов о тех сторонах его деятельности, которые не были в полной мере затронуты в интервью.

В начале 60-х Б.В. Гнеденко организовал семинар по надежности в МГУ. Этот семинар объединил специалистов из промышленности и математиков, которые занимались различными аспектами надежности и качества. Этот семинар дал путевку в жизнь десяткам специалистов по надежности. Спустя некоторое время Яков Михайлович Сорин организовал Кабинет качества и надежности Госстандарта, который размещался в Политехническом музее Москвы, бывшим всегда традиционным центром научного и культурного просвещения. Б.В. Гнеденко стал научным руководителем этого Кабинета и привлек для сотрудничества десятки докторов и кандидатов наук, которые давали ежедневные консультации инженерам по практическим вопросам надежности и читали еженедельные циклы лекций по теории надежности. Кабинет надежности и качества – этот уникальный общественный консультационный центр – просуществовал более четверти века. Можно сказать, что без сомнения эта общественная организация породила то, что стали называть советской школой надежности. Именно Б.В. Гнеденко был тем, кто сумел объединить всех в тесную группу научных единомышленников.

Научная щедрость Б.В. Гнеденко отражена уже в том, что он воспитал более 100 кандидатов наук, из которых многие стали профессорами и академиками.

Один из малоизвестных широкому кругу людей эпизодов из жизни Гнеденко был затронут в интервью. Это история с арестом Б.В. Гнеденко по обвинению в контрреволюционной деятельности. Ни Гнеденко, ни Колмогоров никогда об этом не говорили. Я узнал об этом много лет назад от жены Бориса Владимировича – Наталии Константиновны. Рассказав мне об этом, она сказала: "Игорь, только, пожалуйста, никому об это не рассказывайте, Ни Борис, ни Андрей Николаевич не любят

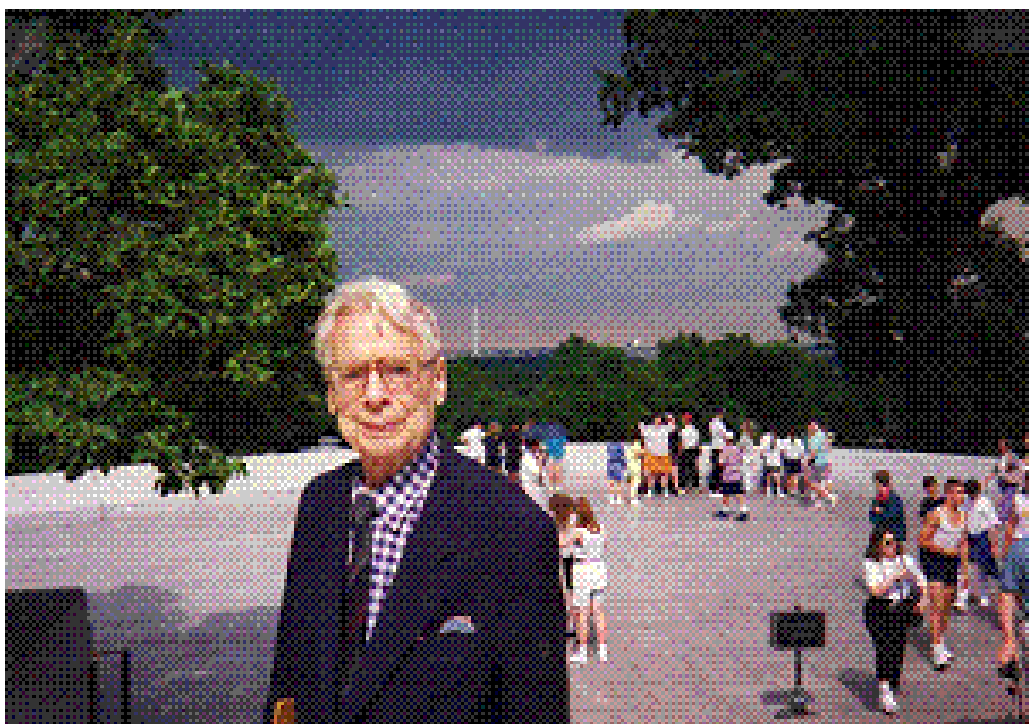
афишировать их глубокие личные взаимоотношения". Поскольку Борис Владимирович сам поведал об этом во время интервью, и я смог сказать теперь об этом.

Б.В. Гнеденко истинный представитель русской интеллигенции. Он читает массу художественной литературы, хорошо знает поэзию. В его домашней библиотеке огромное число альбомов с репродукциями из различных музеев мира. Он не любитель современного искусства, но вполне терпимо к такой живописи относится. Вообще терпимость к чужому мнению, к взглядам других — одна из основных его черт. Он любит «классическую классику»: Баха. Моцарта, Бетховена, Чайковского,

Рахманинова. У него хорошая коллекция русской церковной музыки. И, конечно же, собрание прекрасных русских романсов...

Борис Владимирович прекрасный рассказчик, у него плавная, артистичная речь. В то же время он удивительно внимательный слушатель. Все это делает отношения с ним простыми и приятными для всех, кто его знает. Это сочетание высочайшего профессионализма и высоких личных качеств делает профессора Гнеденко весьма заметной фигурой среди ученых и педагогов нашего времени

Фото внизу: Б.В. Гнеденко в Вашингтоне (США), 1991 год.



This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

