

**В. П. Обоскалов**

---

# **СТРУКТУРНАЯ НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**



**Екатеринбург  
2012**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

**В. П. Обоскалов**

# **СТРУКТУРНАЯ НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Рекомендовано методическим советом УрФУ  
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся*

Екатеринбург  
УрФУ  
2012

УДК 621.311.019.3

ББК

О-14

Рецензенты: кафедра «Электрооборудование и автоматизация промышленных предприятий» Российского государственного профессионально-педагогического университета (зав. кафедрой канд. техн. наук, доц., И. Л. Щеклеина);  
д-р техн. наук, проф. П. М. Ерохин;  
д-р техн. наук, проф. Ф. Н. Сарапулов.

Обоскалов, В. П.

О-14 Структурная надежность электроэнергетических систем: Учеб. пособие / В. П. Обоскалов. – Екатеринбург: УрФУ, 2012. – 194 с.

ISBN 978–5–321–02195–8

Монография посвящена оценке структурной надежности электроэнергетических систем (ЭЭС). В ней обсуждаются общие подходы, используемые при расчетах надежности сложных технических систем, показывается специфика ЭЭС, описываются основные методы определения показателей структурной надежности. Подробно рассматриваются процедуры вероятностного эквивалентирования процессов отказа системы электроснабжения узлов электропотребления. Отказы элементов и подсистем ЭЭС подразделяются на два класса: отказы типа «обрыв» и типа «короткое замыкание». Разработаны математические модели эквивалентирования, характеризующие каждый тип отказов. Представленные процедуры эквивалентирования направлены на их использование в расчетах на ЭВМ.

Отличительной чертой книги является ее учебно-методическая направленность, изложение материала, соответствующее дисциплине «Надежность ЭЭС», изучаемой студентами электроэнергетических специальностей вузов. При этом основное внимание уделено проблемной стороне обсуждаемых явлений и режимов работы электроэнергетических систем.

Адресована всем, кто интересуется теоретическими вопросами надежности сложных систем, но в основном предназначена для студентов, аспирантов и слушателей курсов повышения квалификации специальностей ГОС 140200 «Электроэнергетика», ФГОС 140400 «Электроэнергетика и электротехника».

Библиогр.: 57 назв.      Табл. 28      Рис. 101      Прил. 2

УДК 621.311.019.3

ББК

ISBN 978–5–321–02195–8

© Уральский федеральный университет, 2012

© Обоскалов В.П., 2012

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Актуальность методологических, методических и расчетных проблем надежности электроэнергетических систем (ЭЭС) определяется прежде всего постоянным развитием ЭЭС и изменением условий их функционирования. Несмотря на активное формирование теории надежности ЭЭС во второй половине XX века, расчеты, связанные с надежностью электро- и энергоснабжения потребителей, еще не находят должного применения в проектной и эксплуатационной практике. Частично это объясняется несовершенством существующих расчетных процедур, вызванным чрезвычайно большим многообразием анализируемых аварийных ситуаций в ЭЭС, большой неопределенностью исходных данных и, безусловно, отсутствием простых по интерфейсу программ, в полной мере учитывающих свойства надежности ЭЭС.

Именно на создание новых процедур расчета показателей надежности (ПН) ЭЭС и разработку более совершенных программных комплексов ориентированы научно-исследовательские работы на кафедре автоматизированных электрических систем УрФУ (УПИ), начатые в 80-х годах XX века.

Основой теории надежности является теория вероятности, поскольку априори здесь рассматриваются события, которые могут произойти или нет. Функции распределения, с которыми оперируют вероятностные методы, являются лишь инструментарием при описании реальных процессов, приемлемым только с некоторыми оговорками. Отсюда возникает проблема вероятностного моделирования, сущность которого составляют выбор надлежащих функций распределения и разработка вычислительных процедур для получения результирующих оценок. Практически все исследователи в области теории надежности ЭЭС так или иначе сталкиваются с проблемой вероятностного эквивалентирования. В работах кафедры АЭС вероятностное моделирование процессов отказа системы электроснабжения потребителей является как инструментарием, так и объектом исследования.

В зависимости от системы допущений и ограничений, а также от используемого математического аппарата задачи расчета ПН (свойство безотказности) условно могут быть разделены на три группы, характеризующие надежность ЭЭС: структурная (схемная), режимная (функциональная) и балансовая надежности.

При расчете показателей структурной надежности (СН) считается, что отказа электроснабжения узла нагрузки нет, если существует хотя бы один путь, связывающий данный узел с источником питания. Здесь принимается допущение о бесконечной пропускной способности межузловых связей и игнорируются ограничения режимных параметров. Основным математическим аппаратом при анализе СН ЭЭС является общая теория надежности технических систем. В настоящее время упомянутый раздел теории надежности ЭЭС можно считать в большей части изученным. В рамках этого направления на кафедре был создан программно-вычислительный комплекс (ПВК) «Струна» («структурная надежность»). За основу был принят метод вероятностного эквивалентирования [1], который позволил получать ПН за относительно ко-

роткое время (в темпе процесса), включать задачу надежности в состав более сложных функциональных процедур в виде некоторого расчетного модуля. Математический и алгоритмический аппарат «Струны» отлажен научными исследованиями А. С. Дулесова [2] и О. М. Котова [3].

Эксплуатация «Струны» показала необходимость ее постоянного совершенствования прежде всего в направлении расширения числа реально учитываемых факторов. В частности, первые версии ПВК не учитывали направленность энергетических потоков. Это приводило к завышенным оценкам показателей надежности электрической сети повышенного напряжения, поскольку сеть более низкого напряжения рассматривалась как параллельная, резервирующая. Учет энергетической направленности потребовал разработки методов вероятностного эквивалентирования расчетных схем с направленными связями. Это дополнительно позволило определять ПН сложных событий, таких как одновременный отказ заданного множества узлов электропотребления.

Принципиально важным моментом в развитии ПВК явилось включение в его состав модуля учета отказов типа «короткое замыкание», который позволил учесть кратковременные события длительностью, определяемой временем оперативных переключений в энергосистеме и имеющих практически нулевую вероятность. На первый план здесь выходит такой ПН, как частота отказов.

Другим направлением исследований на кафедре является балансовая надежность (БН) ЭЭС, которая лежит в основе задач, связанных с оптимизацией резервов мощности. Вероятностные характеристики дефицита мощности необходимы для обоснования инвестиций в генерирующую и сетевую часть энергосистем. Несмотря на то, что развитие теории надежности ЭЭС началось именно с БН, данное направление, по мнению автора, еще далеко до завершения. В области расчетов БН научные исследования на кафедре выполнялись также в направлении вероятностного эквивалентирования и в большей части оформлены в учебных пособиях [4, 5].

В настоящее время издано достаточно большое число учебников по теории надежности, например [6–10]. Для более глубокого изучения проблем надежности ЭЭС имеется ряд основополагающих монографий отечественных и зарубежных авторов [11–33]. Однако, как правило, эти учебники и монографии проблемно ориентированы, имеются в ограниченном доступе и недостаточно полно описывают процедуры вероятностного эквивалентирования. Именно отсутствие базового учебника по СН, вписывающегося в методологию исследований и преподавания теории надежности на кафедре АЭС УрФУ, а также необходимость обобщения накопленных знаний в области вероятностного эквивалентирования СН ЭЭС стали основной причиной написания учебного пособия. Автор полагает, что представленная работа будет полезна студентам и аспирантам при освоении дисциплины «Надежность ЭЭС».

## ВВЕДЕНИЕ

Каждый технический объект характеризуется некоторой совокупностью свойств и функций. Именно эти свойства — как каждое в отдельности, так и в их взаимосвязи — представляют непосредственный интерес, определяют сущность объекта, его неповторимость и индивидуальность. Среди технических свойств особое положение занимает надежность. Надежность — это свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность объекта выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях регламентированного технического обслуживания, хранения и транспортирования.

Надежность занимает доминирующее положение среди иных свойств объекта прежде всего потому, что если объект ненадежен, то все остальные его свойства теряют свою значимость. При этом если в отношении обычных свойств можно сказать, проявляется ли это свойство в рассматриваемый момент времени и соответствует ли оно установленным требованиям, то с надежностью дело обстоит гораздо сложнее. Если в какой-то момент времени объект перестал выполнять заданные функции, то еще нельзя делать какие-либо категорические выводы о его надежности.

Отказ объекта является случайным событием, происходящим часто или редко в некоторые произвольные моменты времени. Отсюда надежность объекта как его свойство основана на анализе вероятностных (стохастических) процессов, происходящих с объектом. При этом многие процессы носят обобщающий характер и присущи целому классу объектов (интенсивность отказов примерно одинакова для всех энергоагрегатов, работающих на угле). Это облегчает инженерную оценку ПН отдельных объектов путем распространения на них свойств класса. Без этого допущения принципиально невозможна адекватная оценка надежности конкретных объектов, поскольку для этого требуется весь его жизненный цикл, а апостериорная оценка его надежности теряет смысл. В то же время для оценки какого-либо свойства класса требуется большой объем статистических данных, получаемых при испытаниях или наблюдениях не одного, а многих однотипных объектов.

Оборотной стороной обобщения является потеря индивидуальности условий функционирования (ПН объектов берутся из справочной литературы на базе статистики для страны в целом, хотя условия эксплуатации на отдаленном севере отличаются от условий эксплуатации на юге). Возникает задача коррекции ПН объектов в зависимости от условий их эксплуатации.

Теория надежности технических систем — это относительно молодая и активно развивающаяся наука. С конца 40-х — начала 50-х годов XX столетия на почве бурно развивающейся техники (прежде всего военной и радиоэлектронной) теория надежности оформилась как научное направление. Основным стимулом ее развития послужило резкое количественное и качественное усложнение техники, снижение внутренних запасов ресурса технических устройств и предъявление все более высоких требований к их надежности с учетом всей совокупности режимов их использования. Структурная и

функциональная сложность технических систем приводит к существенному увеличению затрат на компенсацию последствий отказов, которые часто имеют глобальный характер (например, системные аварии в электроэнергетике).

Неработающее из-за отказа оборудование — это нарушение технологического процесса, снижение количества выпускаемой продукции, невыполнение иных жизненно важных функций, возложенных на системы. Надежная система — это частые отказы и, следовательно, большие расходы на ее ремонт, производство и хранение запасного оборудования, на изготовление новых систем. Нередко ненадежность является причиной гибели людей.

Непосредственным предметом исследования надежности являются технические, технологические, информационные и другие системы, функционирующие во времени. Необходимость численного описания свойств надежности для принятия инженерных решений стало основным стимулом развития применяемых в теории надежности математических моделей и методов. Основным аппаратом математической теории надежности является теория вероятностей, теория случайных процессов и математическая статистика.

Одной из наиболее сложных технических систем является электроэнергетическая система (ЭЭС) — динамическая система кибернетического типа, обладающая чрезвычайно большим числом элементов, несопоставимая с какими-либо иными техническими системами по территориальным размерам и разнообразию функциональных свойств. Обеспечение надежности и эффективности функционирования ЭЭС затрагивает интересы подавляющего большинства жителей планеты. Поэтому для адекватного управления процессами производства, транспорта и потребления электрической энергии требуется детальный математический и инженерный анализ свойства надежности ЭЭС.

Как уже было упомянуто, максимальная интенсивность научных исследований по теории надежности сложных технических систем приходится на вторую половину 40-х годов XX века. Во время второй мировой войны особенно наглядно проявилась несостоятельность бытовавшего в ту пору подхода к оценке надежности сложной системы как цепи со слабым звеном. Считалось, что в сложной системе, как в многозвенной цепи, имеется самый ненадежный элемент, который должен отказать первым при увеличении нагрузки системы. Однако реально оказывалось, что надежность сложных систем, где каждый элемент обладал исключительно высокой надежностью, в целом была относительно низкой.

В послевоенный период начинает бурно развиваться космическая техника, которая предъявляет исключительно высокие требования к надежности систем автоматического управления дорогостоящих ракет и космических аппаратов. Существующие подходы по оценке надежности перестали удовлетворять практике. Логическим завершением стали качественные изменения в теории надежности, базой для которых явилась теория вероятности.

Полученные научные результаты позволили расширить сферу использования теории надежности технических систем на отраслевые направления. В частности, начала бурно развиваться теория надежности энергетических

систем. Максимум научных публикаций по теории надежности ЭЭС приходится на середину 80-х годов XX столетия. Достаточно полный библиографический обзор по теории надежности можно найти в [12, 28]. К сожалению, следует отметить, что и сегодня инженерная практика пока не обладает достаточно хорошим инструментарием по анализу и синтезу надежности ЭЭС.

Рыночные отношения, полная хозяйственная и финансовая самостоятельность предприятий неизбежно приводят к упорядочению юридических и финансовых отношений между субъектами рынка. В части надежности ЭЭС это проявляется, например, в зависимости платежей от уровня надежности электроснабжения потребителей (надежность как услуга, предоставляемая потребителям). В то же время регулирующее воздействие рынка не снижает, а повышает значимость и актуальность совершенствования методов расчета ПН ЭЭС, поскольку требуется более точная идентификация причин отказов и определение ответственности за их появление.

Развитие ЭЭС сопровождается повышением их сложности и большей структурной и функциональной взаимосвязанностью составляющих частей и элементов. Расширяется множество состояний ЭЭС, которые могут привести к крупным системным авариям. В середине 80-х годов XX века каскад системных аварий в ряде западных ЭЭС (США, Канада, Франция, Бельгия, Швеция и др.), где каждое из исходных событий, приведших к аварии, имело практически нулевую вероятность, заставил электроэнергетиков уделить более серьезное внимание маловероятным событиям. Здесь следует иметь в виду, что с увеличением числа элементов в системе происходит сдвиг максимальной вероятности в сторону многократных отказов. Появляется необходимость расширения спектра учитываемых событий, повышается значимость расчетов ПН на ЭВМ.

Данная работа состоит из четырех глав. В первой главе описываются базовые методы расчета показателей структурной надежности технических систем вообще и электротехнических систем в частности. Особое внимание уделено диаграммам состояний, которые незаменимы при анализе динамически развивающихся вероятностных процессов, а также лежат в основе большинства расчетных процедур.

Во второй и третьей главах рассматривается расчет показателей структурной надежности сложных ЭЭС с отказами элементов типа «обрыв». При этом за основу принимается метод вероятностного эквивалентирования сложных структур.

В четвертой главе описывается математический аппарат расчета показателей надежности ЭЭС с отказами элементов типа «короткое замыкание». Данный тип отказов более значим для сложноразветвленных ЭЭС с выключателями, которые могут отказать в отключении электрической цепи при появлении требования на отключение внешнего короткого замыкания. В результате наблюдается цепочечное развитие отказа.

В приложениях приводятся базовые сведения из теории вероятности и общей теории надежности.

# 1. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ

## 1.1. Случайный процесс состояний ЭЭС

В теории структурной надежности состояния системы в произвольный момент времени рассматриваются как дискретные и определяются той или иной совокупностью состояний элементов  $\{x_i\}$ , входящих в состав системы,  $S(t) = \bar{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ , где  $t$  — параметр рассматриваемого процесса, как правило, это — время. При этом считается, что каждый элемент может находиться в одном из двух состояний — работа ( $x_i(t) = 1$ ) или отказ ( $x_i(t) = 0$ ). Таким образом, процесс функционирования каждого элемента может рассматриваться как альтернирующий — работоспособное состояние (элемент включен,  $x_i(t) = 1$ ) и состояние аварийно-восстановительного ремонта (элемент отключен,  $x_i(t) = 0$ ) (рис. 1.1).

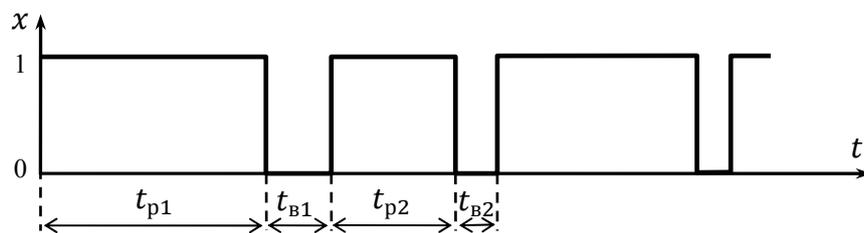


Рис. 1.1. Альтернирующий процесс функционирования элемента

Длительности того или иного состояния (работа, восстановление) являются непрерывными случайными величинами. Процессы, где длительности состояний (следовательно, и сами состояния) являются случайными величинами, обычно называются стохастическими, вероятностными или случайными процессами.

В сущности, стохастический процесс представляет собой множество случайных величин, образующих упорядоченную последовательность. Например, длительности безотказной работы и восстановления образуют последовательность случайных значений, так что эту последовательность можно рассматривать в качестве стохастического процесса.

Параметр  $t$  (время) может быть непрерывным (как в рассматриваемом случае) или дискретным (что часто используется для практических расчетов динамических процессов). Дискретный параметр может принимать конечное или бесконечное число значений, непрерывный параметр, естественно, может принимать только бесконечное число значений. Значения, принимаемые случайными величинами, образуют пространство состояний. Это пространство, в свою очередь, может быть дискретным (состояния элементов ЭЭС) или непрерывным (располагаемый ресурс электротехнического устройства).

Вероятности реализаций случайных величин  $X(t)$  в общем случае зависят от значений, принятых всеми случайными величинами до момента  $t$ , т. е. от предшествующего протекания процесса. Однако для практических расчетов большой интерес представляет класс стохастических процессов, которые обладают следующей особенностью, демонстрируемой для дискретно-

го параметра  $\{t_1 < t_2 < \dots < t_n\}$ , — вероятность того, что в момент  $t_n$  случайная величина (вектор) примет значение  $X_n$ , не зависит от состояний  $\{X_1, X_2, \dots, X_{n-2}\}$ :

$$P(X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = P(X_n | X_{n-1}). \quad (1.1)$$

Процессы, обладающие этим свойством, называют марковскими. Итак, в марковском процессе вероятность состояния системы в следующий момент времени не зависит от того, как случайный процесс протекал в прошлом, а зависит только от состояния, в котором процесс находится в настоящий момент. Такой процесс называют *процессом без последствия*.

В марковском процессе и параметр, и пространство состояний могут быть как дискретными, так и непрерывными. Марковский процесс с дискретным параметром называют *цепью Маркова*. Здесь определяющей является вероятность того, что в момент  $t + \Delta t$  система окажется в состоянии  $X_j$  при условии, что в момент  $t$  система находилась в состоянии  $X_i$ , т. е.

$$P\{X(t + \Delta t) = X_j | X(t) = X_i\} = p_{ij}(t, \Delta t).$$

Эти условные вероятности называют *вероятностями переходов*. Если  $p_{ij}$  не зависят от  $t$ , а зависят только от шага по времени  $\Delta t$ , то процесс называют однородным. Для малых значений  $\Delta t$  вероятности переходов в однородном марковском процессе пропорциональны  $\Delta t$ :

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \Delta t, \quad (1.2)$$

а вероятность отсутствия переходов (смены состояния):

$$P\{X(t + \Delta t) = X_i | X(t) = X_i\} = p_{ii}(\Delta t) \approx 1 - \lambda_i \Delta t. \quad (1.3)$$

Величины  $\lambda_{ij}$  и  $\lambda_i$  называют интенсивностями переходов. Их можно определить соответственно как

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}; \quad \lambda_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

В однородном марковском процессе интенсивности переходов постоянны (не зависят от времени).

Марковские процессы относятся к классу стационарных процессов. Случайный процесс называется *стационарным*, если распределения вероятностей инвариантны относительно сдвига по параметру  $t$ :

$$\begin{aligned} P\{(X_1, t_1 + t_0), (X_2, t_2 + t_0), \dots, (X_n, t_n + t_0)\} = \\ = P\{(X_1, t_1), (X_2, t_2), \dots, (X_n, t_n)\}. \end{aligned}$$

При анализе структурной надежности ЭСС в основном рассматриваются стационарные процессы марковского типа. Процесс отказа-восстановления элемента ЭЭС (состояние — бинарная случайная величина) может быть представлен как последовательность длительностей рабочего (наработка на отказ) и ремонтного состояний:

$$S(t) = \{(t_{p1}, t_{в1}), (t_{p2}, t_{в2}), \dots, (t_{pn}, t_{вn})\},$$

где пара  $(t_{pi}, t_{vi})$ ,  $i = 1, \dots, n$  образует цикл «работа–восстановление». Поскольку марковские процессы являются процессами «без последствия», то суммарные длительности цикла  $\{t_{pi} + t_{vi}\}$  являются независимыми случайными величинами, и в силу стационарности они описываются одинаковым законом распределения. Одинаковыми законами распределения  $F(t_p)$ ,  $F(t_v)$  описываются и составляющие цикла —  $t_{pi}$ ,  $t_{vi}$ .

## 1.2. Показатели структурной надежности

**Интенсивность отказа.** Как правило, длительность безотказной работы описывается экспоненциальным распределением:

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp(-\lambda t), \quad (1.4)$$

где  $\lambda$  — интенсивность отказа. Здесь математическое ожидание (МО) и среднеквадратическое отклонение длительности безотказной работы одинаковы  $T_p = \sigma_p = 1 / \lambda$ .

В общем случае интенсивность отказов  $\lambda(t)$  непостоянна во времени. Параметр интенсивности является производным от функции распределения:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = -\frac{dR(x)}{R(x)},$$

где  $f(x)$  — функция плотности распределения случайной величины;  $R(x) = 1 - F(x)$  — дополнительная функция распределения, которая применительно к длительности безотказной работы носит название функции надежности.

Рассматривая распределение во времени, интегрируя и принимая  $R(0) = 1$ , получаем важное в теории восстановлений соотношение:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right). \quad (1.5)$$

Экспоненциальное распределение отражает частный случай, когда  $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ . Реальные технические объекты характеризуются корытообразной формой функции  $\lambda(t)$  (рис. 1.2). Период эксплуатации условно подразделяется на три интервала:  $A$  — начальный — период, где  $\lambda(t)$  имеет ниспадающий характер, а отказы чаще всего случаются из-за заводских дефектов, и где, как правило, завод несет ответственность за надежность изделия в виде гарантийного ремонта;  $B$  — центральный (основной эксплуатационный период), где  $\lambda(t) \approx \text{const}$ , и  $C$  — период старения, где  $\lambda(t)$  возрастает во времени.

Безусловно, описанные процессы характерны на всем периоде функционирования объекта: заводские дефекты могут проявиться через много лет после окончания срока гарантийного ремонта, а старение изоляции начинается с первого дня эксплуатации объекта. Те и другие процессы могут рассмат-

риваться как экспоненциальные, а в результате комбинации распределений образуется корытообразная форма  $\lambda(t)$  объекта в целом.

Кривая (рис. 1.2) была первоначально получена при обработке данных переписи населения, и упомянутые периоды интерпретировались следующим образом:  $A$  — период детской смертности,  $B$  — смертность в зрелом возрасте из-за болезней и несчастных случаев,  $C$  — старость. Но, как оказалось впоследствии, эта кривая вполне приемлема не только для описания жизненного цикла человека и технических систем, но и для биологических, социальных, политических и иных систем и явлений.

Экспоненциальным распределением, как правило, описываются те элементы технических систем, отказы которых не зависят от характера и длительности предшествующей работы (период  $B$ ), т. е. отказы возникают из-за появления непредвиденных, нерасчетных ситуаций (КЗ, обрыв связи, случайный спрос на обслуживание, стихийное явление, диверсия и др.). Однако это распределение можно использовать для систем и элементов с регламентированным обслуживанием (рис. 1.3).

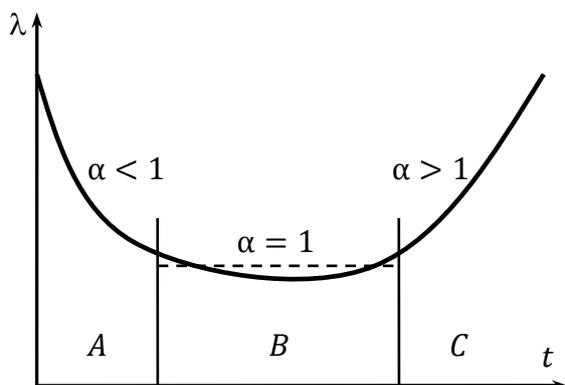


Рис. 1.2. Интенсивность отказов реальных объектов

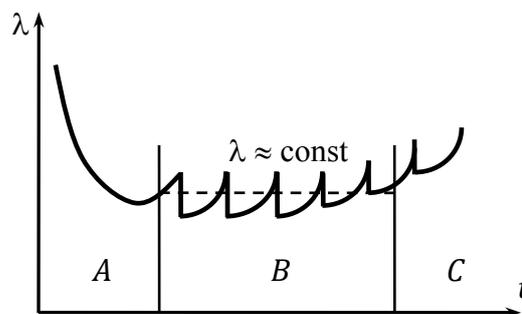


Рис. 1.3. Интенсивность отказов объектов с регламентированным ремонтом

Считается, что в результате ремонта ресурс элемента (системы) восстанавливается полностью (или почти полностью). Небольшие изменения интенсивности отказов на межремонтном периоде обычно игнорируются, и тогда интенсивность отказов условно можно считать постоянной.

Исследования показали, что для длительности восстановления  $t_B$  больше подходит нормальное, нежели экспоненциальное распределение. Но поскольку  $t_B \ll t_p$ , то характер распределения случайной величины  $t_B$  мало сказывается при описании процессов восстановления на длительном отрезке времени. Поэтому в структурной надежности для возможности применения модели марковских процессов делается допущение об экспоненциальности распределения не только  $t_p$ , но и  $t_B$ .

**Параметр потока отказов.** Экспоненциальное распределение часто используется как составное для формирования моделей отказов стареющих объектов (случайные процессы с накоплением, которые представляются как многостадийные, причем каждая стадия описывается экспоненциальным

распределением). В качестве примера можно привести длительность безотказной работы высоковольтного выключателя с ограниченным числом отключений КЗ. При этом длительность периода между смежными КЗ подчинена экспоненциальному распределению. Однако суммарный период до отказа подчиняется уже гамма-распределению. При анализе поведения данного конкретного элемента, безусловно, отдается предпочтение более точному закону, но для описания системы в целом, где роль отдельного элемента незначительна, также делается допущение об экспоненциальности распределения длительности безотказной работы с параметром  $\lambda/k$ , где  $k$  — число стадий многостадийного процесса. Данное заключение можно распространить на большинство устройств с ограниченным ресурсом.

В теории восстановления [35] рассматриваются стационарные процессы с мгновенным восстановлением и одной и той же функцией распределения  $f(t)$  для всех периодов безотказной работы (простой процесс восстановления). При этом представляет интерес ряд числовых характеристик: длительность до  $r$ -го восстановления; число восстановлений  $N_t$  за время  $t$  (случайная величина); число восстановлений  $N_{t_1, t_2}$  на интервале времени  $(t_1, t_2)$ ; функция восстановления  $H(t)$ , определяемая как математическое ожидание  $N_t$ :  $H(t) = M(N_t)$ ; плотность восстановления

$$h(t) = H'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{M(N_{t, t+\Delta t})}{\Delta t}.$$

Формулы для характеристик процесса восстановления принимают очень простой и ясный вид для пуассоновского случайного процесса, когда длительность периода безотказной работы описывается экспоненциальным распределением с плотностью распределения вероятности

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Процесс становится стационарным. Поскольку  $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ , то вероятность того, что отказ произойдет в интервале  $(t, t + \Delta t)$ , не зависит от  $t$ . Число восстановлений  $N_t$  за время  $t$  имеет пуассоновское распределение со средним  $\lambda t$ :

$$P(N_t = m) = \frac{\lambda t^m}{m!} e^{-\lambda t}, \quad m = 0, 1, \dots$$

В модели значимого аварийного восстановления наиболее интересной величиной является параметр потока отказов

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{P(X(t + \Delta t) = 0 \mid X(t) = 1)}{\Delta t}.$$

Для пуассоновского случайного процесса

$$\omega(t) = \lambda = \text{const}. \quad (1.6)$$

В справочниках по надежности, как правило, указывается именно параметр потока отказов, а в математических моделях используется интенсив-

ность отказов. И та и другая величины имеют одинаковую размерность 1/год или 1/месяц. В чем разница? Соотношение (1.6) показывает, что допущение об идентичности параметров  $\omega$  и  $\lambda$  справедливо при допущении того, что случайный процесс восстановления является пуассоновским, а длительность восстановления неизмеримо меньше длительности безотказной работы.

**Частота и продолжительность состояний.** Как было отмечено ранее, процесс функционирования элемента системы является циклическим (периодическим) со средним временем цикла (MTBF — Mean time between failures)  $\bar{T}_c = \bar{T}_p + \tau$ , где  $\bar{T}_p$ ,  $\tau$  — математические ожидания длительностей работы и восстановления.  $\bar{T}_p$  часто называется «наработка до отказа» (MTTF — Mean time to failure). Для экспоненциального распределения  $t_p$ ,  $t_b$  с параметрами (интенсивностями)  $\lambda$ ,  $\mu$  математические ожидания  $\bar{T}_p = 1/\lambda$ ,  $\tau = 1/\mu$ .

$$\bar{T}_c = \bar{T}_p + T_b = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu}.$$

Всякий периодический процесс описывается частотой. Для процесса отказов также можно определить частоту

$$f = \frac{1}{\bar{T}_c} = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Принимая во внимание, что вероятность  $P_i$  какого-либо состояния  $i$  объекта определяется как относительная длительность этого состояния, вероятность работоспособного состояния определяется как

$$P_p = \frac{\bar{T}_p}{\bar{T}_c} = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{f}{\lambda};$$

$$P_b = \frac{\tau}{\bar{T}_c} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{f}{\mu}.$$

Из данных соотношений через вероятности и интенсивности состояний можно выразить частоту

$$f = P_p\lambda = P_b\mu. \quad (1.7)$$

Таким образом, частота цикла восстановления совпадает с интенсивностью отказа с точностью до вероятности работоспособного состояния, которая для реальных технических устройства близка к единице.

В сложной системе с большим числом элементов и состояний переход из состояния  $i$  в состояние  $j$  связан с некоторым единичным событием (отказ или восстановление какого-то элемента), описываемым экспоненциальным законом длительности безотказной работы или восстановления с параметром  $\lambda_{ij}$ . При этом частоту  $f_i$  состояния  $i$  можно представить как сумму частот перехода системы из рассматриваемого состояния  $i$  в другие состояния,  $f_i = \sum_{j \neq i} f_{ij}$ , причем  $f_{ij}$  согласно (1.7) определяется через вероятность и интенсивность  $f_{ij} = \lambda_{ij}P_i$ .

Отсюда

$$f_i = \sum_{j \neq i} f_{ij} = P_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}. \quad (1.8)$$

Принимая во внимание, что вероятность отдельного состояния системы определяется отношением средней длительности  $T_i$  пребывания системы в рассматриваемом состоянии к МО длительности  $T_{ci}$  цикла ( $P_i = T_i/T_{ci} = T_i f_i$ ), нетрудно получить математическое ожидание длительности  $T_i$  состояния  $i$

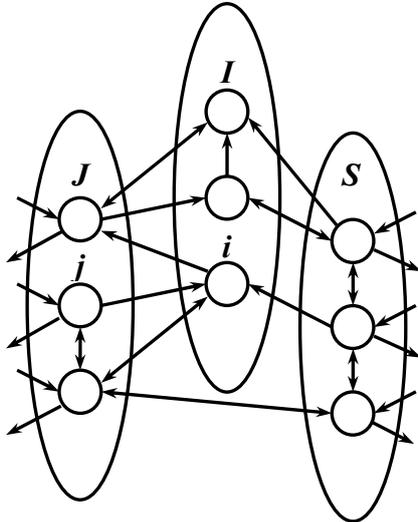


Рис. 1.4. Обобщенная диаграмма состояний

$$T_i = \frac{P_i}{f_i} = \frac{1}{\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}},$$

т. е. средняя продолжительность пребывания системы в некотором состоянии равна обратной величине суммарной интенсивности выходов из этого состояния.

**Объединение состояний.** Как правило, понятие отказа системы идентифицируется с некоторым множеством состояний (не всякий отказ элемента приводит к отказу системы), поэтому при определении показателей, характеризующих отказ системы, следует рассмотреть расчет показателей надежности некоторого объединенного состояния. Рассмотрим схему на рис. 1.4, в которой несколько состояний объединены в одно совокупное состояние  $I$ . Вероятность этого состояния равна сумме вероятностей всех составляющих событий (все события считаются независимыми).

Частота появления объединенного состояния  $I$  равна сумме частот перехода из состояний  $i \in I$  в любые другие состояния, не принадлежащие множеству  $I$ :

$$f_I = \sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} f_{ij} = \sum_{i \in I} P_i \sum_{j \notin I} \lambda_{ij}.$$

Рассмотрим связь объединенного состояния  $J$  с любым состоянием  $i$ , не принадлежащим  $J$ .

Интенсивность  $\lambda_{ij}$  переходов из единичного состояния  $i \in I$  во множество состояний  $J$  можно определить исходя из того, что частота переходов из состояния  $i$  в объединенное состояние должна быть такой же, как суммарная частота переходов от  $i$  ко всем единичным состояниям  $j \in J$ :

$$f_{ij} = \sum_{j \in J} f_{ij} = P_i \sum_{j \in J} \lambda_{ij}.$$

Аналогично можно определить интенсивность перехода из объединенного состояния  $J$  к единичному  $i$ :

$$f_{ji} = \sum_{j \in J} f_{ji} = \sum_{j \in J} P_j \lambda_{ji}.$$

По аналогии с (1.8) полученные частоты можно записать через эквивалентные интенсивности переходов

$$f_{ij} = P_i \lambda_{ij}; \quad f_{ji} = P_j \lambda_{ji}.$$

Отсюда

$$\lambda_{ij} = \sum_{j \in J} \lambda_{ij}; \quad (1.9)$$

$$\lambda_{ji} \frac{\sum_{j \in J} P_j \lambda_{ji}}{\sum_{j \in J} P_j}. \quad (1.10)$$

Таким образом, интенсивность перехода из отдельного состояния в объединенное равна сумме интенсивностей перехода из данного состояния в состояния, входящие в объединение. Интенсивность перехода из объединенного состояния в некоторое отдельное равна средневзвешенной интенсивности, где весовыми коэффициентами являются вероятности состояний.

Обобщая рассмотренный случай связи множества и отдельного состояния на случай связи двух множеств, имеем

$$\lambda_{IJ} = \frac{f_{IJ}}{P_I} = \frac{\sum_{i \in I} f_{ij}}{P_I} = \frac{\sum_{i \in I} P_i \sum_{j \in J} \lambda_{ij}}{\sum_{i \in I} P_i};$$

$$\lambda_{JI} = \frac{f_{JI}}{P_J} = \frac{\sum_{j \in J} f_{ji}}{P_J} = \frac{\sum_{j \in J} P_j \sum_{i \in I} \lambda_{ji}}{\sum_{j \in J} P_j}.$$

Эти формулы по своей структуре совпадают с (1.9), (1.10), однако здесь вместо отдельного состояния записано объединенное. Представленные формулы позволяют выполнять объединение состояний с указанием показателей переходов между объединенными состояниями.

### 1.3. Метод пространства состояний

Рассматриваемый метод является основным при анализе динамически развивающихся вероятностных процессов. Однако он широко используется и для анализа стационарных состояний сложных систем.

Для оценки надежности системы методом пространства состояний необходимо сначала описать данную систему ее состояниями и возможными переходами между этими состояниями. Состояние системы определяется состоянием каждого элемента системы: элемент либо исправен, либо находится в состоянии отказа, либо подвергается принудительному ремонту и т. п.

Если изменяется состояние хотя бы одного элемента, то и система, в состав которой входит данный элемент, переходит в новое состояние. Совокупность всех возможных состояний системы образует пространство состояний. Диаграмма состояний отражает возможные переходы из одного состояния в другое. В качестве примера на рис. 1.5 изображена диаграмма состояний системы из двух независимых элементов, где состояние *ab* соответствует

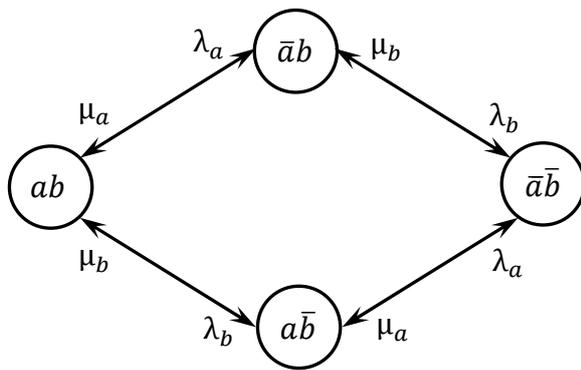


Рис. 1.5. Диаграмма состояний двух независимых элементов

готовности элементов  $a$  и  $b$ , состояние  $\bar{a}b$  — готовности  $b$  и неготовности  $a$  и т. д.

Специфической особенностью метода пространства состояний является его тесная функциональная связь со стационарными случайными процессами, для которых необходимо выполнение трех основных свойств:

- вероятность перехода из одного состояния в любое другое не зависит от того, как система попала в исходное состояние, т. е. от предыстории системы;
- вероятность одновременного появления двух и более событий (связанных с переходом из одного состояния системы в другое) на малом отрезке времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью одного события (свойство ординарности);
- вероятность появления на некотором отрезке времени определенного числа событий не зависит от числа и характера событий, происшедших до этого отрезка (отсутствие последействия).

В теории о структурной надежности ЭЭС принимается допущение, что процесс перехода от одного состояния к другому описывается экспоненциальным распределением. Предположение об экспоненциальном распределении событий на интервале времени, предшествующем рассматриваемому событию, лежит в основе большинства технических приложений. Однако если рассматривается длительный промежуток времени функционирования системы, то модель с постоянной интенсивностью переходов дает удовлетворительные результаты и в тех случаях, когда эти распределения в действительности не экспоненциальны. Кроме того, неэкспоненциальные (например, гамма- или нормальное) распределения можно моделировать искусственными структурами с экспоненциальными распределениями переходов.

Основной областью применения метода пространства состояний является вычисление характеристик надежности ремонтпригодных систем. Расчетными показателями, определяемыми данным методом, являются вероятности, частоты и средние продолжительности отдельных состояний системы. После идентификации состояний системы, приводящих к ее отказу, вычисляются соответствующие показатели структурной надежности.

### 1.3.1. Марковские процессы

Как уже упоминалось, в теории надежности технических систем, в частности при анализе случайных процессов, связанных с переходом из одного состояния в другое, достаточно широко используется математический аппарат марковских процессов. Рассмотрим более подробно некоторые понятия из этой теории.

**Марковская цепь.** Объектом анализа здесь является дискретный процесс, который развивается пошагово, и смена состояний  $s_1, s_2, \dots, s_N$  системы осуществляется в дискретные моменты времени. Структурно такой процесс может быть представлен графом переходов, на котором вершины представляют состояния системы, а дуги (направленные ребра) — возможные переходы, обладающие некоторой совокупностью характеристик. В марковских цепях наиболее значимой характеристикой является вероятность перехода.

Состояния могут быть транзитивными, т. е. такими, в которые можно попасть и из которых есть выход, либо поглощающими, попав в которые процесс далее перейти уже никуда не может. Заметим, что поглощающими необязательно должны быть отдельные состояния, поглощающими могут быть подмножества связанных между собой состояний.

Переходы из состояния в состояние могут быть как детерминированными (с вероятностью 1), так и случайными (с вероятностью, отличной от 1), причем из одного состояния возможны переходы в совокупность состояний, а выбор направления перехода осуществляется в соответствии с некоторым случайным механизмом. Если вероятности  $p_{ij}$  перехода за один шаг ( $\Delta t$ ) из  $X_i$  в  $X_j$  зависят только от индексов этих состояний и не зависят от всей предыстории развития процесса до попадания в состояние  $X_i$ , то соответствующий дискретный случайный процесс является марковской цепью. Марковская цепь характеризуется матрицей переходных вероятностей  $\pi = \{p_{ij}, i, j = \overline{1, N}\}$ .

Заметим, что если для некоторого состояния  $X_i, i = 1, \dots, n$  соблюдается равенство  $\sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij} = 0$ , то это означает, что данное состояние является поглощающим — из него невозможен переход в какое-либо иное состояние. Со временем система непременно окажется в этом состоянии. Если  $\sum_{j \neq i} p_{ij} < 1$ , то на очередном шаге динамического процесса с вероятностью  $p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}$  возможно сохранение состояния  $X_i$ .

В момент времени  $t + \Delta t$  система может оказаться в состоянии  $X_i$ , если в предшествующий момент система находилась в состоянии  $X_j$  и на интервале времени  $(t, t + \Delta t)$  произошел переход из  $X_j$  в  $X_i$ . Рассматривая эти события как независимые, можно оценить вероятность  $P_i(t + \Delta t)$  состояния  $X_i$  в момент времени  $t + \Delta t$  через произведения вероятностей соответствующих событий

$$P_i(t + \Delta t) = \sum_{j=1}^n P_j(t) p_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

или в векторной форме

$$\bar{P}(t + \Delta t) = \pi^T \bar{P}(t),$$

где  $\pi^T$  — транспонированная матрица вероятностей переходов.

**Пример 1.1.** В качестве примера рассмотрим ЭЭС, где отказ энергоблока происходит с вероятностью  $q = 0,1$ . В системе имеется некоторый ре-

зверв мощности, разный в зависимости от времени суток. Известна вероятность появления дефицита мощности при отключении энергоблока в часы суточного максимума  $p_{c,max} = 0,4$  и суточного минимума  $p_{c,min} = 0,1$ . Вероятность того, что в течение суток (расчетный период) энергоблок будет отремонтирован  $p_{рем} = 0,4$ . Условная вероятность того, что в следующем периоде будет наблюдаться дефицит мощности, если в текущем периоде также наблюдался дефицит, равна  $0,1$ . Следует определить вероятности всех состояний блока и ЭЭС при условии, что в начальный момент времени энергоблок находился в рабочем состоянии.

**Диаграмма состояний.** В упрощенной композиции система может находиться в четырех состояниях (рис. 1.6): 1 — энергоблок в рабочем состоянии (вероятность  $0,9$ ); 2 — энергоблок в состоянии аварийного восстановления; 3 — дефицит в ЭЭС в часы суточного максимума нагрузки; 4 — дефицит в ЭЭС в часы суточного минимума нагрузки. Вероятности: перехода из рабочего состояния в состояние отказа  $p_{12} = q = 0,1$  (отсюда вероятность остаться в рабочем состоянии  $p_{11} = 1 - 0,1 = 0,9$ ); появления дневного дефицита мощности  $p_{23} = p_{c,max} = 0,4$ ; появления ночного дефицита мощности  $p_{24} = p_{c,min} = 0,1$ ; система остается в состояниях 3 и 4  $p_{33} = p_{44} = 0,1$ . Отсюда  $p_{32} = p_{42} = 1 - 0,1 = 0,9$ ; вероятность восстановления  $p_{21} = p_{рем} = 0,2$ , и  $p_{22} = 1 - p_{21} - p_{23} - p_{24} = 1 - 0,2 - 0,4 - 0,1 = 0,3$ .

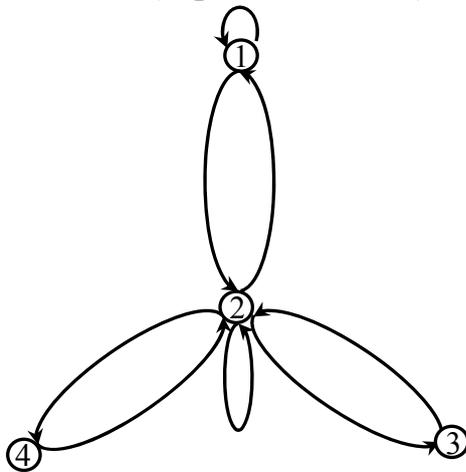


Рис. 1.6. Марковская цепь

Матрица  $\pi$  вероятностей переходов от одного периода к другому и ее транспонированная матрица  $\pi^T$  представлены в табл. 1.1. Расчетные вероятности состояний представлены в табл. 1.2 и на рис. 1.7.

Таблица 1.1

Матрицы вероятностей переходов

Матрица $\pi$ вероятностей переходов				
$i \setminus j$	1	2	3	4
1	0,9	0,1	0	0
2	0,4	0,1	0,4	0,1
3	0	0,9	0,1	0
4	0	0,9	0	0,1

Транспонированная матрица $\pi^T$				
$i \setminus j$	1	2	3	4
1	0,9	0,4	0	0
2	0,1	0,1	0,9	0,9
3	0	0,4	0,1	0
4	0	0,1	0	0,1

Расчетные вероятности состояний

$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	$t = 9$	$t = 10$	$t = 11$
1	0,9	0,85	0,805	0,781	0,76	0,748	0,739	0,733	0,729	0,726
0	0,1	0,1	0,14	0,144	0,16	0,164	0,171	0,173	0,175	0,177
0	0	0,04	0,044	0,06	0,064	0,071	0,073	0,075	0,077	0,078
0	0	0,01	0,011	0,015	0,016	0,018	0,018	0,019	0,019	0,019

В частности, после окончания первого периода (начало второго)

$$\bar{P}(2) = \begin{pmatrix} P_1(2) \\ P_2(2) \\ P_3(2) \\ P_4(2) \end{pmatrix} = \pi^T \bar{P}(1) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 & 0,9 \\ 0 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

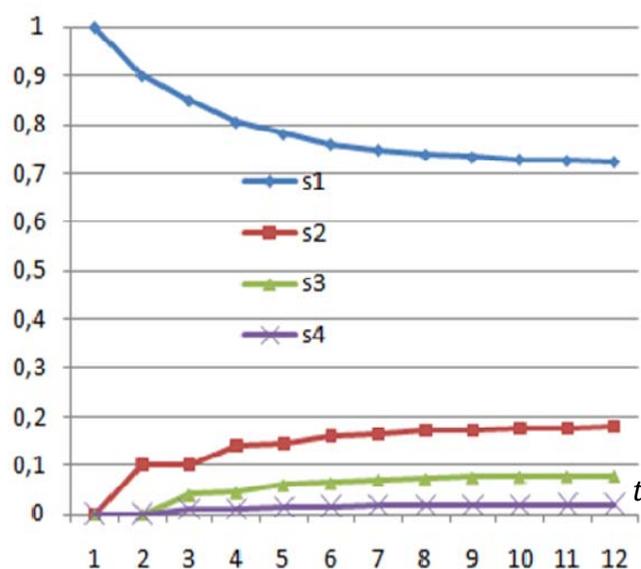


Рис. 1.7. Вероятности состояний

Следует обратить внимание на то, что построчные суммы матрицы  $\pi$  и постолбцовые суммы матрицы  $\pi^T$  равны 1. На рис. 1.7 можно видеть, что результирующие вероятности асимптотически приближаются к некоторым расчетным величинам.

**Пример 1.2.** В качестве самостоятельного упражнения предлагается решить следующую задачу. Вероятность  $q(I)$  отказа одной линии электропередачи (ЛЭП) за нормативный межремонтный срок эксплуатации зависит от ее загрузки

$I$  (ток в относительных единицах)  $q(I) = 0,1I^2 + 0,2I + 0,1$ ;  $P \leq 1$ . Электроэнергия передается потребителю по двум ЛЭП с отключением, но без восстановления в случае отказа одной ЛЭП. С помощью цепей Маркова с шагом по времени  $\Delta t = 0,1$  определить вероятность  $Q_{\Pi}$  отключения потребителя в межремонтный период ( $t = 1$ ) при условии, что суммарная нагрузка постоянна  $I_{\Sigma} = 1,2$ . Ответ  $Q_{\Pi}(t = 1) = 0,0854$ .

**Марковский процесс.** Рассмотрим марковскую цепь с переходными вероятностями  $p_{ij}$ , однако будем считать, что переходы из состояния в состояние происходят не синхронизированно (через некоторый дискретный интервал времени), а в случайные моменты, с интервалом времени, имеющим экспоненциальное распределение. Здесь процессы перехода будут определяться параметрами экспонент (интенсивности перехода).

**Полумарковский процесс** характеризуется тем, что переходы процесса определяются поведением марковской цепи с матрицей переходных вероятностей  $\pi = \{p_{ij}, i, j = \overline{1, N}\}$ , а длительности переходов из одного состояния в другое являются случайными величинами, распределение вероятностей которых  $F_{ij}(t)$  зависит не только от  $X_i$ , но и от  $X_j$ , и к тому же является произвольным, а необязательно экспоненциальным. В результате вероятности переходов будут зависеть от времени  $\pi(t) = \{p_{ij}(t), i, j = \overline{1, N}\}$ .

При расчетах надежности ЭЭС в основном используются марковские процессы, однако нужно всегда анализировать условия, при которых их применение в математических моделях процессов функционирования систем энергетики является корректным.

### 1.3.2. Система дифференциальных уравнений

Процесс, при котором интенсивность переходов постоянна, представляет собой однородный процесс Маркова. Он описывается линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\bar{P}'(t) = \bar{P}(t)L; \quad (1.11)$$

$$\sum P_i(t) = 1, \quad (1.12)$$

где  $\bar{P}(t)$  — вектор-строка из вероятностей состояний системы;  $L$  — матрица интенсивностей переходов, элементы которой  $L_{ij} = \lambda_{ij}$  и  $L_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$ . Сумма элементов в каждой строке матрицы всегда равна нулю в силу определения  $L_{ii}$ .

Для иллюстрации структуры и принципа построения дифференциальных уравнений определим вероятность события  $H_i$ , заключающегося в том, что в момент  $t + \Delta t$  система окажется в состоянии  $i$ . Это возможно, если в момент  $t$  система уже находилась в этом состоянии и за интервал  $\Delta t$  не было переходов системы в любое другое состояние (событие  $H_{ii}$ ) или в момент  $t$  система находилась в каком-то произвольном состоянии  $j$  и за время  $\Delta t$  произошел переход из этого состояния системы в состояние  $i$  (событие  $H_{ji}$ ). Логически  $H_i = H_{ii} + \sum H_{ji}$ .

Поскольку в марковских процессах переход из  $H_j$  в  $H_i$  описывается экспоненциальным распределением с параметром  $\lambda_{ij}$ , то вероятность перехода за относительно небольшой промежуток времени  $\Delta t$  согласно (1.2) можно оценить величиной  $p_{ij} \approx \lambda_{ij}\Delta t$ . Аналогично согласно (1.3)

$$p_{ii}(\Delta t) \approx 1 - \lambda_i\Delta t = 1 - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}\Delta t.$$

Условная вероятность того, что система, находящаяся в момент времени  $t$  в состоянии  $j$ , к моменту  $t + \Delta t$  перейдет в состояние  $i$ , определяется произведением вероятности состояния  $j$  на вероятность перехода из состояния  $j$  в состояние  $i$ :

$$P_{ij} = P_j(t)\lambda_{ij}\Delta t.$$

В результате —

$$P_i(t + \Delta t) = P_i(t) \left( 1 - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} \Delta t \right) + \sum_{j \neq i} P_j(t) \lambda_{ji} \Delta t.$$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$P_i(t + \Delta t) - P_i(t) = \sum_{\forall j} \lambda_{ji} P_j(t) \Delta t, \quad (1.13)$$

где  $\lambda_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$  — так называемая собственная интенсивность узла (математическая величина, вводимая с целью упрощения математических выражений). При  $\Delta t \rightarrow 0$  выражение (1.13) преобразуется в дифференциальное уравнение

$$P'_i(t) = \sum_{\forall j} \lambda_{ji} P_j(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

что и доказывает справедливость (1.11).

Необходимо заметить, что матрица  $L$  является вырожденной ( $\det L = 0$ ), поскольку  $\lambda_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$ . Отсюда одно из уравнений является линейной комбинацией всех остальных, и оно должно быть заменено новым уравнением (дополнительное условие), чтобы определитель результирующей матрицы при этом был бы отличен от нуля. В качестве такого дополнительного условия можно использовать (1.12) — равенство единице суммы вероятностей всех состояний (полная группа случайных событий).

**Пример 1.3.** Определить временные зависимости вероятностей состояний ( $P_w(t)$  — работоспособность и  $P_f(t)$  — состояние отказа) одного элемента при условии, что в начальный момент времени элемент работоспособен.

Диаграмма состояний может быть представлена в виде, представленном на рис. 1.8. Ей соответствует система уравнений (1.11), (1.12):

$$\begin{aligned} P'_w(t) &= -\lambda P_w(t) + \mu P_f(t); \\ P_w(t) + P_f(t) &= 1. \end{aligned}$$

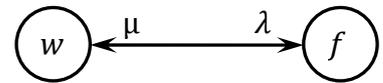


Рис. 1.8. Два состояния

Определяя из второго уравнения  $P_f(t)$  и подставляя его в первое уравнение, получаем линейное дифференциальное уравнение

$$P'_w(t) + (\lambda + \mu)P_w(t) = \mu. \quad (1.14)$$

Решение соответствующего однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$P_w(t) = C(t)e^{-(\lambda+\mu)t}. \quad (1.15)$$

Дифференцируя (1.15) и подставляя полученное выражение в (1.14), получаем математическое представление  $C(t)$ :

$$C'(t)e^{-(\lambda+\mu)t} - C(t)(\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)t} + C(\lambda + \mu)(t)e^{-(\lambda+\mu)t} = \mu.$$

Отсюда  $C'(t)e^{-(\lambda+\mu)t} = \mu$ . После интегрирования

$$C(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{(\lambda+\mu)t} + C_1.$$

В результате

$$P_w(t) = \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{(\lambda+\mu)t} + C_1 \right] e^{-(\lambda+\mu)t} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + C_1 e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Если  $P_w(0) = 1$  (начальное условие задачи Коши), то  $C_1 = \lambda/(\lambda + \mu)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} P_w(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}; \\ P_f(t) &= 1 - P_w(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

### Пример динамического процесса

**Пример 1.4.** У электрика имеются две лампочки. Одну из них он устанавливает как рабочую, другая — запасная. Длительность безотказной работы лампочек описывается экспоненциальным распределением с математическим ожиданием  $\bar{T}_p = 2$  мес. Необходимо составить диаграмму состояний, систему дифференциальных уравнений и определить вероятность наступления конца света в течение трех месяцев.

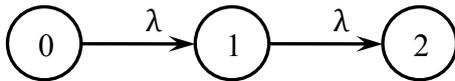


Рис. 1.9. Диаграмма состояний двухстадийного процесса

**Решение.** Диаграмма состояний представлена на рис. 1.9. Стационарное состояние ( $t = \infty$ ) тривиально — обе лампочки перегорят,  $P_2(t = \infty) = 1$ .

Интенсивность отказа лампы  $\lambda = 1/T = 0,5$  (1/месяц).

Матрица интенсивностей

$$L = \begin{array}{c|ccc} \text{Состояние} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\lambda & \lambda \\ \hline 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}$$

Система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t); \\ P_1'(t) = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t); \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1. \end{cases} \quad (1.17)$$

Уравнение динамического вероятностного баланса для состояния «2» не записывается в силу линейной зависимости этого уравнения от первых двух.

Принимая во внимание условие исправности лампочек в начальный момент времени, из первого уравнения получаем  $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ . Второе уравнение преобразуется к виду линейного дифференциального уравнения

$$P_1'(t) + \lambda P_1(t) - \lambda e^{-\lambda t} = 0. \quad (1.18)$$

Решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$P_1(t) = C(t)e^{-\lambda t}. \quad (1.19)$$

Дифференцируя (1.19) и подставляя полученное выражение в (1.18), получаем

$$P_1'(t) = C'(t)e^{-\lambda t} - \lambda C(t)e^{-\lambda t} + \lambda C(t)e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} = (C'(t) - \lambda)e^{-\lambda t} = 0.$$

Отсюда  $C(t) = \lambda t$ . В результате  $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ .

В частности, при  $t = 3$

$$P_0(3) = e^{-1,5} = 0,223;$$

$$P_1(3) = 0,5 \cdot 3 \cdot e^{-1,5} = 0,335;$$

$$P_2(t = 3) = 1 - 0,223 - 0,335 = 0,442.$$

Этот же результат можно получить иначе.

*Гамма-распределение*  $G(\alpha, \beta)$  с параметрами  $\alpha, \beta$  описывает  $\alpha$ -стадийный процесс с экспоненциальным распределением длительности безотказной работы ( $\lambda = 0,5$ ) на каждой стадии (прил. 2). В рассматриваемом случае имеются две стадии (две лампочки), следовательно, параметр формы  $\alpha = 2$ . Параметр масштаба определяется математическим ожиданием длительности стадии  $\beta = \lambda = 2$ . Используя справочные данные можно получить  $P_2(t = 3) = G(3, 2, 2) = 0,442$ . Результат тот же самый, но решение проще!

*Экспоненциальное распределение.* Третий подход к решению данной задачи – представление результирующего гамма-распределения экспоненциальным. Математическое ожидание длительности двухстадийного процесса  $\bar{T}_e = 2 \cdot 2 = 4$  (мес). Отсюда  $\lambda_e = 0,25$  (1/мес),  $P(t = 3) = \exp(-0,25 \cdot 3) = 0,472$  (погрешность — 6,7 %). Последнее решение показывает, что в многостадийном процессе часто используемое допущение о замене гамма-распределения экспоненциальным может приводить к значительной погрешности расчетов.

*Самостоятельная работа.* В условиях предыдущего примера имеются две запасные лампочки. Составить диаграмму состояний, систему дифференциальных уравнений и определить вероятность перегорания всех трех ламп за полгода. (Ответ:  $P_3(6) = 0,577$ ).

### **Моделирование на ЭВМ динамической вероятностной системы**

Решение системы дифференциальных уравнений вероятностей состояний на ЭВМ можно выполнять численными методами, например методом Эйлера или Рунге-Кутты. Рассмотрим решение предыдущей задачи в среде «Excel». При представлении  $P(t)$  в виде вектора-столбца (более удобная форма при решении задачи в матричном виде) уравнения (1.11) реализуются в виде рекуррентного соотношения

$$\Delta P(t) = L_{\text{расч}} P(t) \Delta t; \quad P(t + \Delta t) = P(t) + \Delta P(t),$$

где  $L_{\text{расч}}$  — матрица, полученная из  $L$  путем транспонирования и исключения последней строки.

В частности, для  $t = 0$

$$\begin{pmatrix} \Delta P_0 \\ \Delta P_1 \end{pmatrix} = 0,25 \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,125 \\ 0,125 \end{pmatrix}.$$

Вероятность последнего состояния  $n$  определяется согласно условию:

$$P_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t).$$

Ниже в табл. 1.3, 1.4 представлено решение поставленной задачи. Среди исходных данных, к числу которых относится интенсивность  $\lambda = 0,5$ , следует указать и шаг по времени  $\Delta t = 0,25$ . Это позволит автоматически получать результаты для нового шага по времени. В табл. 1.3 представлены исходная и расчетная (транспонированная) матрицы интенсивностей. Вектор приращений вероятностей  $\Delta P(t) = (\Delta P_0(t), \Delta P_1(t), \dots, \Delta P_{n-1}(t))^T$  определяется путем матричного умножения расчетной матрицы  $L_{\text{расч}}$  на вектор текущих вероятностей (табл. 1.4).

Таблица 1.3

Исходная и транспонированная матрицы интенсивностей

$s$	0	1	2
0	-0,5	0,5	0
1	0	-0,5	0,5
2	0	0	0

Расчетная матрица интенсивностей		
-0,5	0	0
0,5	-0,5	0

Таблица 1.4

Расчетный процесс

$t$	0		0,25		0,5		0,75		1
$s$	$P$	$\Delta P$	$P$	$\Delta P$	$P$	$\Delta P$	$P$	$\Delta P$	$P$
0	1	-0,13	0,875	-0,11	0,766	-0,1	0,67	-0,08	0,586
1	0	0,125	0,125	0,094	0,219	0,068	0,287	0,048	0,335
2	0		0		0,016		0,043		0,079

**Пример 1.5.** В качестве упражнения предлагается решить модифицированную на базе примера 1.2 задачу. Вероятность  $q(I)$  отказа одной линии электропередачи за нормативный межремонтный срок ( $t = 1$ ) эксплуатации зависит от ее загрузки  $I$ :  $q(I) = 0,1I^2 + 0,2I + 0,1$ ;  $P \leq 1$  (ток  $I$  задается в о. е.). Электроэнергия передается потребителю по двум ЛЭП. При отказе одной ЛЭП восстановление не происходит (откладывается до отказа второй ЛЭП). Считая длительность безотказной работы случайной величиной, распределенной по экспоненциальному распределению, необходимо получить математическое представление вероятностей как функций времени для следующих состояний:

обе линии исправны; включена одна линия; отключены обе линии. Требуется определить вероятность  $P_2$  отключения потребителя к моменту окончания межремонтного периода ( $t = 1$ ) при условии, что суммарная нагрузка постоянна  $I_H = 1,2$ . (Ответ:  $P_2(t = 1) = 0,08$ . Временная диаграмма вероятностей представлена на рис. 1.10).

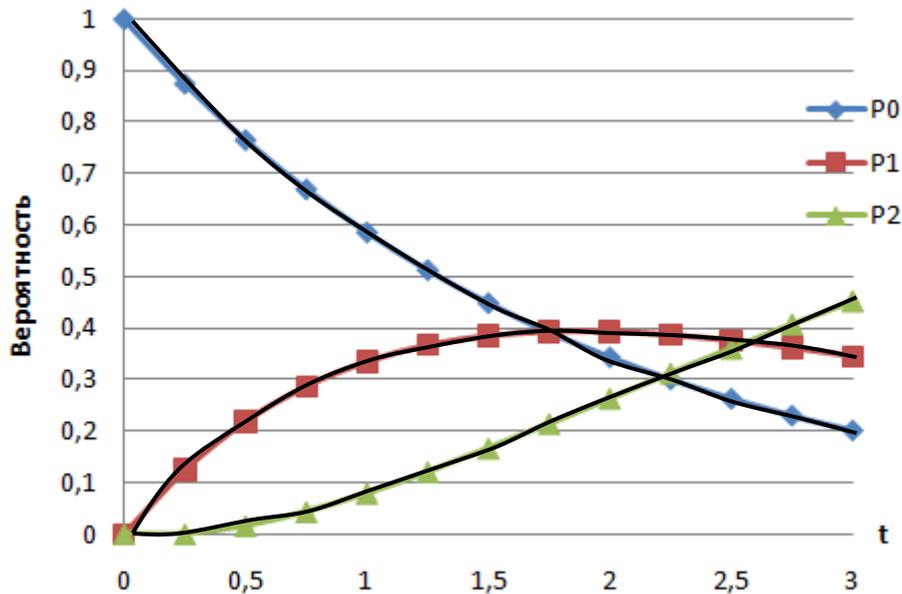


Рис. 1.10. Графики вероятностей

**Методические указания.** Диаграмма состояний представлена на рис. 1.11, где  $\lambda_1$  – интенсивность отказа одной ЛЭП при условии работы, а соответственно и загрузки двух ЛЭП;  $\lambda_2$  – интенсивность отказа одной ЛЭП при условии отключенного состояния другой.

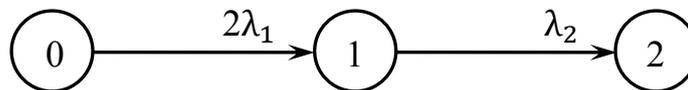


Рис. 1.11. Диаграмма состояний процесса отказа двух ЛЭП

Номера состояний отражают число отключенных ЛЭП. На участке диаграммы 0–1 может произойти отключение как первой, так и второй ЛЭП. Поэтому интенсивность отказа ЛЭП на этом участке удваивается. Интенсивности можно определить исходя из основного соотношения (1.4)

$$R(t) = \exp(-\lambda t).$$

Исходя из полученных интенсивностей необходимо составить систему дифференциальных уравнений (СДУ) относительно вероятностей. Она имеет вид, подобный (1.17) (отличие — в коэффициентах). Аналитическое решение СДУ позволяет получить значения вероятностей всех состояний. В частности,  $P_2(t = 1) = 0,0802$ . Сравнение с результатами примера 1.2  $P_2(t = 1) = 0,0854$  определяет разницу около 6%. Более точное решение будет получено при разбиении расчетного интервала времени, например, на 10 подынтервалов.

### 1.3.3. Стационарные состояния

При оценке надежности систем с большим сроком службы изменениями вероятностей состояний, как правило, пренебрегают, т. е. рассматривают только асимптотические (стационарные) значения вероятностей. Их можно получить, приравняв левую часть системы уравнений (1.11) нулю. В результате (1.11) трансформируется в систему линейных уравнений

$$L^T \bar{P} = 0, \quad (1.20)$$

где  $\bar{P}$  — вектор-столбец, определяющий вероятности состояний. Дополнительно

$$\sum P_j(t) = 1. \quad (1.21)$$

Рассмотрим систему с двумя параллельно соединенными независимыми элементами (рис. 1.5). Здесь матрица интенсивностей переходов имеет вид

$$L = \begin{vmatrix} -(\lambda_a + \lambda_b) & \lambda_a & \lambda_b & 0 \\ \mu_a & -(\lambda_b + \mu_a) & 0 & \lambda_b \\ \mu_b & 0 & -(\lambda_a + \mu_b) & \lambda_a \\ 0 & \mu_b & \mu_a & -(\mu_a + \mu_b) \end{vmatrix}.$$

Отсюда система линейных уравнений, описывающая стационарно-вероятностное состояние объекта, имеет вид:

$$\begin{cases} -(\lambda_a + \lambda_b)P_0 + \mu_a P_1 + \mu_b P_2 = 0; \\ \lambda_a P_0 - (\lambda_b + \mu_a)P_1 + \mu_b P_3 = 0; \\ \lambda_b P_0 - (\lambda_a + \mu_b)P_2 + \mu_a P_3 = 0; \\ \lambda_b P_1 + \lambda_a P_2 - (\mu_a + \mu_b)P_3 = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Одно из уравнений, например последнее, заменяется уравнением

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1. \quad (1.23)$$

Система уравнений (1.22) имеет аналитическое решение

$$\begin{cases} P_0 = \frac{\mu_a \mu_b}{(\lambda_a + \mu_a)(\lambda_b + \mu_b)} = K_{га} K_{гб}; \\ P_1 = \frac{\lambda_a \mu_b}{(\lambda_a + \mu_a)(\lambda_b + \mu_b)} = K_{на} K_{гб}; \\ P_2 = \frac{\lambda_b \mu_b}{(\lambda_a + \mu_a)(\lambda_b + \mu_b)} = K_{га} K_{нб}; \\ P_3 = \frac{\lambda_a \lambda_b}{(\lambda_a + \mu_a)(\lambda_b + \mu_b)} = K_{на} K_{нб}, \end{cases} \quad (1.24)$$

где  $K_{ги} = \mu_i / (\lambda_i + \mu_i)$ ,  $K_{ни} = \lambda_i / (\lambda_i + \mu_i)$  — соответственно коэффициенты стационарной готовности и неготовности элемента  $i$ .

**Пример 1.6.** Решить систему линейных уравнений (1.22) при следующих исходных данных:  $\lambda_a = \lambda_b = 1$ ,  $\mu_a = \mu_b = 10$ . Матрица коэффициентов, вектор правых частей и результирующие вероятности представлены в табл. 1.5, где  $B$  — вектор правых частей системы (1.22). Коэффициенты готовности и неготовности элементов (они идентичны)  $K_r = 10/(1 + 10) = 0,909$ ,  $K_n = 1/(1 + 10) = 0,091$ .

Выполнив расчеты через коэффициенты готовности и неготовности, убеждаемся в правильности полученных результатов.

Таблица 1.5

Решение системы стационарных уравнений

Матрица коэффициентов				$B$	$P$
-2	10	10	0	0	0,8264
1	-11	0	10	0	0,0826
1	0	-11	10	0	0,0826
1	1	1	1	1	0,0083

Уравнение  $i$  системы (1.20) записывается в виде

$$\sum_{j \neq i} P_i(t) \lambda_{ij} = \sum_{j \neq i} P_j(t) \lambda_{ji}. \quad (1.25)$$

Напомним, что частота перехода из состояния  $j$  в состояние  $i$  определяется произведением  $f_{ij} = P_i(t) \lambda_{ij}$ . Отсюда первые уравнения в выражении (1.22) представляют условие баланса частот  $\sum_{j \neq i} f_{ij} = \sum_{j \neq i} f_{ji}$  — частота выхода из состояния  $i$  равна частоте захода в состояние  $i$ .

Это соотношение может быть весьма полезным при практическом построении систем уравнений (1.20). Так, в рассмотренном примере баланс частот в узле 1 (состояние  $\bar{a}b$ ) имеет вид  $f_{10} + f_{13} = f_{01} + f_{31}$ , что равноценно  $P_1 \lambda_{10} + P_1 \lambda_{13} = P_0 \lambda_{01} + P_3 \lambda_{31}$  или  $P_1(\mu_a + \lambda_b) = P_0 \lambda_a + P_3 \mu_b$ , а это совпадает со вторым уравнением системы (1.22).

**1.3.4. Последовательное соединение элементов**

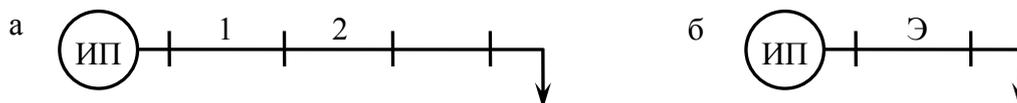
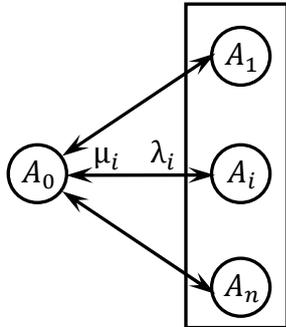


Рис. 1.12. Радиальная электрическая схема:  
а — исходная схема; б — эквивалентная схема

В радиальной схеме электроснабжения (рис. 1.12, а) последовательному соединению элементов соответствуют следующие логико-функциональные состояния:  $A_0$  — все элементы исправны и находятся в работоспособном состоянии;  $A_i$  — отказ элемента  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (отключение элемента  $i$

с разрывом последовательной цепи). При отказе одного элемента считается, что остальные элементы находятся в исправном состоянии, т. е. восстановление отказавшего элемента приводит к готовности всей цепи.

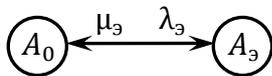
Одновременный отказ нескольких элементов считается невозможным событием (последовательная электрическая цепь обесточена, элемент в ненагруженном состоянии отказу не подлежит). Таким образом, для последовательной цепи можно указать  $n + 1$  функциональных состояний, которые могут быть представлены логической диаграммой состояний (рис. 1.13). Считая процессы отказа и восстановления простейшими, для стационарного состояния последовательной цепи можно записать следующую систему алгебраических уравнений:



т. е. восстановления простейшими, для стационарного состояния последовательной цепи можно записать следующую систему алгебраических уравнений:

$$\lambda_i P_0 = \mu_i P_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$P_0 + \sum P_i = 1$$



или

$$P_i = \gamma_i P_0, \quad i = 1, \dots, n,$$

Рис. 1.13. Диаграмма состояний радиальной структуры

где  $\gamma_i = \lambda_i / \mu_i = \lambda_i \tau_i$  — относительная длительность состояния отказа элемента. Отсюда следует

$$P_0 = K_r = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i}; \quad P_j = \frac{\gamma_j}{1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i}, \quad j = 1, \dots, n.$$

При замене последовательной цепи одним эквивалентным элементом с простейшими процессами отказа и восстановления соответствующие показатели имеют вид

$$P_0 = \frac{1}{1 + \gamma_3}; \quad P_3 = \frac{\gamma_3}{1 + \gamma_3}. \quad (1.26)$$

Из эквивалентности преобразования следует тождественность вероятностей работоспособного состояния для исходной и эквивалентной схем. Отсюда следует

$$\frac{1}{1 + \gamma_3} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i}$$

или

$$\gamma_3 = \sum_{i=1}^n \gamma_i. \quad (1.27)$$

К несколько иному результату приводит подход, основанный на использовании вероятностей безотказной работы элементов  $p_i = 1 - q_i$  или их аналогов — коэффициентов готовности. Известно, что коэффициент готовности определяется вероятностью застать элемент в произвольный момент времени в исправном состоянии. Готовность системы последовательно соеди-

ненных элементов определяется готовностью всех ее элементов. Отсюда  $p_\Sigma = \prod p_i$ ;  $K_{r\Sigma} = \prod K_{r_i}$ . Так, для цепи из двух элементов

$$p_\Sigma = p_a p_b,$$

а

$$K_r = K_{r_a} K_{r_b} = \frac{1}{(1 + \gamma_a)(1 + \gamma_b)} = \frac{1}{1 + \gamma_\Sigma}, \quad (1.28)$$

что приводит к соотношению

$$\gamma_\Sigma = \gamma_a + \gamma_b + \gamma_a \gamma_b.$$

Данная формула отличается от (1.27) произведением  $\gamma_a \gamma_b$ . Отличие объясняется тем, что при выводе последнего выражения неявно допускается состояние, связанное с одновременным отказом нескольких элементов. Задача эквивалентирования последовательной цепи одним элементом, отключение которого непременно приводит к разрыву всей цепи, требует исключения совместных отказов, поэтому при эквивалентировании предпочтение имеет формула (1.27).

Состояния  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  одинаковы по своим функциональным последствиям — они приводят к разрыву цепи, поэтому, объединяя указанные события в эквивалентное состояние отказа, в соответствии с методом пространства состояний можно записать

$$P_F = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n P_0 \lambda_i = P_0 \lambda_\Sigma.$$

Отсюда

$$\lambda_\Sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (1.29)$$

Эту формулу можно получить иначе — через динамическое представление процесса отказов. Считая распределение вероятности длительности безотказной работы элемента экспоненциальным, условие безотказности работы всех элементов можно представить в виде

$$P_0(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t} = e^{-\lambda_\Sigma t}.$$

Отсюда следует (1.29).

Подставляя в (1.27) значения  $\gamma_i$ , выраженные через  $\lambda_i$  и  $\tau_i$ , а также используя формулу (1.29) эквивалентной интенсивности, получаем выражение для эквивалентного времени восстановления последовательной цепи:

$$\tau_\Sigma = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tau_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Таким образом, эквивалентная длительность восстановления является средневзвешенной от  $\tau_i$  с весами  $\lambda_i$ , что хорошо согласуется с физическими представлениями об ожидаемой длительности единичного отказа.

Частота состояния отказа радиальной схемы электроснабжения равна сумме частот отказов составных элементов:

$$f_{\text{э}} = P_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n f_i.$$

В результате при эквивалентном преобразовании последовательного соединения элементов рекомендуется пользоваться следующей очередностью определения эквивалентных показателей надежности:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{э}} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow \gamma_{\text{э}} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \Rightarrow p_{\text{э}} = K_{\text{г}} = \frac{1}{1 + \gamma_{\text{э}}} \Rightarrow q_{\text{э}} = K_{\text{н}} = 1 - K_{\text{г}} \Rightarrow \\ \Rightarrow f_{\text{э}} &= p_{\text{э}} \lambda_{\text{э}} \Rightarrow \mu_{\text{э}} = \frac{f_{\text{э}}}{q_{\text{э}}} \Rightarrow \mu_{\text{э}} = \frac{1}{\mu_{\text{э}}}. \end{aligned}$$

Как было отмечено, формула произведения вероятностей безотказной работы обладает погрешностью в последовательных электрических структурах. В то же время во многих технических приложениях и при преобразовании сложных многоконтурных электрических схем целесообразно пользоваться этой формулой, поскольку отключение элемента не всегда приводит к отключению всей последовательной цепи — узлы нагрузки получают питание с двух сторон. Здесь в качестве базовых ПН рассматриваются вероятности безотказной работы  $p_i$ . Разница в результатах при использовании формулы (1.28) практически ничтожна, поскольку реально  $\gamma \ll 1$ . При таком подходе  $p_{\text{э}} = \prod_{i=1}^n p_i$ ,  $q_{\text{э}} = 1 - p_{\text{э}}$ .

В частности, при двух элементах

$$p_{\text{э}} = p_a p_b; \quad q_{\text{э}} = 1 - p_a p_b = q_a + q_b - q_a q_b = q_a + p_a q_b.$$

**Пример 1.7.** В качестве примера рассмотрим эквивалентирование схемы из трех последовательных элементов (линия электропередачи с двумя выключателями) с исходными данными, представленными в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Расчет ПН системы из трех последовательных элементов

Элемент	$\lambda$ , 1/год	$\tau$ , лет/отказ	$\mu = 1/\tau$ , 1/год	$\gamma = \lambda\tau$ , о.е.	$K_{\text{г}} = 1/(1 + \gamma)$ , о.е.
1 (ЛЭП)	1	$10^{-3}$	$10^3$	$10^{-3}$	0,999
2 (Выключатель)	0,1	$3 \cdot 10^{-3}$	$(1/3) 10^3$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	0,9997
3 (Выключатель)	0,1	$3 \cdot 10^{-3}$	$(1/3) 10^3$	$0,3 \cdot 10^{-3}$	0,9997
Эквивалент	1,2	$1,33 \cdot 10^{-3}$	$0,752 10^3$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	0,9984

Здесь же показано вычисление ряда промежуточных и эквивалентных параметров. Результирующая интенсивность отказов, как и показатель  $\gamma_{\text{э}}$ , вычисляется через сумму составных элементов:

$$\lambda_{\text{э}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,2; \quad \gamma_{\text{э}} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0,0016.$$

Длительность восстановления —  $\tau_{\text{э}} = \gamma_{\text{э}}/\lambda_{\text{э}} = 0,0016/1,2 = 0,00133$ . Интенсивность восстановления  $\mu_{\text{э}} = 1/\tau_{\text{э}} = 1/0,00133 = 752$ . Эквивалентный коэффициент готовности  $K_{\text{гэ}} = 1/(1 + \gamma_{\text{э}}) = 1/(1 + 0,0016) = 0,9984$ . Достаточно точно этот показатель вычисляется и через произведение  $K_{\text{гэ}} = K_{\text{г1}}K_{\text{г2}}K_{\text{г3}}$ .

### 1.3.5. Параллельное соединение элементов

Рассмотрим применение метода пространства состояний для случая электрически параллельно соединенных  $n$  элементов. Отказ электроснабжения по такой схеме возможен лишь в том случае, когда происходит отказ всех элементов (логическая схема конъюнкции).

Диаграмма состояний из двух параллельных элементов была рассмотрена в п. 1.3.3. Там же показано, что вероятность одновременного отказа двух элементов определяется произведением их коэффициентов неготовности (1.24).

Полученные выводы распространяются и на случай произвольного числа элементов. При этом коэффициент неготовности

$$K_{\text{нэ}} = \prod_{i=1}^n K_{\text{ни}}. \quad (1.30)$$

Отсюда сразу же могут быть определены  $K_{\text{гэ}} = 1 - K_{\text{нэ}}$ ;  $\gamma_{\text{э}} = K_{\text{нэ}}/K_{\text{гэ}}$ .

Диаграмма состояний для схемы из  $n$  элементов представлена на рис. 1.14, где состояние 0 соответствует готовности всех элементов, состояние  $F$  — отказу всей схемы, состояние  $\bar{i}$  — отказу элемента  $i$  при исправном состоянии всех остальных элементов, состояние  $i$  — готовности элемента  $i$  при отказе всех остальных элементов.

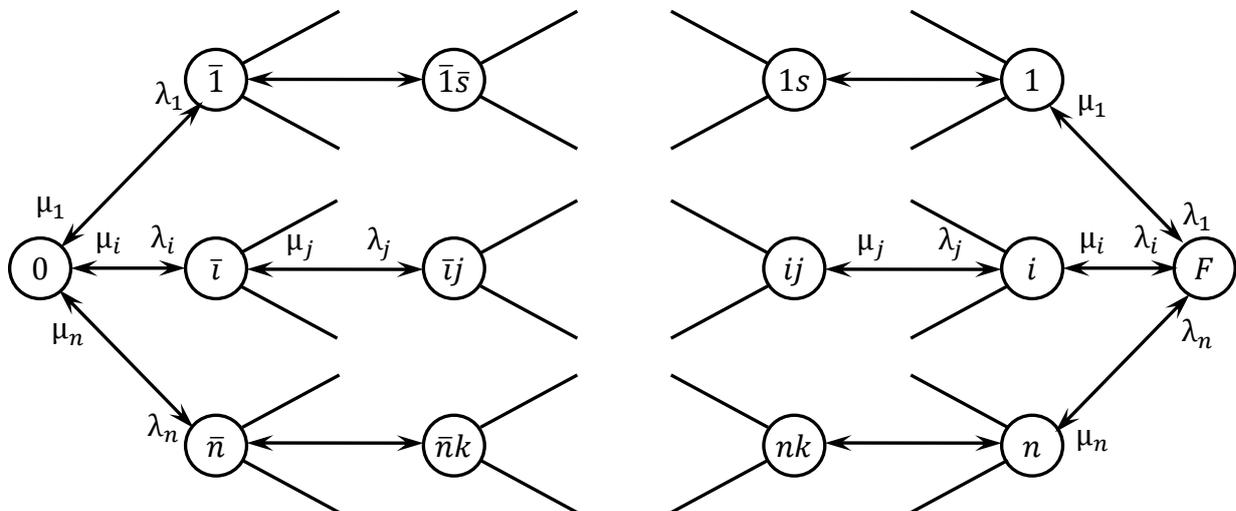


Рис. 1.14. Диаграмма состояний параллельного соединения элементов

Частота отказов схемы определяется произведением вероятности  $P_F$  состояния  $F$  на сумму интенсивностей восстановления составных элементов. Отсюда эквивалентная интенсивность восстановления  $\mu_э = \sum_{i=1}^n \mu_i$  и частота

$$f_э = K_{нэ} \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Интенсивность отказов  $\lambda_э$  определяется исходя из баланса частот:

$$P_w \lambda_э = K_{гэ} \lambda_э = P_F \mu_э.$$

Отсюда

$$\lambda_э = \frac{K_{нэ}}{K_{гэ}} \sum \mu_i = \gamma_э \sum \mu_i. \quad (1.31)$$

Чаще всего выполняется эквивалентирование двух элементов. В этом случае

$$\begin{aligned} \lambda_э &= \frac{\lambda_a K_{га} K_{нб} + \lambda_b K_{гб} K_{на}}{K_{га} K_{гб} + K_{га} K_{нб} + K_{гб} K_{на}} = \frac{\lambda_a \gamma_b}{1 + \gamma_a + \gamma_b} + \frac{\lambda_b \gamma_a}{1 + \gamma_a + \gamma_b} = \\ &= \frac{\lambda_a \gamma_b + \lambda_b \gamma_a}{1 + \gamma_a + \gamma_b}. \end{aligned}$$

Учитывая, что для реальных технических устройств  $\gamma \ll 1$ , в практических расчетах можно считать, что

$$\lambda_э \approx \lambda_a K_{нб} + \lambda_b K_{на}. \quad (1.32)$$

В общем случае при  $n$  параллельных элементах (цепях) эквивалентная интенсивность отказа, выраженная через интенсивности отказов составных элементов, равна

$$\lambda_э = \gamma_э \mu_э = \frac{K_{нэ}}{K_{гэ}} \sum \mu_i = \frac{K_{нэ}}{K_{гэ}} \sum \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \approx K_{нэ} \sum \frac{\lambda_i}{\gamma_i}. \quad (1.33)$$

Относительная длительность восстановления. Из условия (1.30) нетрудно получить соотношение эквивалентирования для параметра  $\gamma_э$  при параллельном соединении  $n$  элементов:

$$K_{нэ} = \frac{\gamma_э}{1 + \gamma_э} = \prod_{i=1}^n K_{ни} = \prod_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{1 + \gamma_i} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\gamma_э} = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\gamma_i}\right).$$

Отсюда

$$\gamma_э = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\gamma_i}\right) - 1}.$$

В частности, для двух элементов

$$\gamma_э = \frac{\gamma_a \gamma_b}{1 + \gamma_a + \gamma_b}. \quad (1.34)$$

Учитывая, что  $\mu_3 = \sum \mu_i$ , получаем выражение для математического ожидания длительности отказа параллельной структуры:

$$\tau_3 = \frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\sum \mu_i}$$

В результате при эквивалентном преобразовании параллельного соединения элементов рекомендуется пользоваться следующей очередностью определения эквивалентных показателей надежности:

$$\begin{aligned} q_3 = K_{н3} &= \prod_{i=1}^n K_{ни} \Rightarrow \mu_3 = \sum_{i=1}^n \mu_i \Rightarrow K_{г3} = 1 - K_{н3} \Rightarrow \\ \Rightarrow f_3 = K_{н3}\mu_3 &\Rightarrow \gamma_3 = \frac{K_{н3}}{K_{г3}} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{\gamma_3}{\mu_3} \Rightarrow \tau_3 = \frac{1}{\mu_3}. \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрено эквивалентирование схемы из двух параллельных элементов с исходными данными, представленными в табл. 1.7. Здесь же показано вычисление ряда промежуточных параметров.

Эквивалентный коэффициент неготовности вычисляется через произведение  $K_{н3} = K_{н1}K_{н2} = 0,49925 \cdot 10^{-6}$ ; интенсивность восстановления — через сумму  $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2 = 2 \cdot 10^3$ . Длительность восстановления обратно пропорциональна интенсивности восстановления  $\tau_3 = 1/\mu_3 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ . Относительная длительность восстановления  $\gamma_3 = K_{н3}/K_{г3} = 0,49925 \cdot 10^{-3}$ . Интенсивность отказов определяется через  $\gamma_3$ :  $\lambda_3 = \gamma_3/\tau_3 = 0,9985 \cdot 10^{-3}$ . Эквивалентная частота отказов примерно равна эквивалентной интенсивности отказов  $f_3 = K_{н3}\mu_3 = 0,49925 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^3 = 0,9985 \cdot 10^{-3}$ .

Таблица 1.7

Эквивалентные преобразования параллельной структуры

Элемент	$\lambda$ , 1/год	$\tau$ , лет	$\mu = 1/\tau$ , 1/год	$\gamma = \lambda\tau$ , о. е.	$K_{н}$ , о. е.
1	1	$10^{-3}$	$10^3$	$10^{-3}$	$0,999 \cdot 10^{-3}$
2	0,5	$10^{-3}$	$10^3$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$0,49975 \cdot 10^{-3}$
Эквивалент	$0,998 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^3$	$0,499 \cdot 10^{-3}$	$0,49925 \cdot 10^{-6}$

**Самостоятельная работа.** Диаграмма состояний на рис. 1.15 отражает независимость выполнения аварийно-восстановительного ремонта от очередности отказа. Это равносильно тому, что ремонт выполняют две независимые фирмы. На практике чаще бывает иначе — обслуживает одна фирма. Отсюда ремонтная стратегия — стратегия очереди: первым пришел — первым обслужили.

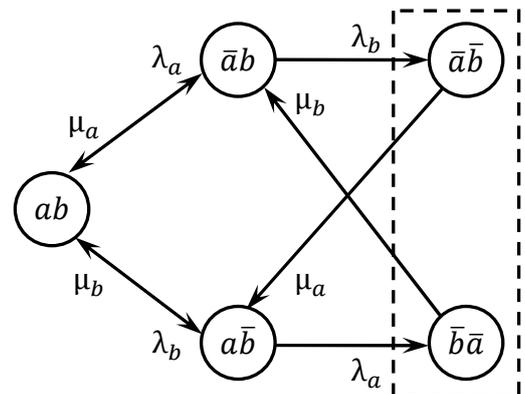


Рис. 1.15. Очередность ремонта

Составить систему уравнений стационарного состояния системы и получить численные значения вероятностей всех представленных на рис. 1.15 состояний, а также объединенного состояния отказа системы для следующих исходных данных:  $\lambda_a = \lambda_b = 1$ ;  $\mu_a = 10$ ;  $\mu_b = 20$ . Получить ПН эквивалентной системы (два состояния: работоспособность и отказ). Сравнить полученные результаты с аналогичными для стратегии, изображенной на рис. 1.15. Объяснить причину разницы вероятности отказа системы.

Ответ:

$$(P_{ab}, P_{\bar{a}b}, P_{a\bar{b}}, P_{\bar{a}\bar{b}}, P_{\bar{b}\bar{a}}, P_{\bar{a}\bar{b}} + P_{\bar{b}\bar{a}}) = (0,86; 0,082; 0,045; 0,0082; 0,0022).$$

### 1.3.6. Радиальная структура диаграммы состояний

Определенный интерес представляет частный случай — радиальная структура диаграммы состояний, связанная с появлением событий в заданной

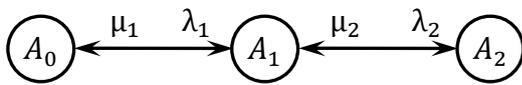


Рис. 1.16. Радиальная диаграмма состояний

последовательности (рис. 1.16) и часто называемая схемой гибели и размножения. Простейшим примером такой структуры является диаграмма одного элемента (см. рис. 1.18). Уравнение баланса частот

(неважно для какого из двух состояний —  $W$  (работа) или  $F$  (отказ)) в этом случае имеет вид  $\lambda P_W(t) = \mu P_F(t)$  или  $P_F(t) = \gamma P_W(t)$ , где ПН определяет среднюю суммарную за единицу времени длительность неработоспособного состояния элемента. Исходя из условия (1.12) — равенства единице суммы всех вероятностей — в рассматриваемом частном случае нетрудно получить искомые вероятности  $P_W(t) = K_r = 1/(1 + \gamma)$ ;  $P_F(t) = K_n = \gamma/(1 + \gamma)$ .

В структуре из трех состояний (рис. 1.16), исходя из частотного баланса в сечениях  $A_0 - A_1$ ,  $A_1 - A_2$ , получаем следующую систему алгебраических уравнений, характеризующую стационарный процесс:

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_0 &= \mu_1 P_1 & \Rightarrow & P_1 = \gamma_1 P_0; \\ \mu_2 P_2 &= \lambda_2 P_1 & \Rightarrow & P_2 = \gamma_2 P_1 = \gamma_1 \gamma_2 P_0; \\ P_0 + P_1 + P_2 &= 1. \end{aligned}$$

В общем случае в радиальной диаграмме из  $n$  состояний уравнение баланса частот последнего состояния

$$\lambda_n P_{n-1} = \mu_n P_n \tag{1.35}$$

дает соотношение  $P_n = \gamma_n P_{n-1}$ .

Уравнение равенства частот для состояния  $n - 1$  имеет вид

$$P_{n-1}(\lambda_n + \mu_{n-1}) = P_{n-2}\lambda_{n-1} + P_n\mu_n.$$

Подставляя  $P_n = \gamma_n P_{n-1}$ , получаем

$$P_{n-1}(\lambda_n + \mu_n) = P_{n-2}\lambda_{n-2} + P_{n-1}\lambda_n$$

или  $P_{n-1} = \gamma_{n-1} P_{n-2}$ .

Для произвольного состояния

$$P_i = \gamma_i P_{i-1}. \quad (1.36)$$

Таким образом, вероятность  $P_i$  каждого последующего события определяется произведением вероятности предшествующего события на параметр  $\gamma_i = \lambda_i/\mu_i$ , определяемый показателями надежности элемента  $i$ . Данный вывод не означает, что  $P_i$  не зависит от надежности последующих элементов. Поскольку сумма вероятностей всех состояний должна быть равна 1, то от вероятностных параметров составных событий зависит вероятность головного события

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{s=1}^n \gamma_{s0}} = \frac{1}{1 + \sum_{s=1}^n \prod_{k=1}^s \gamma_k} = \frac{1}{1 + \gamma_1(1 + \gamma_2(1 + \gamma_3(\dots(1 + \gamma_n)))}, \quad (1.37)$$

где  $\gamma_{s0} = \prod_{k=1}^s \gamma_k$ .

Вероятности отдельных состояний нетрудно получить согласно рекуррентному соотношению (1.36) или в общем виде

$$P_i = \gamma_{i0} P_0 = \frac{\gamma_{i0}}{1 + \sum_{s=1}^n \gamma_{s0}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Полученные выражения позволяют эквивалентировать радиальные структуры в сложных диаграммах состояний (рис. 1.17).

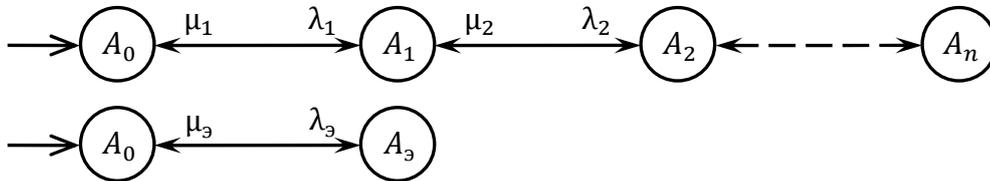


Рис. 1.17. Эквивалентирование радиальной структуры состояний

Если состояния  $\{A_i, i = 1, \dots, n\}$  функционально могут быть объединены в единую эквивалентную группу  $A_3$  (недоотпуск электроэнергии потребителям), то вероятность состояния  $A_3$

$$P_3 = 1 - P_0 = \frac{\gamma_3}{1 + \gamma_3} = \frac{\sum_{s=1}^n \gamma_{s0}}{1 + \sum_{s=1}^n \gamma_{s0}},$$

где  $\gamma_3 = \sum_{s=1}^n \gamma_{s0}$  — эквивалентная длительность восстановления.

Согласно определению (1.9) интенсивности связи узла и множества

$$\lambda_3 = \lambda_1.$$

Исходя из определения параметра  $\gamma = \lambda/\mu$  или условия равенства частот  $P_0 \lambda_1 = P_3 \mu_3$  получаем

$$\mu_3 = \frac{\lambda_1}{\gamma_3} = \frac{\lambda_1}{\sum_{s=1}^n \gamma_{s0}}.$$

Однако чаще в представленной структуре разбиение на два множества осуществляется по принципу: первые  $m + 1$  состояний относятся к классу  $S_1 = \bigcup_{i=0}^m A_i$ , а остальные — к классу  $S_2 = \bigcup_{i=m+1}^n A_i$ . В этом случае

$$P_{S_1} = \left( 1 + \sum_{s=1}^m \gamma_{s0} \right) P_0; \quad P_{S_2} = \left( \sum_{s=m+1}^n \gamma_{s0} \right) P_0.$$

Между множествами  $S_1$  и  $S_2$  существует единственная связь между состояниями  $A_m$  и  $A_{m+1}$ . Согласно определению интенсивности перехода между множествами и с учетом единственности связи между множествами получаем

$$\lambda_{\text{э}} = \lambda_{S_1-S_2} = \frac{\lambda_{m+1} P_m}{\sum_{i=1}^m P_i};$$

$$\mu_{\text{э}} = \lambda_{S_2-S_1} = \frac{\mu_{m+1} P_{m+1}}{\sum_{i=m+1}^n P_i}.$$

Далее нетрудно вычислить все остальные показатели надежности эквивалентной структуры.

### 1.3.7. Структура $m/n$ состояний

Специфической особенностью структурной надежности является допущение о бесконечной пропускной способности (ПС) элементов электрической сети. Это позволяет считать, что наличие хотя бы одного пути между источником питания (ИП) и узлом нагрузки обеспечивает работоспособность системы. Однако реально ПС связей ограничены. Отсюда возникает определенный скепсис к методам структурной надежности. В то же время математический аппарат расчета структур  $m/n$  частично позволяет учесть ограниченность ПС. Пусть каждая ЛЭП в представленной на рис. 1.18 электропередаче имеет ПС, равную 250 МВА. Следовательно, нагрузка 400 МВА может быть обеспечена электроэнергией при условии наличия не менее двух ЛЭП (ситуация, при которой остается одна линия, реально невозможна, поскольку при перегрузке связи последняя, как правило, отключается автоматически).

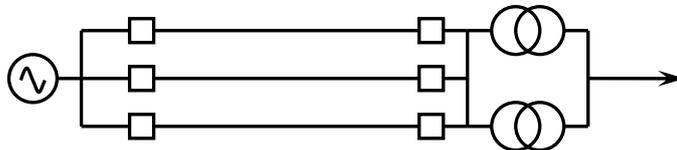


Рис. 1.18. Электропередача ограниченной пропускной способности

В рассмотренных ранее процедурах отказ системы электроснабжения произойдет лишь при отключении всех трех ЛЭП, и вероятность этого события (при вероятности отказа одной ЛЭП, равной  $q$ ) составляет  $Q_{\text{рез}} = q^3$ . В рассматриваемой структуре (в работе не менее двух ЛЭП) отказ происходит чаще. При биномиальном распределении вероятности отказа  $m$  элементов из  $n$  ( $P(m/n) = C_n^m q^m p^{n-m}$ ). Отсюда результирующая вероятность отказа ЛЭП  $Q_{\text{рез}} = 3q^{2p} + q^3$ .

Другим реальным примером структуры  $t/n$  является система электроснабжения предприятия, включающая, например, три питающих трансформатора. Отказ системы (недоотпуск электроэнергии) фиксируется, если происходит отказ двух из трех трансформаторов (один не справляется с нагрузкой — часть нагрузки отключается).

Структура отказов в приведенных примерах описывается последовательной диаграммой состояний  $t/n$  — система работоспособна, если из  $n$  элементов работоспособны не менее  $t$  (необходимо четко определять и адекватно учитывать  $t$  — число отказов или оставшихся в работе элементов, поскольку в расчетах часто возникают методические ошибки).

На рис. 1.19 представлена диаграмма состояний  $t/n$ . Состояние « $n$ » соответствует работоспособности всех  $n$  элементов. В состоянии « $n - 1$ » один элемент неработоспособен. Поскольку каждый из работающих элементов может отказать, то интенсивность перехода системы из состояния « $n$ » в состояние « $n - 1$ » определяется суммой интенсивностей отказа отдельных элементов (при равенстве составляющих —  $n\lambda$ ). Интенсивность обратного перехода определяется восстановлением только одного элемента ( $\mu$ ), поскольку в ремонте находится лишь один элемент.

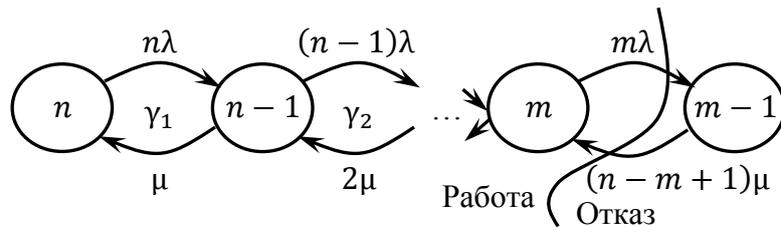


Рис. 1.19. Диаграмма состояний  $t/n$

По аналогии

$$\lambda_{m,m-1} = m\lambda; \quad \lambda_{m-1,m} = (n - m + 1)\mu.$$

Вероятность состояния « $n - i$ » ( $i = 1, \dots, n - m + 1$ )

$$P_{n-i} = P_n \prod_{j=i}^{n-1} \gamma_j,$$

где  $\gamma_j = (n - j + 1)\lambda / (j\mu)$ ,  $j = 1, \dots, n - m + 1$ .

Вероятность отказа  $P_F$  системы

$$P_F = P_{n-m+1} = \frac{\prod_{j=1}^{n-m+1} \gamma_j}{1 + \sum_{s=1}^{n-m+1} \prod_{j=1}^s \gamma_j}. \quad (1.38)$$

Эквивалентные интенсивности отказа и восстановления

$$\lambda_{\text{э}} = \frac{m\lambda P_m}{\sum_{i=m}^n P_i}; \quad \mu_{\text{э}} = (n - m + 1)\mu.$$

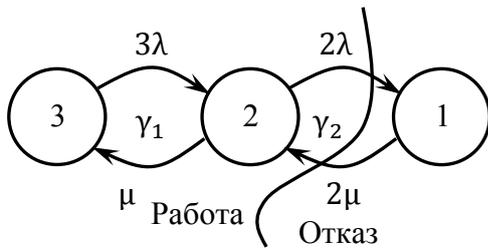


Рис. 1.20. Диаграмма состояний 2/3

Диаграмма состояний представлена на рис. 1.20.

Согласно исходным данным  $\gamma_1 = 3\lambda/\mu = 0,3$ ;  $\gamma_2 = 2\lambda/2\mu = 0,1$ . Вероятности состояний:

$$P_3 = \frac{1}{1 + 0,3 + 0,3 \cdot 0,1} = 0,752; P_2 = P_3\gamma_1 = 0,226; P_1 = P_2\gamma_2 = 0,0226.$$

Эквивалентная интенсивность восстановления  $\mu_3 = 2\mu = 20$ . Эквивалентная интенсивность отказа

$$\lambda_3 = \frac{2\lambda P_2}{P_3 + P_2} = \frac{2 \cdot 0,226}{0,752 + 0,226} = 0,462.$$

Относительная длительность отказа

$$\gamma_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{0,462}{20} = 0,0231.$$

Частота отказа

$$f = (P_3 + P_2)\lambda_3 = 0,978 \cdot 0,462 = 0,452.$$

$$f = P_1\mu_3 = 0,0226 \cdot 20 = 0,452.$$

Вероятность отказа (отключение 2/3 элементов)

$$P_1 = \frac{\gamma_3}{1 + \gamma_3} = \frac{0,0231}{1 + 0,0231} = 0,0226.$$

Величину  $P_F$  можно определить с помощью современных вычислительных средств (Excel, MatCad, MatLab и др.), используя биномиальное распределение, которое, как правило, входит в состав программного обеспечения. Состояние отказа характеризуется отказом  $n - m + 1$  элементов. Вероятность отказа одного элемента характеризуется его коэффициентом неготовности  $q = K_H = \gamma/(1 + \gamma)$ . Отсюда вероятность отказа  $n - m + 1$  элементов в полной системе (возможны все состояния, в том числе и отказ  $n$  элементов)

$$P_{n-m+1} = C_n^{n-m+1} K_H^{n-m+1} K_\Gamma^{m-1} = C_n^{m-1} K_H^{n-m+1} K_\Gamma^{m-1}. \quad (1.39)$$

Однако в рассматриваемой системе отказ более  $n - m + 1$  невозможен. Следовательно, сумма вероятностей только рассматриваемых состояний, определяемых по формуле биномиального распределения, не будет равна 1, хотя

соотношение между вероятностями отдельных состояний сохраняется. Это позволяет ввести нормирующий множитель

$$\alpha \sum_{i=0}^{n-m+1} P_i = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-m+1} P_i};$$

$$P_F = \alpha P_{n-m+1} = \frac{C_n^{m-1} K_H^{n-m+1} K_\Gamma^{m-1}}{\sum_{i=0}^{n-m+1} C_n^i K_H^i K_\Gamma^{n-1}}.$$

### 1.3.8. Кольцевая структура состояний

Кольцевая структура на рис. 1.21 характерна для следующих примеров. Имеется  $n$  запасных лампочек. Бежим в магазин, когда перегорят все лампочки, но не раньше. В гирлянде  $n$  изоляторов. Ремонт гирлянды производим, если разрушены два изолятора.

Условия баланса частот соответственно для состояний  $A_1, A_2$  имеют вид:

$$A_1: \lambda_1 P_0 = \lambda_2 P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} P_0;$$

$$A_2: \lambda_2 P_1 = \lambda_3 P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} P_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} P_0.$$

Для произвольного состояния  $A_i$ :  $P_i = (\lambda_1 / \lambda_{i+1}) P_0$ . Отсюда

$$P_0 = \frac{1}{1 + \lambda_1 \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i}}. \quad (1.40)$$

Следует заметить, что интенсивность  $\lambda_{n+1} = \mu$  последнего перехода отличается по своей физической сущности. Это интенсивность восстановления, в то время как все остальные интенсивности – это интенсивности отказа элемента.

Часто при расчете ПН принимается допущение о мгновенном восстановлении  $\tau = 0$ ,  $\mu = \infty$ . В этом случае вероятность последнего состояния равна нулю и оно может быть исключено из диаграммы состояний.

### 1.3.9. Формула полной вероятности

Известно, что если некоторое множество  $\{B_i, i = 1, \dots, n\}$  состояний системы с вероятностями  $\{P(B_i), i = 1, \dots, n\}$  образует полную группу  $\sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$ , то вероятность события  $A$  (например, отказ электроснабжения), которое может произойти при любом из состояний системы, определяется через условные вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i) P(B_i). \quad (1.41)$$

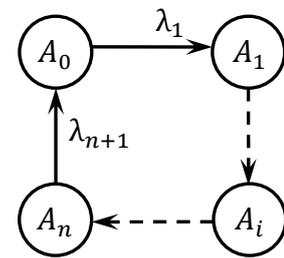


Рис. 1.21. Кольцевая диаграмма состояний

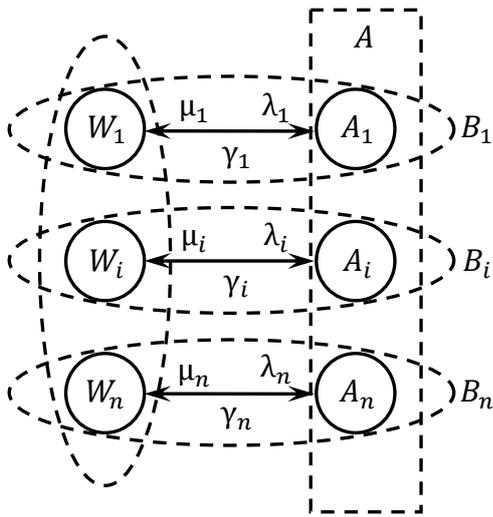


Рис. 1.22. Полная вероятностная группа

Если составное условное событие  $A/B_i$  описывается экспоненциальным распределением, то формула (1.41) является отражением диаграммы состояний, представленной на рис. 1.22. Здесь  $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i$  — вероятностные параметры переходов из работоспособного состояния  $W_i$ , относящегося к объединенному состоянию  $B_i$ , в неработоспособное состояние  $A_i/B_i$ .

Каждое состояние системы  $B_i$  анализируется отдельно. При этом сумма условных вероятностей всех входящих в состав  $B_i$  состояний равна 1 ( $P(W_i/B_i) + P(A_i/B_i) = 1$ ). Следовательно, для определения вероятностей состояний, интенсивностей, частот

и эквивалентных параметров могут использоваться все, в том числе и последовательно-параллельные, преобразования. Поскольку нас в большей степени интересуют эквивалентные структуры, то для каждого  $B_i$  можно указать два эквивалентных состояния:  $W_i$  — состояние работоспособности и  $A_i$  — состояние неработоспособности (восстановления системы).

При переходе к полной вероятностной группе суммарная (безусловная) вероятность рассматриваемых состояний становится равной  $P(B_i)$ . Отсюда вероятности всех входящих в состав  $B_i$  событий  $S_{ij}$ , которые были получены при анализе только состояния  $B_i$ , должны быть умножены на вероятность состояния  $B_i$ :  $P(S_{ij}) = P(S_{ij}/B_i)P(B_i)$ . В частности,

$$P(W_i) = P(W_i/B_i)P(B_i); \quad P(A_i) = P(A_i/B_i)P(B_i).$$

Следует заметить, что интенсивности переходов из одного состояния в другое не зависят от того, какие вероятности рассматриваются — условные или безусловные. Они являются параметрами экспоненциальных распределений длительности безотказной работы или восстановления конкретного элемента системы. Поскольку  $P(W_i/B_i) = 1/(1 + \gamma_i)$ ,  $P(A_i/B_i) = \gamma_i/(1 + \gamma_i)$ , то

$$P(W_i) = \frac{P(B_i)}{1 + \gamma_i};$$

$$P(A_i) = P(B_i) \frac{\gamma_i}{1 + \gamma_i}.$$

В результате все расчетные (эквивалентные) ПН являются средневзвешенными величинами, их веса определяются вероятностями групп. В частности, интегральная вероятность отказа системы

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{1 + \gamma_i} P(B_i) = \sum_{i=1}^n K_{\text{ни}} P(B_i).$$

Результирующая частота отказов, равная частоте восстановлений полной системы,

$$f(A) = \sum_{i=1}^n \mu_i P(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i K_{Hi} P(B_i) = \sum_{i=1}^n f_i P(B_i).$$

Результирующая эквивалентная интенсивность восстановления (весовые коэффициенты здесь равны  $K_{Hi} P(B_i)$ )

$$\mu_{\text{э}} = \frac{f(A)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i K_{Hi} P(B_i)}{\sum_{i=1}^n K_{Hi} P(B_i)}.$$

Эквивалентная интенсивность отказов

$$\lambda_{\text{э}} = \frac{f(A)}{P(W)} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i K_{Gi} P(B_i)}{\sum_{i=1}^n K_{Gi} P(B_i)}.$$

**Пример 1.9.** Пусть линия электропередачи в течение двух летних месяцев отказывает с интенсивностью  $\lambda_{\text{л}} = 0,5$  1/мес. (вероятность  $P_{\text{л}} = 1/6$ ), а в остальное время года — с интенсивностью  $\lambda_{\text{о}} = 0,1$  1/мес. (вероятность  $P_{\text{о}} = 5/6$ ). Математическое ожидание длительности восстановления  $\tau = 1/30$  мес. (один день). Интенсивность восстановления  $\mu = 1/\tau = 30$ . Требуется получить эквивалентные показатели надежности ЛЭП.

**Решение.** Рассматриваем два периода отдельно.

Летний период:  $\gamma_{\text{л}} = \lambda_{\text{л}} \tau = 1/60$ ;  $K_{\text{гл}} = 1/(1 + \gamma_{\text{л}}) = 60/61$ ;  $K_{\text{нл}} = \gamma_{\text{л}}/(1 + \gamma_{\text{л}}) = 1/61$ ;  $f_{\text{л}} = K_{\text{гл}} \lambda_{\text{л}} = 30/61 \approx 0,5$ .

Остальной период:  $\gamma_{\text{о}} = \lambda_{\text{о}} \tau = 1/300$ ;  $K_{\text{го}} = 1/(1 + \gamma_{\text{о}}) = 300/301$ ;  $K_{\text{но}} = 1/301$ ;  $f_{\text{о}} = K_{\text{го}} \lambda_{\text{о}} = 30/301 \approx 0,1$ .

Вероятность отказа ЛЭП

$$Q = K_{\text{нл}} P_{\text{л}} + K_{\text{но}} P_{\text{о}} = (1/61) \cdot (1/6) + (1/301) (5/6) = 0,0055.$$

Вероятность безотказной работы ЛЭП

$$P = K_{\text{гл}} P_{\text{л}} + K_{\text{го}} P_{\text{о}} = (60/61) (1/6) + (300/301) (5/6) = 0,9945.$$

Частота отказа

$$f = \mu (K_{\text{нл}} P_{\text{л}} + K_{\text{но}} P_{\text{о}}) = \mu Q = 30 \cdot 0,0055 = 0,165.$$

Интенсивность отказов

$$\lambda = f/P = 0,165/0,9945 = 0,166.$$

### 1.3.10. Метод декомпозиции

Для расчетов ПН наиболее удобны те схемы, которые последовательно параллельными преобразованиями приводятся к простейшей схеме «источник питания – связь – узел». Однако расчетные схемы, как правило, имеют более сложную структуру, например схема «мостика» (рис. 1.23), и в этом случае приходится использовать иные вычислительные процедуры, к числу которых относится и метод декомпозиции.

Сущность метода декомпозиции заключается в замене исходной схемы (рис. 1.23, а) на ряд составных (рис. 1.23, б, в) в зависимости от состояний некоторых выделенных элементов (например, связь  $x$  на рис. 1.23, а). Состояния элемента  $x$  — {«есть», «нет»} — образуют полную группу. Поэтому для диаграммы состояния метода декомпозиции по одному элементу можно использовать структуру полной вероятностной группы, т. е. выполнить расчеты показателей надежности по каждой из схем рис. 1.23, б, в и получить результирующие показатели через  $p_x, q_x$ .

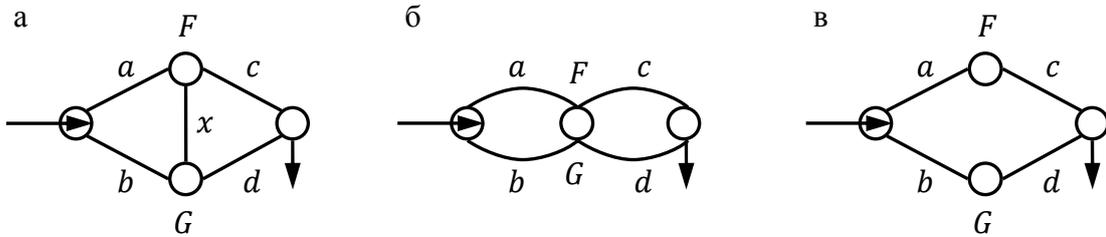


Рис.1.23. Схема мостика и ее декомпозиция

Однако при таком подходе теряется детальная информация о ПН элемента  $x$ . Нельзя сказать, что интенсивности не учитываются вообще — они учитываются интегрально через показатель  $\gamma_x$  ( $q_x = K_{нх} = \gamma_x / (1 + \gamma_x)$ ), но

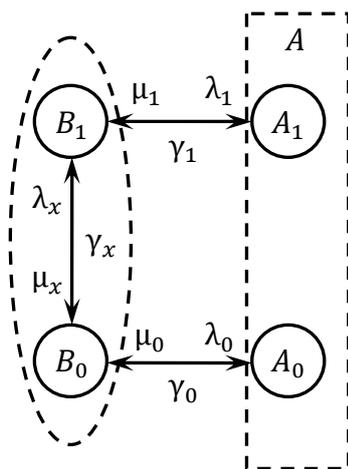


Рис. 1.24. Декомпозиция по элементу  $x$

часть информации при этом теряется.

Метод декомпозиции позволяет осуществить иную, полезную в практических приложениях, процедуру, реализующую принцип моногруппы состояний. Поскольку декомпозируемый элемент может находиться в двух состояниях (работоспособное и отказ), то переходы между состояниями этого элемента могут быть отражены соответствующими интенсивностями. В результате выделения декомпозируемого элемента  $x$  диаграмма состояний, соответствующая схеме рис. 1.23, может быть представлена как на рис. 1.24, где нулевой переход соответствует работоспособному состоянию элемента  $x$  (см. рис. 1.23, б), а первый — состоянию восстановления  $x$  (рис. 1.23, в).

Диаграмма состояний на рис. 1.24 представляет частный случай радиальной структуры (п. 1.3.2). Отсюда вероятности:

$$P(B_0) = \frac{1}{1 + \gamma_x + \gamma_0 + \gamma_1 \gamma_x}; P(B_1) = \gamma_x P(B_0);$$

$$P(A_1) = \gamma_x \gamma_1 P(B_0); \quad P(A_0) = \gamma_0 P(B_0).$$

Частота отказов  $f = (\lambda_0 + \gamma_x \lambda_1) P(B_0)$ .

Интенсивность отказов  $\lambda_э = (\lambda_0 + \gamma_x \lambda_1) / (1 + \gamma_x)$ .

Интенсивность восстановления

$$\mu_э = (\mu_0 \gamma_0 + \mu_1 \gamma_x \gamma_1) (\gamma_0 + \gamma_x \gamma_1) = (\lambda_0 + \lambda_1 \gamma_x) (\gamma_0 + \gamma_x \gamma_1).$$

**Пример 1.10.** Вычислить ПН схемы рис. 1.23, а при условии, что все элементы одинаковы и имеют параметры:  $\lambda = 1$ ;  $\mu = 10$ ;  $\gamma = 0,1$ ;  $K_H = 0,0909$ .

Декомпозируемый элемент работоспособен (см. рис. 1.23, б).

Параллельное соединение двух элементов:

$$\begin{aligned} K_H &= 0,0909^2 = 0,00826; & K_{\Gamma} &= 1 - 0,00826 = 0,9917; \\ \mu_{\text{пр}} &= 20; & f_{\text{пр}} &= 0,00826 \cdot 20 = 0,1652; \\ \lambda_{\text{пр}} &= \frac{f_{\text{пр}}}{K_{\Gamma}} = \frac{0,1652}{0,9917} = 0,1666; & \gamma_{\text{пр}} &= \frac{\lambda_{\text{пр}}}{\mu_{\text{пр}}} = \frac{0,1666}{20} = 0,00833. \end{aligned}$$

Последовательное соединение двух параллельных структур:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2\lambda_{\text{пр}} = 2 \cdot 0,1666 = 0,3332; & \gamma_0 &= 2\gamma_{\text{пр}} = 2 \cdot 0,00833 = 0,0167; \\ \mu_0 &= \frac{\lambda_0}{\gamma_0} = \frac{0,33}{0,0167} = 20. \end{aligned}$$

Декомпозируемый элемент неработоспособен (рис. 1.23, в).

Последовательное соединение двух элементов:

$$\lambda_{\text{пс}} = 2\lambda = 2; \quad \gamma_{\text{пс}} = 2\gamma = 2 \cdot 0,1 = 0,2; \quad \mu_{\text{пс}} = \frac{\lambda_{\text{пс}}}{\gamma_{\text{пс}}} = \frac{2}{0,2} = 10.$$

Параллельное соединение двух последовательных структур:

$$K_{H,\text{пс}} = \left[ \frac{\gamma_{\text{пс}}}{1 + \gamma_{\text{пс}}} \right]^2 = \left[ \frac{0,2}{1 + 0,2} \right]^2 = 0,02778; \quad K_{\Gamma,\text{пс}} = 1 - K_H = 0,972;$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2\mu_{\text{пс}} = 20; & f_{\text{пс}} &= K_H \mu_{\text{пс}} = 0,5556; \\ \lambda_1 &= \frac{f}{K_{\Gamma}} = \frac{0,556}{0,972} = 0,5715; & \gamma_1 &= \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{0,5715}{20} = 0,02855. \end{aligned}$$

### **Результирующие ПН**

Вероятность  $B_0$

$$P(B_0) = \frac{1}{1 + \gamma_x + \gamma_0 + \gamma_1 \gamma_x} = \frac{1}{1 + 0,1 + 0,01666 + 0,1 \cdot 0,02855} = 0,8932.$$

Вероятность отказа

$$P_A = P(B_0)(\gamma_0 + \gamma_1 \gamma_x) = 0,8932 \cdot (0,01666 + 0,1 \cdot 0,02855) = 0,01743.$$

Вероятность безотказной работы:

$$P_W = P(B_0)(1 + \gamma_x) = 0,8932 \cdot 1,1 = 0,9825.$$

Частота отказов

$$f = (\lambda_0 + \gamma_x \lambda_1) P(B_0) = (0,3332 + 0,1 \cdot 0,5714) \cdot 0,8932 = 0,3487.$$

Интенсивность отказов

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_0 + \gamma_x \lambda_1}{1 + \gamma_x} = \frac{0,3332 + 0,1 \cdot 0,5714}{1 + 0,1} = 0,3549.$$

Интенсивность восстановления

$$\mu_э = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 \gamma_x}{\gamma_0 + \gamma_x \gamma_1} = \frac{0,3332 + 0,1 \cdot 0,5714}{0,01666 + 0,1 \cdot 0,02855} = 20,002.$$

### Модель полной вероятностной группы

В соответствии с состояниями декомпозируемого элемента существуют два состояния, образующие полную группу (п. 1.3.5): элемент  $x$  в рабочем состоянии (вероятность  $P_0 = 1/(1 + 0,1) = 0,909$ ) и элемент  $x$  в отключенном состоянии (вероятность  $P_1 = 0,1/(1 + 0,1) = 0,091$ ).

Коэффициенты неготовности  $K_{H0}$  и  $K_{H1}$  определяются из предыдущих расчетов по методу декомпозиции

$$K_{H0} = \frac{0,01666}{1 + 0,01666} = 0,01639; \quad K_{H1} = 0,02778.$$

Вероятность отказа системы

$$P(A) = K_{H0}P_0 + K_{H1}P_1 = 0,01639 \cdot 0,909 + 0,02778 \cdot 0,091 = 0,01743.$$

Интенсивность восстановления (выхода из состояния отказа)

$$\mu(A) = \frac{\mu_0 K_{H0} P_0 + \mu_1 K_{H1} P_1}{P(A)} = \frac{20 \cdot 0,01743}{0,01743} = 20.$$

Эти показатели совпадают с соответствующими величинами, полученными по диаграмме состояний метода декомпозиции. Отсюда остальные ПН также совпадают.

**Самостоятельная работа.** Получить ПН системы электроснабжения, изображенной на рис. 1.23, при следующих исходных данных:

$$\lambda_a = \lambda_b = 2; \quad \tau_a = \tau_b = 0,1; \quad \lambda_c = \lambda_d = \lambda_x = 1; \quad \tau_c = \tau_d = \tau_x = 0,2.$$

Ответы представлены в табл. 1.8.

Таблица 1.8

Метод декомпозиции

Параметр	Схема $x = 1$	Схема $x = 0$	Итог
$\lambda$	0,8571	1,3333	0,9346
$\tau$	0,0667	0,0667	0,0512
$\mu$	15,0	15,0	19,544
$\gamma$	0,0571	0,0889	0,0623
$K_\Gamma$	0,9459	0,9184	0,9413
$K_H$	0,0541	0,0816	0,0587
$f$	0,8108	1,2245	1,1463

#### 1.4. Логико-вероятностные методы

В теории структурной надежности сложных технических систем рассматриваются элементы, которые могут находиться в двух возможных состояниях: работа – отказ, что описывается бинарными переменными: 1 – работа, 0 – отказ. Состояния реальной технической системы представляют собой сложные логические функции в пространстве бинарных переменных. Анализ таких функций является предметом изучения алгебры логики (булевой алгебры, названной по имени Джорджа Буля, впервые изложившего математический подход к вопросам исчисления высказываний). Аппарат булевой алгебры [30] достаточно успешно используется для расчета показателей структурной надежности [6].

Алгебра логики (булева алгебра) представляет собой раздел математической логики, занимающийся исчислением высказываний. Под высказыванием понимается любое предложение, относительно которого можно утверждать его истинность или ложность без учета конкретного содержания. Например, высказывание «частота системы измеряется в герцах» – истинное, а высказывание « $2 > 5$ » – ложное. Отдельные (элементарные) высказывания обозначаются некоторыми переменными ( $x$ ). При этом высказывание можно рассматривать как величину, которая принимает два значения: «истина» и «ложь». Если  $x$  истинно, то  $x = 1$ ; если  $x$  ложно, то  $x = 0$ .

Каждое конкретное высказывание имеет вполне определенное значение истинности (логическая константа). Но это значение может быть и переменным. Например, высказывание  $x$  «элемент работоспособен» с какой-то долей вероятности может быть истинным ( $x = 1$ ) или ложным ( $x = 0$ ). Переменная величина, которая принимает лишь два значения (1 или 0), называется двоичной (бинарной). Можно построить более сложные высказывания, истинность которых определяется значениями истинности составных высказываний. Они являются функциями более простых высказываний – аргументов. Функции, принимающие лишь два значения (1 или 0) и определяемые различными наборами двоичных аргументов, называются *двоичными функциями* или *функциями алгебры логики*. В алгебре логики рассматриваются три основные логические операции: отрицание, конъюнкция (умножение) и дизъюнкция (сложение). Результаты операций в терминах логических переменных «Истина» ( $T$ ),  $T \equiv 1$ , «Ложь» ( $F$ ),  $F \equiv 0$  представлены в табл. 1.9.

*Отрицание* (аналог дополнения множества). Отрицание высказывания  $x$  обозначается как  $\bar{x}$  (читается: «не  $x$ »). Значение истинности определяется соотношениями: если  $x = 1$ , то  $\bar{x} = 0$ ; если  $x = 0$ , то  $\bar{x} = 1$ .

*Дизъюнкция* (аналог объединения множеств). Логическое сложение высказываний  $x_1$  и  $x_2$  обозначается как  $x_1 \vee x_2$  или  $x_1 + x_2$  (читается « $x_1$  или  $x_2$ »). Результат операции есть «Ложь» в том и только том случае, когда обе составляющие принимают значение «Ложь». Если хотя бы одна составляющая есть «Истина», результат операции также «Истина»:

$$0 \vee 0 = 0; \quad 0 \vee 1 = 1; \quad 1 \vee 0 = 1; \quad 1 \vee 1 = 1.$$

## Логические операции

$A$	$B$	НЕ $A$ $\bar{A}$	$A$ ИЛИ $B$ $A \vee B$	$A$ И $B$ $A \wedge B$
$T$	$T$	$F$	$T: (1 \vee 1 = 1)$	$T: (1 \wedge 1 = 1)$
$T$	$F$	$F$	$T: (1 \vee 0 = 1)$	$F: (1 \wedge 0 = 0)$
$F$	$T$	$T$	$T: (0 \vee 1 = 1)$	$F: (0 \wedge 1 = 0)$
$F$	$F$	$T$	$F: (0 \vee 0 = 0)$	$F: (0 \wedge 0 = 0)$

*Конъюнкция* (аналог пересечения множеств). Логическое умножение высказываний  $x_1$  и  $x_2$  обозначается как  $x_1 \wedge x_2$  или  $x_1 \cdot x_2$  (читается « $x_1$  и  $x_2$ »). Результат операции есть «Истина» в том и только том случае, когда обе составляющие принимают значение «Истина». Если хотя бы одна составляющая есть «Ложь», то результат операции также «Ложь»:

$$0 \wedge 0 = 0; \quad 0 \wedge 1 = 0; \quad 1 \wedge 0 = 0; \quad 1 \wedge 1 = 1.$$

Основные правила преобразования логических выражений:

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= x; & x + 1 &= 1; & x \cdot 0 &= 0; & x + 0 &= 0; \\ x \cdot x &= x; & x + x &= x; & x \cdot \bar{x} &= 0; & x + \bar{x} &= 1. \end{aligned}$$

Сочетательный (ассоциативный) закон:

$$\begin{aligned} x_1(x_2 \cdot x_3) &= (x_1 \cdot x_2)x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3; \\ x_1 + (x_2 + x_3) &= (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Переместительный (коммутативный) закон:

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1; \quad x_1 + x_2 = x_2 + x_1.$$

Распределительный (дистрибутивный) закон:

$$\begin{aligned} x_1(x_2 + x_3) &= (x_1x_2) + (x_1x_3); \\ x_1 + (x_2x_3) &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3). \end{aligned}$$

Закон инверсий:

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2; \quad \overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$$

Операция поглощения:

$$\begin{aligned} x_1 + (x_1, x_2, \dots, x_n) + x_1 &= x_1 + (0, x_2, \dots, x_n); \\ x_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1(1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1.42}$$

В частности,

$$x_1 + (x_1x_2) = x_1; \quad x_1(x_2 + x_1) = x_1.$$

Операция склеивания:

$$\begin{aligned} (x_1x_2) + (x_1\bar{x}_2) &= x_1x_2 + x_1\bar{x}_2 = x_1(x_2 + \bar{x}_2) = x_1 \cdot 1 = x_1; \\ (x_1x_2) + (\bar{x}_1x_2) &= x_1x_2 + \bar{x}_1x_2 = x_2(x_1 + \bar{x}_1) = x_2 \cdot 1 = x_2. \end{aligned}$$

При преобразованиях логических выражений большую значимость имеет операция поглощения (1.42). Так функция работоспособности логической структуры, соответствующей рис. 1.25, а, может быть представлена выражением  $s = x_1 + (x_2(x_1 + x_2(x_3 + x_4)))$ , которое преобразуется к более простому виду

$$s = x_1 + (x_2(0 + 1(x_3 + x_4))) = x_1 + (x_2(x_3 + x_4)), \quad (1.43)$$

что соответствует рис. 1.25, б.

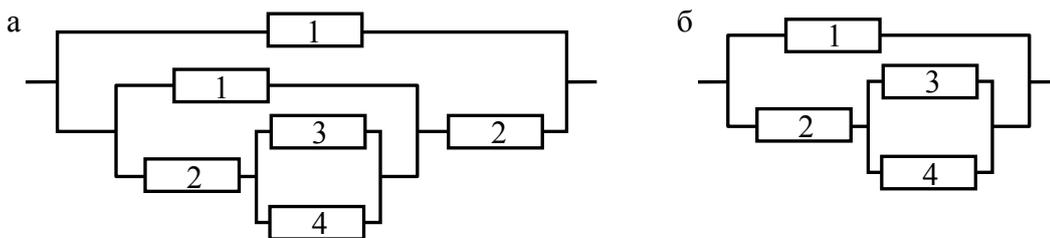


Рис. 1.25. Преобразование логической структуры

Функция неработоспособности соответствует инверсии (1.42):

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \bar{x}_1 \left( \bar{x}_2 + \left( \bar{x}_1(\bar{x}_2 + (\bar{x}_3\bar{x}_4)) \right) \right) = \bar{x}_1 \left( \bar{x}_2 + \left( 1(0 + (\bar{x}_3\bar{x}_4)) \right) \right) = \\ &= \bar{x}_1(\bar{x}_2 + (\bar{x}_3\bar{x}_4)). \end{aligned}$$

Применение алгебры логики для расчета показателей надежности сложных структур сводится к построению и преобразованию логических функций состояний системы  $Z(x)$ , аргументами которых являются двоичные переменные, характеризующие состояния элементов  $x_i$ .

#### 1.4.1. Монотонные структуры

Рассмотрим систему со следующими свойствами:

- 1) каждый элемент системы может находиться только в одном из двух возможных состояний – работы или отказа;
- 2) сама система, в свою очередь, также может находиться только в одном из двух возможных состояний – работы или отказа;
- 3) если работоспособны все элементы, то работоспособна и система;
- 4) если отказали все элементы, то система тоже находится в состоянии отказа;
- 5) отказ элемента в отказавшей системе не может восстановить ее работоспособность, и восстановление элемента в работающей системе не может вызвать отказ системы.

Системы, удовлетворяющие условиям 1 и 2, часто называют структурами. Если при этом также удовлетворяются условия 3, 4 и 5, то такие структуры называют *монотонными* [32]. Системы с монотонными структурами можно представить при помощи логических схем и, следовательно, их надежность можно исследовать при помощи сетевых методов, основанных на булевой алгебре.

Если исходя из  $x_i$  (или  $\bar{x}_i$ ) можно вычислить  $s$  (или  $\bar{s}$ ) последовательным применением операций «И» и «ИЛИ» (пересечения и объединения событий работы или отказа), то такие структуры называются *последовательно-параллельными*. Монотонные структуры, не являющиеся последовательно-параллельными, можно привести к последовательно-параллельному виду, используя приемы, связанные с минимальными путями и сечениями.

При последовательном и параллельном (в электрическом смысле) соединении элементов функция работоспособности (ФР) системы  $S_{\text{посл}} = x_1 x_2$  (работоспособны и первый, и второй элементы),  $S_{\text{пар}} = x_1 + x_2$  (работоспособны элементы или первый, или второй, или оба). Вообще, если функциональная связь элементов в системе структурно, в смысле надежности, может быть представлена в виде некоторой расчетной схемы соединения элементов, которые образуют пути между входом и выходом, то для такой схемы существуют регулярные методы получения логической функции работоспособности. Рассмотрим систему, схема которой показана рис. 1.26, а. Если функциональное взаимодействие элементов можно представить структурно в смысле надежности в виде мостиковой схемы (рис. 1.26, б), то ФР системы относительно третьего узла имеет вид

$$Z_3 = x_{12} x_{23} + x_{14} x_{43} + x_{14} x_{42} x_{23} + x_{12} x_{24} x_{43}. \quad (1.44)$$

Если учесть возможность отказа не только связей, но и узлов, то

$Z_3 = x_1 x_{12} x_2 x_{23} x_3 + x_1 x_{14} x_4 x_{43} x_3 + x_1 x_{14} x_4 x_{42} x_2 x_{23} x_3 + x_1 x_{12} x_2 x_{24} x_4 x_{43} x_3$ , где переменная  $x$  с одним индексом обозначает состояние узла, а с двумя индексами – состояние связи между соответствующими узлами.

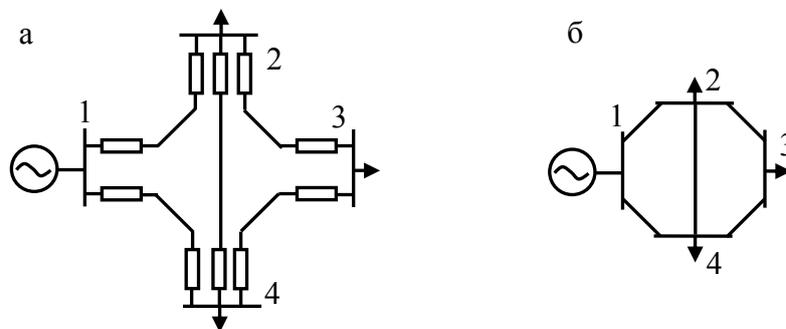


Рис. 1.26. Электрическая и расчетная схемы электрической сети

### 1.4.2. Метод минимальных путей и сечений

Анализ (1.44) показывает, что функция  $Z_3$  состоит из суммы (дизъюнкции) нескольких членов, каждый из которых представляет собой произведение (конъюнкцию) определенного набора событий. Если просмотреть этот набор, то увидим, что он включает в себя последовательно состояния всех элементов на одном из путей от источника к стоку (потребителю). В теории надежности вводится понятие пути и минимального пути.

*Путем  $v$*  называется множество элементов, работоспособное состояние которых обеспечивает работоспособное состояние системы. Соответ-

вующий набор элементов на логической (расчетной) схеме обеспечивает связь между входом (источником) и выходом (стоком) схемы.

*Минимальным путем* (МП) называется путь, удаление из которого хотя бы одного элемента приводит к тому, что оставшееся множество элементов перестанет быть путем. Иначе говоря, минимальный путь успешного функционирования системы описывает один из возможных самостоятельных вариантов выполнения заданных функций системы с помощью минимального набора работоспособных элементов.

На рис. 1.25 множество элементов  $\{1, 2\}$  является путем, но не минимальным, поскольку удаление элемента 2 не приводит к разрыву пути между источником и стоком. В то же время путь  $\{2, 3\}$  является минимальным, поскольку удаление любого элемента из этого множества приводит к разрыву пути между источником и стоком.

*Сечением* называется множество элементов, совокупный отказ которых приводит к отказу (отсутствию связи между источником и стоком) системы в целом.

*Минимальным сечением* (МС) называется сечение, удаление из которого хотя бы одного элемента приводит к тому, что оставшееся множество элементов уже не будет сечением (появится хотя бы один путь между источником и стоком). Например, множество элементов  $\{1, 2, 3\}$  на рис. 1.25 является сечением, но не минимальным, поскольку если элемент 3 рассматриваемого сечения работоспособен, то это не приводит к появлению пути между источником и стоком (отказ элементов 1, 2 достаточен для отказа системы). Сечение  $\{1, 2\}$  является минимальным, поскольку удаление любого элемента из этого множества приводит к появлению пути между источником и стоком (если элемент 1 работает, то работает и вся система; если работает элемент 2, то вся система будет работать при условии, что элемент 3 работоспособен).

Обозначим через  $v_i$  событие, заключающееся в том, что все элементы пути  $v_i$  работают, а через  $\bar{u}_i$  событие, заключающееся в том, что все элементы сечения  $C_i$  не работоспособны. Система находится в работоспособном состоянии, если имеется хотя бы один путь, и в состоянии отказа, если отказали все элементы хотя бы одного сечения. Отсюда функция работоспособности  $s$  и неработоспособности  $\bar{s}$  системы

$$s = v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_n; \quad \bar{s} = \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2 \vee \dots \vee \bar{u}_n.$$

Можно доказать, что  $s$  выражается при помощи только минимальных путей  $\{t_i\}$ , а  $\bar{s}$  – только минимальных сечений  $\{\bar{c}_i\}$ . Действительно, пусть в состав пути  $v_i$  входит  $t_i$ ,  $v_i = \{t_i \wedge (z_1 \wedge \dots \wedge z_m)\}$ . Тогда в выражении для  $s$  входит конъюнкция

$$\begin{aligned} t_i \vee v_i &= t_i \vee \{t_i \wedge (z_1 \wedge \dots \wedge z_m)\} = \\ &= t_i \vee \{0 \wedge (z_1 \wedge \dots \wedge z_m)\} = t_i, \end{aligned}$$

т. е. избыточный путь может быть удален из множества всех рассматриваемых путей. Аналогичный вывод делается в отношении минимальных сечений.

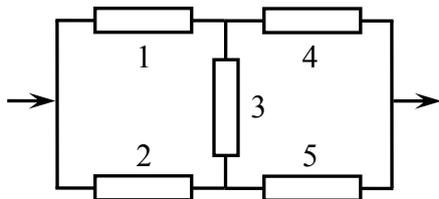


Рис. 1.27. Мостиковая структура

В качестве примера снова рассмотрим мостиковую схему (рис. 1.27). Можно указать следующую совокупность минимальных путей:  $t_1 = \{e_1, e_4\}$ ;  $t_2 = \{e_2, e_5\}$ ;  $t_3 = \{e_1, e_3, e_5\}$ ;  $t_4 = \{e_2, e_3, e_4\}$  (рис. 1.28) с вероятностями функционирования соответственно  $P_1 = p_1p_4$ ;  $P_2 = p_2p_5$ ;  $P_3 = p_1p_3p_5$ ;  $P_4 = p_2p_3p_4$ . Функция работоспособности системы относительно выбранного пути передачи энергии:

$Z = t_1 \vee t_2 \vee t_3 \vee t_4$ .

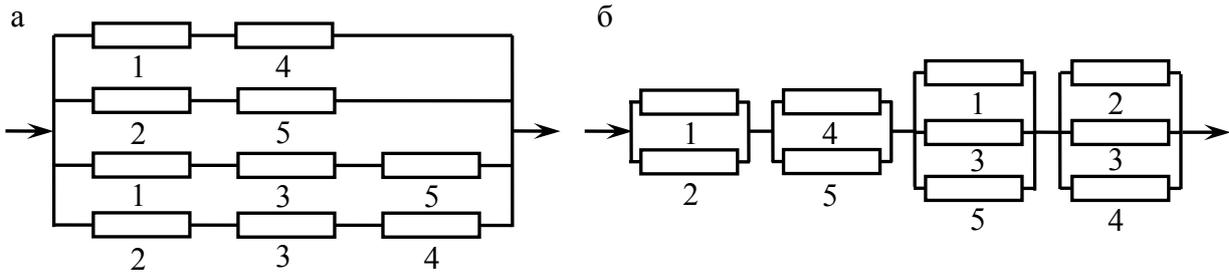


Рис. 1.28. Эквивалентные схемы:  
а – минимальных путей; б – минимальных сечений

#### Вероятность дизъюнкции

$$\begin{aligned}
 P(Z) &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - P(t_1, t_2) - P(t_1, t_3) - P(t_1, t_4) - P(t_2, t_3) - \\
 &- P(t_2, t_4) - P(t_3, t_4) + P(t_1, t_2, t_3) + P(t_1, t_2, t_4) + P(t_1, t_3, t_4) + \\
 &+ P(t_2, t_3, t_4) - P(t_1, t_2, t_3, t_4) = \\
 &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - P(e_1, e_2, e_4, e_5) - P(e_1, e_4, e_3, e_5) - P(e_1, e_2, e_3, e_4) - \\
 &- P(e_1, e_2, e_3, e_5) - P(e_2, e_3, e_4, e_5) + 2P(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = \\
 &= p_1p_4 + p_2p_5 + p_1p_3p_5 + p_2p_3p_4 - p_1p_2p_4p_5 - p_1p_4p_3p_5 - \\
 &- p_1p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_5 - p_2p_3p_4p_5 + 2p_1p_2p_3p_4p_5.
 \end{aligned}
 \tag{1.45}$$

Для однотипных элементов с вероятностью  $p$  безотказной работы элемента  $P(Z) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$ . В частности, при  $p = 0,9091$  (пример в п. 1.3.6)  $P(Z) = 0,9823$  (по сравнению с  $0,9826$  в методе декомпозиции; небольшая разница объясняется спецификой учета совместных отказов ремонтнопригодных элементов).

При решении задачи методом минимальных сечений можно указать следующую совокупность минимальных сечений:  $c_1 = \{e_1, e_2\}$ ;  $c_2 = \{e_4, e_5\}$ ;  $c_3 = \{e_1, e_3, e_5\}$ ;  $c_4 = \{e_2, e_3, e_4\}$  (рис. 1.28) с вероятностями отказа соответственно  $Q_1 = q_1q_2$ ;  $Q_2 = q_4q_5$ ;  $Q_3 = q_1q_3q_5$ ;  $Q_4 = q_2q_3q_4$ . Функция неработоспособности  $\bar{Z} = c_1 \vee c_2 \vee c_3 \vee c_4$ .

## Вероятность дизъюнкции

$$\begin{aligned}
 P(\bar{Z}) &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - P(c_1, c_2) - P(c_1, c_3) - P(c_1, c_4) - P(c_2, c_3) - \\
 &- P(c_2, c_4) - P(c_3, c_4) + P(c_1, c_2, c_3) + P(c_1, c_2, c_4) + P(c_1, c_3, c_4) + \\
 &+ P(c_2, c_3, c_4) - P(c_1, c_2, c_3, c_4) = \\
 &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - P(e_1, e_2, e_4, e_5) - P(e_1, e_2, e_3, e_5) - P(e_1, e_2, e_3, e_4) - \\
 &- P(e_1, e_3, e_4, e_5) - P(e_2, e_3, e_4, e_5) + 2P(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = \\
 &= q_1 q_2 + q_4 q_5 + q_1 q_3 q_5 + q_2 q_3 q_4 - q_1 q_2 q_4 q_5 - q_1 q_2 q_3 q_5 - \\
 &- q_1 q_2 q_3 q_4 - q_1 q_3 q_4 q_5 - q_2 q_3 q_4 q_5 + 2q_1 q_2 q_3 q_4 q_5.
 \end{aligned}$$

Для однотипных элементов с вероятностью отказа  $q$  вероятность отказа системы  $P(\bar{Z}) = 2q^2 + 2q^3 - 5q^4 + 2q^5$ . В частности, при  $q = 0,0909$   $P(\bar{Z}) = 0,0177$  (по сравнению с  $0,0174$  в методе декомпозиции), а  $P(Z) = 1 - 0,0177 = 0,9823$ . Результат тот же самый, что и полученный методом МП.

## Оценка вероятности работоспособности системы

Методы минимальных путей и сечений используются во многих промышленных программах расчета ПН. В то же время эти методы удобно использовать для верхних и нижних оценок надежности сложных структурных схем. Вероятность дизъюнкции в выражении (1.45) структурно состоит из положительных и отрицательных групп

$$\begin{aligned}
 P(Z) &= \sum_{\forall i} P(t_i) - \sum_{j>i} P(t_i, t_j) + \sum_{k>j>i} P(t_i, t_j, t_k) - \\
 &- \sum_{s>k>j>i} P(t_i, t_j, t_k, t_s) + \sum_{u>s>k>j>i} P(t_i, t_j, t_k, t_s, t_u).
 \end{aligned}$$

**Оценка Эзари-Прошана.** При достаточно большом числе путей использование формулы (1.45) в полном объеме практически невозможно. В то же время, в теории надежности показывается, что

$$\begin{aligned}
 P(Z) &< \sum_{\forall i} P(t_i) - \sum_{j>i} P(t_i, t_j) + \sum_{k>j>i} P(t_i, t_j, t_k); \\
 &\sum_{\forall i} P(t_i) - \sum_{j>i} P(t_i, t_j) < \\
 &< \sum_{\forall i} P(t_i) - \sum_{j>i} P(t_i, t_j) + \sum_{k>j>i} P(t_i, t_j, t_k) - \sum_{s>k>j>i} P(t_i, t_j, t_k, t_s) < P(Z),
 \end{aligned}$$

т. е. каждая последующая знаковая группа уточняет величину вероятностей (сверху и снизу) по критерию МП (рис. 1.29). Аналогичная картина присуща минимальным сечениям. В результате можно получить сколь угодно узкие интервалы для оценки надежности по методу минимальных путей и сечений. Наиболее грубая оценка может быть сделана по первым знаковым группам:

$$1 - \sum_{\forall i} P(s_i) < P(Z) < \sum_{\forall i} P(t_i).$$

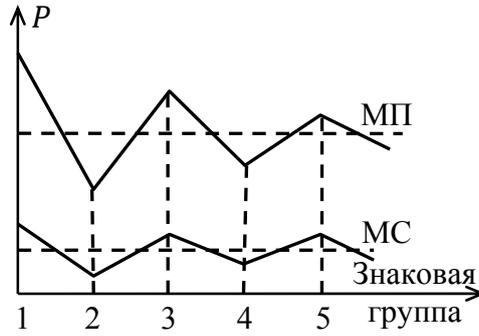


Рис. 1.29. Сходимость вероятности

Описанный подход оценки надежности сложных схем носит название оценки Эзари-Прошана. В приведенном выше примере

$$\sum_{\forall i} P(t_i) = P(e_1, e_4) + P(e_2, e_5) + P(e_1, e_3, e_5) + P(e_2, e_3, e_4) =$$

$$= 2 \cdot 0,9091^2 + 2 \cdot 0,9091^3 = 3,156;$$

$$- \sum_{j>i} P(t_i, t_j) = -[P(t_1, t_2) + P(t_1, t_3) + P(t_1, t_4) + P(t_2, t_3) +$$

$$+ P(t_2, t_4) + P(t_3, t_4)] = -[P(e_1, e_2, e_4, e_5) + P(e_1, e_4, e_3, e_5) +$$

$$+ P(e_1, e_2, e_3, e_4)P(e_1, e_2, e_3, e_5)P(e_2, e_3, e_4, e_5) +$$

$$+ P(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)] = 5 \cdot 0,9091^4 + 0,9091^5 = -4,036;$$

$$\sum_{k>j>i} P(t_i, t_j, t_k) = P(t_1, t_2, t_3) + P(t_1, t_2, t_4) + P(t_1, t_3, t_4) +$$

$$+ P(t_2, t_3, t_4) = P(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = 4 \cdot 0,9091^5 = 2,48;$$

$$- \sum_{s>k>j>i} P(t_i, t_j, t_k, t_s) = -P(t_1, t_2, t_3, t_4) = -0,9091^5 = -0,62.$$

Оценочный ряд вероятностей: 3,156; -0,881; 1,603; 0,982.

Проверочные расчеты показывают, что, несмотря на истинность утверждения о верхней и нижней оценке диапазона, использовать на практике данный критерий следует осторожно – слишком широкий диапазон оценок (вплоть до выхода вероятностей за пределы интервала (0, 1)), что имеет место в представленном примере. Поэтому для достаточно точной оценки ПН методом минимальных путей и сечений необходимо использовать полную формулу, а оценка Эзари-Прошана для практических расчетов малоприспособна.

**Оценка Литвака-Ушакова** [33] строится на понятии монотонных структур. Его физический смысл заключается, по сути, в том, что повышение надежности элементов системы не ухудшает надежности исходной системы и наоборот (например, исключение ребер графа не повышает вероятность его

связности). В более строгих терминах структура называется монотонной, если выполняются следующие условия:

1.  $\Phi(1) = 1$ , где  $1 = (1, 1, \dots, 1)$ ;
2.  $\Phi(0) = 0$ , где  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ ;
3.  $\Phi(x) \geq \Phi(y)$ , если  $x > y$ ,

где условие  $x > y$  понимается как совокупность  $n$  условий  $x_i \geq y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , причем хотя бы один раз неравенство выполняется строго.

Как уже было показано выше, на примере структурной схемы мостика, в графе с произвольной неприводимой структурой подмножества ребер различных МП могут пересекаться, т. е. быть зависимыми. Это же может происходить и с подмножествами ребер, составляющими МС. В то же время в любом двухполюсном графе важно выделить определенные подмножества МП (соответственно МС), которые содержат только непересекающиеся подмножества ребер.

Рассмотрим сначала оценку с выделением подмножества непересекающихся МП. Конструктивно такая процедура может быть организована следующим образом: выделяется какой-либо произвольный МП. Принадлежащие ему ребра исключаются из двухполюсного графа. В оставшемся подграфе выделяется новый минимальный путь (если это возможно) и т. д. Процедура заканчивается, когда на очередном шаге процесса оставшийся подграф оказывается несвязным.

Понятно, что в общем случае возможно несколько различных вариантов таких подмножеств непересекающихся путей в двухполюсном графе. Рассмотрим произвольное представление двухполюсного графа в виде некоторого подмножества непересекающихся минимальных путей.

Нетрудно понять, что в результате построения любого подмножества реберно не пересекающихся МП на некотором шаге остаются ребра, образующие несвязный (относительно выбранных полюсов) подграф. Это эквивалентно построению графа из параллельно соединенных реберно не пересекающихся МП методом исключения из исходного графа ребер, принадлежащих оставшемуся несвязному подграфу. Отсюда с учетом определения монотонной структуры следует, что поскольку  $\mathbf{x} \supseteq \mathbf{x}_s^*$ , то и  $\Phi(\mathbf{x}) \geq \Phi(\mathbf{x}_s^*)$ , где  $\mathbf{x}$  – множество ребер в исходном графе;  $\mathbf{x}_s^*$  – подмножество ребер в графе, состоящем из некоторого  $s$ -го подмножества реберно не пересекающихся МП. Следовательно, и для вероятности связности для этих двух подмножеств ребер имеет место неравенство  $P(\mathbf{x}) \geq P(\mathbf{x}_s^*)$ . Это и определяет нижнюю оценку по Литваку-Ушакову.

В рассмотренном примере можно указать два реберно не пересекающихся пути  $(t_1, t_2)$ , т. е. сеть можно представлять как параллельное соединение этих путей. Вероятность связности одного пути  $P(Z) = 0,9091^2 = 0,826$ . Вероятность нарушения связности  $q = (1 - 0,826)^2 = 0,03$ . Это нижняя оценка вероятности связности сети. Тот же подход может быть распространен на МС. В результате через реберно не пересекающиеся мини-

мальные сечения можно получить нижнюю оценку вероятности несвязности графа, а следовательно, и верхнюю оценку вероятности его связности.

Параллельно-последовательная структура путей или сечений, не содержащих одинаковые элементы, позволяет оценить не только вероятности, но и интенсивности отказа и восстановления сложной структуры, что практически невозможно в обобщенном методе МП и МС.

**Независимость минимальных путей и сечений.** Для приближенной оценки предлагается считать минимальные пути и сечения независимыми друг от друга. В этом случае вероятность расширенного множества МП или МС (полученного добавлением нового МП или МС) определяется по формуле сложения вероятностей, т. е.:

$$P(a + b) = P(a) + P(b) - P(a)P(b).$$

Здесь вероятность не выйдет за пределы единицы. В рассмотренном примере  $P(t_1) = P(t_2) = (1 - 0,091)^2 = 0,8264$ ;  $P(t_3) = P(t_4) = (1 - 0,091)^3 = 0,7513$ ;  
 $P(t_1 + t_2) = P(t_1) + P(t_2) - P(t_1)P(t_2) = 2 \cdot 0,8264 - 0,8264^2 = 0,97$ ;  
 $P(t_3 + t_4) = P(t_3) + P(t_4) - P(t_3)P(t_4) = 2 \cdot 0,7513 - 0,7513^2 = 0,938$ ;  
 $P(Z) = P(t_1 + t_2) + P(t_3 + t_4) - P(t_1 + t_2)P(t_3 + t_4) = 0,97 + 0,938 - 0,97 \cdot 0,938 = 0,998$ .

Как и следовало ожидать, мы получили верхнюю оценку вероятности безотказной работы (не учитывается возможность одновременного отказа двух или нескольких путей из-за наличия общих элементов), которая существенно отличается от точного значения  $P(Z) = 0,9823$ .

В методе МС аналогичная оценка вероятности отказа системы при  $q(c_1) = q(c_2) = 0,0912 = 0,008264$ ,  $q(c_3) = q(c_4) = 0,0913 = 0,000751$ ;  
 $q(c_1 + c_2) = q(c_1) + q(c_2) - q(c_1)q(c_2) = 2 \cdot 0,008264 - 0,008264^2 = 0,0165$ ;  
 $q(c_3 + c_4) = q(c_3) + q(c_4) - q(c_3)q(c_4) = 2 \cdot 0,000751 - 0,000751^2 = 0,0015$ ;  
 $Q = q(c_1 + c_2) + q(c_3 + c_4) - q(c_1 + c_2)q(c_3 + c_4) = 0,0165 + 0,0015 - 0,0165 \cdot 0,0015 = 0,018$ .

Это достаточно хорошая нижняя оценка вероятности отказа (погрешность не превышает 1,5 %). Поэтому данный подход в методе МС можно рекомендовать для практической оценки надежности электроэнергетических объектов.

### 1.4.3. Базисные разрезы

Существующая практика использования минимальных сечений, как правило, заключается в идентификации МС относительно рассматриваемого узла (п. 1.4.2), что является реализацией последовательного принципа расчетов – от узла к узлу. При этом описанная выше процедура не дает ответа на вопрос: как определить множество МС? Одним из решений поставленной проблемы является известный в теории графов алгоритм базисных разрезов (БР) [34]. Кольцевая сумма БР позволяет сгенерировать новый разрез, который разделяет множество узлов на два подмножества – связанных и не свя-

занных с ИП. Именно такие разрезы, определяемые как минимальные сечения, представляют интерес для расчетов ПН сложных схем. Это позволяет использовать БР для одновременного использования при расчетах ПН узлов в отсекаемой части системы [45], что является реализацией параллельного принципа расчетов [38].

**Основные правила формирования разрезов.** Согласно [34] под разрезом понимается множество элементов, удаление которых делает граф несвязным. При анализе надежности ЭЭС следует рассматривать не все разрезы, а только те, которые разделяют граф на две компоненты связности. Для построения множества МС широкое применение получил метод, основанный на представлении расчетного графа в виде остова графа и множества хорд. Остов графа — это образующая связный граф совокупность  $n + 1$  узла и  $n$  ветвей, в которую включаются все узлы расчетного графа, и  $n$  связывающих их ветвей при условии, что удаление любой ветви приводит к нарушению связности остова. Остов графа часто идентифицируют с деревом (остов – дерево связного графа). Следует заметить, что каждая хорда образует независимый контур.

Процедура определения множества МС может быть формализована. Известно, что всякий разрез может быть представлен в виде кольцевой суммы (суммы по модулю 2:  $0 \oplus 0 = 0$ ;  $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$ ;  $1 \oplus 1 = 0$ ) БР, т. е. таких разрезов, в состав которых входит не более одной ветви остова графа [34]. Совокупность БР удобно изображать в виде расширенной матрицы базисных разрезов  $R = [E | S | M]$ , где  $E$  – единичная матрица размерностью  $(n, n)$ ;  $n$  – число ветвей остова;  $S$  – прямоугольная матрица, соответствующая хордам графа,  $S_{ij} = 1$ , если хорда  $j$  входит в разрез  $i$ , и  $S_{ij} = 0$  в противном случае;  $M$  – квадратная матрица разделяемых множеств узлов,  $M_{ij} = 0$ , если узел  $j$  в разрезе  $i$  относится к тому же подмножеству, что и базисный узел и  $M_{ij} = 1$  в противном случае. При этом произвольный разрез  $r$  определяется через кольцевую сумму двух строк матрицы  $R$ :  $r = R_\alpha \oplus R_\beta$ , где  $R_\alpha, R_\beta$  — векторы-строки матрицы БР.

Нетрудно получить совокупность МС, соответствующих некоторому заданному узлу  $k$ , чтобы в результирующем разрезе соблюдалось  $M_{ik} = 1$ , что означает, что узел  $k$  будет в отсекаемом подмножестве узлов.

Матрица базисных разрезов, соответствующая исходному графу на рис. 1.30, а, а также его разложению на дерево (рис. 1.30, б, и хорды (рис. 1.30, в) представлены в табл. 1.10. В частности, разрез  $R_2$  (вторая строка) включает в себя ветвь дерева  $B_2$  и хорды  $B_5, B_6$ . При этом от ИП отсекаются узлы 2, 3, 4 (в матрице  $M$  им присвоены единицы).

Подматрицу хорд можно строить согласно принципу – при исключении ветви дерева (например,  $B_2$ ), соответствующей разрезу ( $R_2$ ), определяются множества узлов, связанных и не связанных с ИП (базисным узлом). Эти узлы в подматрице  $M$  идентифицируются соответственно нулями (узел 1) и единицами (узлы 2, 3, 4). Ветви ( $B_5, B_6$ ), связывающие эти два подмножества узлов, входят в рассматриваемый разрез.

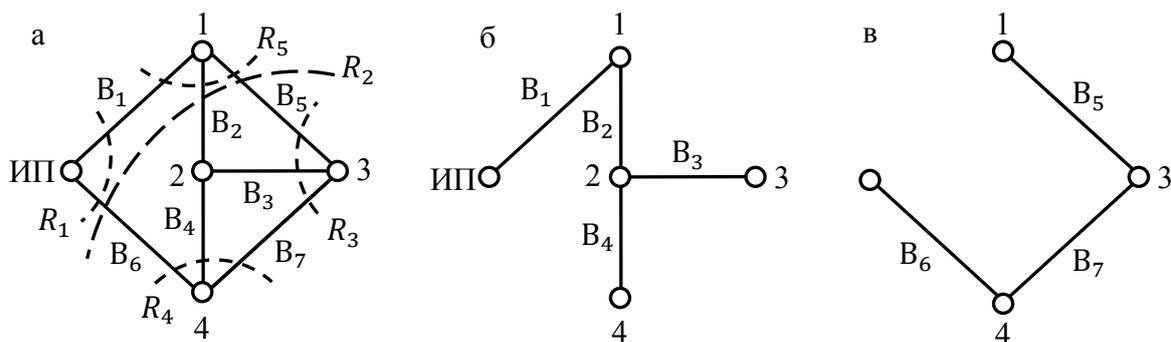


Рис. 1.30. Разложение графа на дерево и хорды:  
 а – исходный граф; б – дерево; в – кограф (хорды)

Подматрицу  $S$  можно строить иначе – по столбцам, соответствующим хордам. Каждая хорда при ее подключении замыкает контур, в который кроме нее входит еще ряд ветвей дерева. Отсюда рассматриваемая хорда обязательно будет входить в состав разрезов, соответствующих данным ветвям дерева. Например, хорда  $B_6$  замыкает контур, в который входят ветви дерева ( $B_1, B_2, B_4$ ), соответствующие разрезам ( $R_1, R_2, R_4$ ). Именно в строки, соответствующие этим разрезам, записываются единицы в столбце, соответствующем хорде  $B_6$ .

Таблица 1.10

Матрица базисных разрезов

Разрез	$E$				$S$			$M$			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$	1	2	3	4
$R_1$	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
$R_2$	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
$R_3$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
$R_4$	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
$R_5 = R_1 \oplus R_2$	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
$R_1 \oplus R_3$	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
$R_1 \oplus R_4$	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
$R_2 \oplus R_3$	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
$R_3 \oplus R_4$	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
$R_2 \oplus R_4$	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
$R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
$R_2 \oplus R_3 \oplus R_4$	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Произвольный разрез  $R_5 = R_1 \oplus R_2$ , представляющий кольцевую сумму разрезов  $R_1, R_2$ , отсекает от ИП только узел 1, что с успехом идентифицируется подматрицей  $M$ .

В рассматриваемом примере минимальные сечения относительно некоторого заданного узла, например узла 1, идентифицируются по единице в столбце, соответствующем рассматриваемому узлу. Для узла 1 это  $R_1, R_1 \oplus R_2, R_1 \oplus R_3, R_1 \oplus R_4$ . Нетрудно видеть, что разрез  $R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$  является также допустимым. Он делит граф на две компоненты:  $(Y_1, Y_3); (Y_2, Y_4)$ . Полученный в результате двойной кольцевой суммы разрез  $R_2 \oplus R_3 \oplus R_4$  является трехэлементным, как некоторые из БР. Это подтверждает утверждение о том, что малоэлементные разрезы могут появиться после многократного кольцевого суммирования.

Известны рекомендации по ограничению совокупности анализируемых разрезов числом  $2n - 1$  [38]. Однако использование ЭВМ позволяет расширить рассматриваемое множество. Это целесообразно, поскольку даже при многократном сочетании БР могут появиться значимые двухэлементные сечения. Кроме того, часто требуется выполнить анализ многоэлементных МС.

При формировании произвольного разреза путем кольцевого суммирования БР возникает задача определения допустимости разреза (разрез должен разделять граф точно на две компоненты связности). Для этого необходимо выполнение сформулированных ниже условий.

Составляющие  $R_\alpha, R_\beta$  произвольного разреза  $R = R_\alpha \oplus R_\beta$  должны иметь общие хорды. Пусть  $R_\alpha, R_\beta$  разделяют ЭЭС на несвязные множества узлов  $(Y_1, Y_2), (Y_3, Y_4)$  соответственно. Предположим, что разрезы  $R_\alpha, R_\beta$  не имеют общих элементов. Это означает, что разрез, например  $R_\beta$ , разделяет узлы, принадлежащие либо  $Y_1$ , либо  $Y_2$  (для определенности будем считать  $Y_2$ ). Узлы, принадлежащие  $Y_2$  и являющиеся граничными между  $Y_1$  и  $Y_2$  (рис. 1.31, а), не входят в  $Y_4$ . Таким образом, результирующий разрез разделяет граф на три компоненты, что недопустимо.

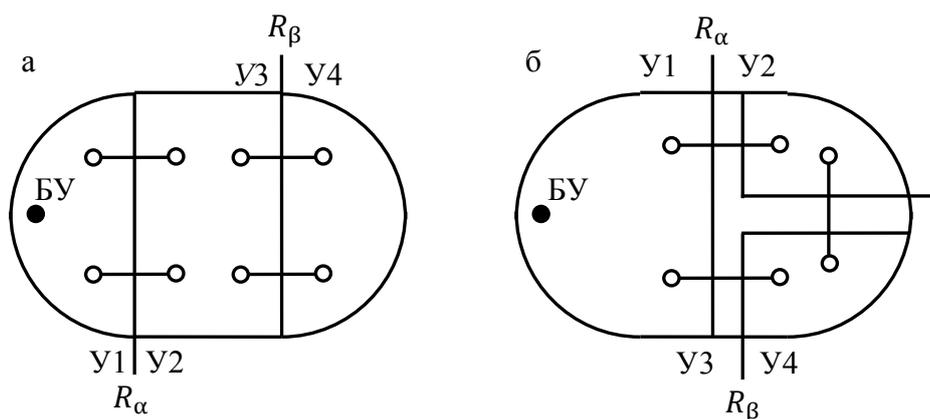


Рис. 1.31. Комбинации разрезов:  
а – отдельные; б – совмещенные

Указанное свойство является необходимым, но не достаточным. Дополнительное условие появляется при анализе подматрицы  $M$ . Заметим, что общие элементы суммируемых разрезов не входят в результирующий разрез. Следовательно, узлы, объединяемые общими элементами, будут принадлежать одному подмножеству. При рассмотрении следующего условия предположим, что узлы из  $Y_2, Y_4$  идентифицируются единицами.

Результирующий граф разреза будет двухкомпонентным, если при наличии общих элементов в МС множество  $У4$  целиком входит либо в  $У2$ , либо в  $У1$ . Если  $У4 \subset У2$ , то в новом графе  $У4$  (рис. 1.31, б) будет идентифицироваться нулями, а если  $У4 \subset У1$ , то единицами. Отсюда условие допустимости разреза может быть получено путем анализа строк матрицы  $M$ . Если всем единицам строки  $M_\alpha$  соответствуют единицы строки  $M_\beta$  (индексы  $\alpha, \beta$  могут поменяться местами), или каждой единице строки  $M_\alpha$  соответствует нуль строки  $M_\beta$  и единице строки  $M_\beta$  – нуль строки  $M_\alpha$ , то при наличии общих элементов разрезов результирующий граф будет двухкомпонентным, а рассматриваемый разрез допустимым.

Данное условие целесообразно выразить в виде соотношения между числами  $N_\alpha, N_\beta, N_R$  узлов, идентифицируемых единицами в разрезах  $R_\alpha, R_\beta, R$ . Если  $У4 \subset У2$ , то в результирующем графе  $У4$  строка  $M$  будет содержать столько же единиц, сколько их в  $M_\alpha$  за вычетом числа единиц в  $R_\beta$ :

$$N_R = N_\alpha - N_\beta,$$

а если  $У4 \subset У1$ , то

$$N_R = N_\alpha + N_\beta. \quad (1.46)$$

Отсюда (с учетом симметричности индексов  $\alpha, \beta$ ) разрез будет допустимым, если при наличии общих элементов выполняются либо (3.1), либо (3.2).

$$N_R = |N_\alpha - N_\beta|. \quad (1.47)$$

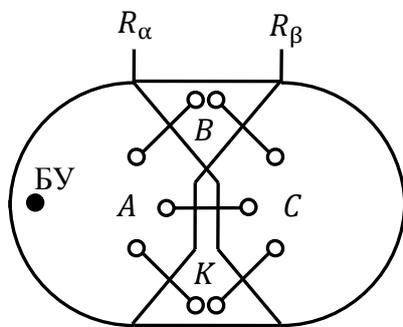


Рис. 1.32. Разделенные множества

Если сформулированное условие не выполняется, то результирующий граф не будет двухкомпонентным. Действительно, имеющие общие элементы разрезы  $R_\alpha, R_\beta$  разделяют ЭЭС на четыре подсистемы  $A, B, C, K$ , причем  $У1 = АUK$ ,  $У2 = ВUC$ ,  $У3 = АUB$ ,  $У4 = СUK$  (рис. 1.32).

В результирующем графе множества  $A$  и  $C$  объединяются и идентифицируются нулями. Множества  $B$  и  $K$  будут идентифицированы единицами, но, несмотря на это, они не имеют общих элементов, т. е. являются самостоятельными подмножествами. Таким образом, результирующий граф оказывается трехкомпонентным, что недопустимо для минимального сечения. Как правило, МС формируются только из БР и разрезов, образующихся путем кольцевой суммы различных комбинаций БР. Тройные кольцевые суммы, как правило, приводят к трехкомпонентной структуре.

**Вероятностные показатели МС.** Выделение МС позволяет оценить его вероятностные показатели (вероятность  $q_c$  и интенсивность  $\lambda_c$  разделения подсистем по сечению, длительность восстановления сечения  $\tau_c$ ). При этом считаются известными аналогичные показатели составных элементов:

$\lambda_i$ ,  $\tau_i$ ,  $\mu_i = 1/\tau_i$ , а также интенсивность преднамеренных отключений  $\lambda_i^*$  и длительность плановых восстановлений  $\tau_i^* = 1/\mu_i^*$ . Дополнительно определяется вероятность отказа МС  $q_i = \gamma_i/(1 + \gamma_i)$ .

Поскольку метод минимальных сечений в большей степени предполагается применять после предварительного исключения узлов ранга 1 и 2, то подсистему (подграф), в которой расположен источник питания (базисный узел), можно рассматривать как концентрированную и без отказов, а дополнительную (зависимую) подсистему – как единую, надежность которой определяется надежностью связей в МС. Отсюда систему элементов в МС можно рассматривать как систему параллельных элементов. При этом вероятность и интенсивность отказа сечения

$$q_c = \prod_{i \in \text{МС}} q_i; \quad \lambda_c = q_c \sum_{i \in \text{МС}} \frac{\lambda_i}{q_i}$$

распространяются на все узлы зависимой подсистемы равным образом.

При более точном учете плановых отключений необходимо принять во внимание, что при эксплуатации ЭЭС плановые отключения двух и более элементов одного МС одновременно не производятся.

Для практических расчетов наибольший интерес представляют двух-элементные сечения (часто ими и ограничиваются). Диаграмма состояний с учетом плановых отключений элементов двухэлементного МС, которое можно рассматривать как систему из двух параллельных элементов, представлена на рис. 1.33.

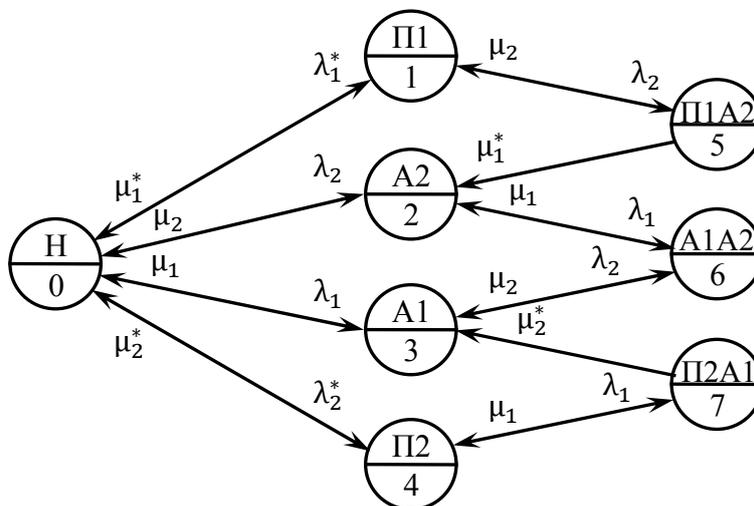


Рис. 1.33. Диаграмма состояний двух параллельных элементов

Здесь индекс Н соответствует нормальному режиму работы системы (исправны оба элемента МС), А – аварийному отказу, П – преднамеренному отключению элемента (для проведения планового ремонта). Отказу системы отвечают состояния П1А2, А1П2, А1А2.

Согласно диаграмме можно составить систему уравнений стационарного состояния системы (условие – равенство частот входа и выхода для каждого состояния):

$$\begin{aligned}
P_1(\mu_1^* + \lambda_2) &= P_0\lambda_1^* + P_5\mu_2; & P_5(\mu_1^* + \mu_2) &= P_1\lambda_2; \\
P_2(\mu_2 + \lambda_1) &= P_0\lambda_2 + P_5\mu_1^* + P_6\mu_1; & P_6(\mu_1 + \mu_2) &= P_2\lambda_1 + P_3\lambda_2; \\
P_3(\mu_1 + \lambda_2) &= P_0\lambda_1 + P_6\mu_2 + P_7\mu_2^*; & P_7(\mu_1 + \mu_2^*) &= P_4\lambda_1; \\
P_4(\mu_2^* + \lambda_1) &= P_0\lambda_2^* + P_7\mu_1; & \sum_{i=0}^7 P_i &= 1.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Решение представленной системы линейных уравнений можно получить в аналитическом виде (читателю предлагается выполнить это самостоятельно в качестве упражнения).

**Упражнение.** Реально  $\mu \gg \lambda$  и в расчетах можно считать, что  $\mu + \lambda \approx \mu$ . При этом допущении

$$P_0 \approx \frac{1}{1 + \gamma_1 + \gamma_1^* + \gamma_2 + \gamma_2^* + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2^*\xi_2 + \gamma_1^*\gamma_2\xi_1}, \tag{1.49}$$

где

$$\xi_1 = \frac{1}{1 + \mu_1^*/\mu_2}; \quad \xi_2 = \frac{1}{1 + \mu_2^*/\mu_1}.$$

Остальные вероятности

$$\begin{aligned}
P_1 &\approx \gamma_1^*P_0; & P_2 &\approx \gamma_2P_0; & P_3 &\approx \gamma_1P_0; & P_4 &\approx \gamma_2^*P_0; \\
P_5 &\approx \gamma_1^*\gamma_2\xi_1P_0; & P_6 &\approx \gamma_1\gamma_2P_0; & P_7 &\approx \gamma_1\gamma_2^*\xi_2P_0.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Отсюда вероятность отказа МС

$$q_c = P_5 + P_6 + P_7 = (\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1^*\gamma_2\xi_1 + \gamma_1\gamma_2^*\xi_2)P_0. \tag{1.51}$$

Интенсивность отказа МС

$$\lambda_c = \frac{P_1\lambda_2 + P_2\lambda_1 + P_3\lambda_2 + P_4\lambda_1}{1 - q_c} = \frac{P_0[\lambda_1(\gamma_2 + \gamma_2^*) + \lambda_2(\gamma_1 + \gamma_1^*)]}{1 - q_c}. \tag{1.52}$$

Проверочные расчеты показали, что погрешность математической модели при принятых допущениях не превышает 0,2 %.

Интересен подход, основанный на представлении события отказа системы как совокупности независимых состояний составляющих элементов. Как было отмечено выше, каждый элемент МС может находиться в одном из трех состояний: работоспособное (вероятность  $P_{p,i}$ ), отказ (вероятность  $P_{н,i}$ ) и плановый ремонт (вероятность  $P_{пл,i}$ ). При этом

$$P_{p,i} = \frac{1}{1 + \gamma_i + \gamma_i^*}; \quad P_{н,i} = \gamma_i P_{p,i}; \quad P_{пл,i} = \gamma_i^* P_{p,i}.$$

Тогда вероятность отдельного состояния диаграммы рис. 1.33, например  $P_1$  (плановый ремонт первого элемента при работе второго), может быть представлена в виде произведения вероятностей соответствующих событий:

$$P_1 = P_{пл,1}P_{p,2} = \frac{\gamma_1^*}{1 + \gamma_1 + \gamma_1^*} \frac{1}{1 + \gamma_2 + \gamma_2^*} = \gamma_1^*P_0, \tag{1.53}$$

где

$$P_0 = \frac{1}{1 + \gamma_1 + \gamma_1^*} \frac{1}{1 + \gamma_2 + \gamma_2^*}. \quad (1.54)$$

Если (1.53) по форме совпадает с соответствующей вероятностью из (1.50), то (1.54) отличается от (1.49) коэффициентами  $\xi_1, \xi_2$ , отличными от единицы, и отсутствием члена  $\gamma_1^* \gamma_2^*$ , представляющего вероятность преднамеренного отключения обоих элементов, что для реальной системы недопустимо. Поэтому при расчетах на ЭВМ следует отдать предпочтение первой математической модели, несмотря на то что вторая является более понятной по физическому содержанию.

Выражения (1.49)–(1.52) могут быть обобщены на случай МС из  $n$  элементов:

$$q_c = P_0 \left[ \prod_{i=1}^n \gamma_i \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i \gamma_i^*}{\gamma_i} \right) \right];$$

$$\lambda_c = P_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \gamma_j \left( 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\gamma_j^*}{\gamma_j} \right) \right] \cdot \frac{1}{1 - q_c}, \quad (1.55)$$

где  $\xi_i = (1 + \mu_i^* / \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_j)^{-1}$ .

При этом без существенной потери точности можно принять

$$P_0 = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + \gamma_i^* + \gamma_i}.$$

## 1.5. Вероятностные переходы

Часто анализируемую техническую систему бывает желательно представлять как систему, где события представляются только вероятностями, которые можно представить как вероятности переходов из одного состояния системы в другое. Особенно это характерно для устройств релейной защиты и автоматики, где на требование срабатывания устройство может ответить либо правильной, либо неправильной (отказ) работой. При этом внешние воздействия (например, КЗ) могут задаваться потоками случайных возмущений с заданным параметром потока событий либо вероятностями.

Описанная выше (п. 1.3) математическая модель с интенсивностями переходов приемлема и в случае, когда основной характеристикой перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  является не интенсивность  $\lambda_{ij}$ , а вероятность  $p_{ij}$ .

Рассмотрим устройство релейной защиты. На вход поступает поток КЗ с интенсивностью  $\lambda_{КЗ}$ . В ответ на внешнее воздействие устройство может либо сработать правильно и отключить поврежденный участок (вероятность  $p$ ), либо не сработать (отказ в срабатывании) с вероятностью  $q = 1 - p$ ,

в результате чего потребуется новое управляющее воздействие. Считаем, что длительность восстановления равна 0. Следовательно, вероятность состояния отказа равна нулю, но вероятность появления отказа релейной защиты может отличаться от нуля. Диаграмма вероятностных переходов имеет вид, представленный на рис. 1.34. Здесь состояние 2 определяет правильную работу устройства, а 3 – отказ срабатывания. Поскольку вероятности пребывания системы в состояниях 1, 2, 3 равны нулю (равны нулю их длительности), то здесь можно говорить только о частотах событий. В частности, состояние 1, определяющее состояние системы при возникновении КЗ (событие), имеет частоту  $f_1 = P_0 \lambda_{КЗ} = 1 \cdot \lambda_{КЗ} = \lambda_{КЗ}$ .

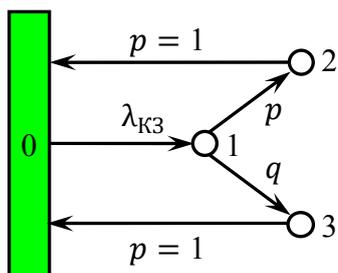


Рис. 1.34. Исходная диаграмма частотно-вероятностных переходов

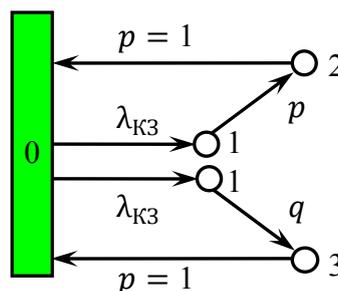


Рис. 1.35. Трансформированная диаграмма частотно-вероятностных переходов

В силу вероятностных свойств частота события 2 определяется как частота события 1 с вероятностью  $p$ ,  $f_2 = f_1 p = \lambda_{КЗ} p$ . Аналогично  $f_3 = f_1 q = \lambda_{КЗ} q$ . Однако данные соотношения справедливы и для состояний 2, 3 на вероятностной диаграмме, представленной на рис. 1.35. Они справедливы и для состояния 1, если это состояние на отдельных фрагментах диаграммы рассматривается как единое целое, а не как составное. Отсюда возможна декомпозиция вероятностной диаграммы путем ее разделения с дублированием событий, идентифицированных интенсивностями отказов (ИО), и связанных с ними узловых состояний. При этом суммарная частота разделенного состояния равна локальной частоте этого состояния на любом разделенном фрагменте диаграммы (а не сумме частот, как это имело бы место в случае самостоятельности разделенных событий).

Частота любого события в кольце, где начальное событие идентифицируется ИО, определяется как ИО, умноженная на произведение вероятностей всех событий — от начального до рассматриваемого.

*Все события определяются вероятностями.* Как и ранее, узлами диаграммы вероятностных переходов являются некоторые состояния, через которые переходит система (рис. 1.36). При этом вероятность появления отдельного состояния (но не вероятность пребывания системы в рассматриваемом состоянии) определяется произведением вероятностей всех событий по пути от начального состояния до рассматриваемого, а частота определяется частотой головного события с тем же вероятностным коэффициентом. Если частота головного события не определена, то не определены и частоты остальных зависимых состояний. В частности, если отказ устройства в целом

наступает при последовательном отказе только элементов 1, 3, 4, то  $P = P_0(p_1p_3p_4)$ ,  $f_4 = f_0(p_1p_3p_4)$ . Если в диаграмме существуют контурные замыкания (связь 2–4 на рис. 1.36), то необходимо рассматривать составные события. В частности,  $P = P_0p_1(p_2p_{24} + p_3p_{34}) = P_0p_1p_2p_{24} + P_0p_1p_3p_{34}$ .

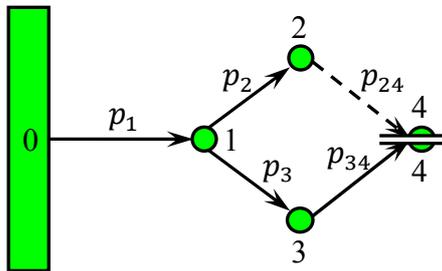


Рис. 1.36. Диаграмма вероятностных переходов

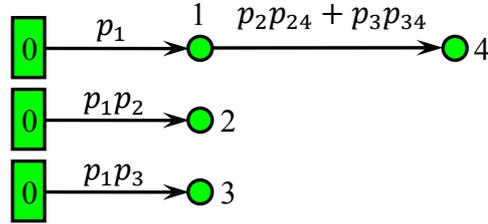


Рис. 1.37. Однособытийная структура вероятностных переходов

Последнее соотношение можно рассматривать как вероятность составного события, т. е. сложные структурные схемы можно и целесообразно разделять с последующим суммированием результирующих вероятностей.

Вероятностную структуру (рис. 1.36) можно представить в эквивалентном радиальном однособытийном виде (рис. 1.37). Следует заметить, что сумма вероятностей появлений событий, как правило, не равна единице, поскольку рассматривается совокупность условных событий, а не состояний, составляющих полную вероятностную группу. В частности (рис. 1.36), ограничиваясь тремя состояниями (отсутствует состояние 4), при  $p_2 + p_3 = 1$  и надлежащем выборе  $P_0, p_1$  сумма может быть больше единицы.

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_0p_1 + P_0p_1p_2 + P_0p_1p_3 = P_0p_1(1 + p_2 + p_3) = 2P_0p_1.$$

**Диаграмма с интенсивностями возврата.** В качестве примера последовательности событий с интенсивностью появления исходного события (например, КЗ на ЛЭП) и конечными интенсивностями возврата (восстановления) может быть рассмотрена диаграмма на рис. 1.38, где кроме интенсивности возмущения  $\lambda$  присутствуют интенсивности возврата (восстановления)  $\mu_2, \mu_3$ . Частота первого события  $f_1 = P_0\lambda$ . С целью анализа показателей надежности состояний 2 и 3 диаграмма разбивается на составные части (рис. 1.39). Частота второго состояния  $f_2 = f_1p_2 = P_0\lambda p_2$ . Отсюда можно считать, что переход в состояние 2 из состояния 0 осуществляется с интенсивностью  $\lambda p_2$ , что и отражено на рис. 1.40.

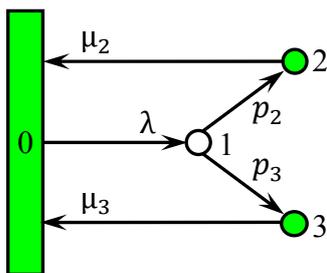


Рис. 1.38. Вероятностная диаграмма с возвратом

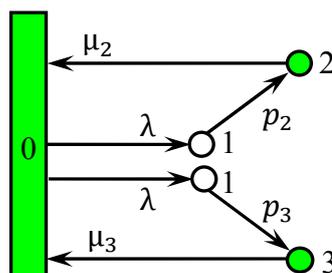


Рис. 1.39. Разбиение диаграммы с возвратом

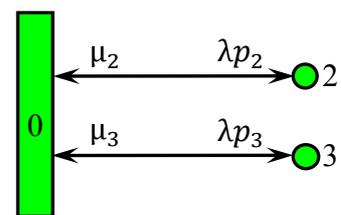


Рис. 1.40. Синтез радиальной структуры

Поскольку обратный переход из состояния 2 в состояние 0 осуществляется с интенсивностью  $\mu_2$  (длительность восстановления  $\tau_2 = 1/\mu_2$  отлична от нуля), то состояние 2 характеризуется интенсивностями захода и исхода, а следовательно, обладает некоторой вероятностью  $P_2$ . Аналогичные рассуждения применимы к состоянию 3. В результате диаграмма на рис. 1.38 может быть приведена к виду, представленному на рис. 1.40.

Узел 1 на представленных диаграммах не является стационарным состоянием, поскольку длительность его существования равна нулю и сумма вероятностей выхода из этого состояния равна единице. Такие состояния можно определить как динамические. Идентификатором динамического состояния часто является отсутствие интенсивности перехода в какое-либо иное состояние. Такой узел является вспомогательным узлом разветвления событий.

Структура на рис. 1.40 является радиальной. В результате вероятность исходного состояния

$$P_0 = \frac{1}{1 + \gamma_2 + \gamma_3} = \frac{1}{1 + \frac{p_2\lambda}{\mu_2} + \frac{p_3\lambda}{\mu_3}},$$

а вероятности составных состояний

$$P_2 = \gamma_2 P_0 = P_0 \frac{p_2\lambda}{\mu_2}; \quad P_3 = \gamma_3 P_0 = P_0 \frac{p_3\lambda}{\mu_3}.$$

Диаграмма на рис. 1.38 характеризует, например, следующую реальную ситуацию. В результате внешнего воздействия (повреждение трансформатора) требуется ремонт устройства либо с вероятностью 0,6 в течение суток (легкое повреждение), либо с вероятностью 0,4 в течение трех дней (серьезное повреждение). Наличие выхода, идентифицированного интенсивностью, указывает на то, что узел выхода является стационарным состоянием.

**Расчет показателей надежности системы «токовое реле – выключатель».** Функционально-структурная схема представлена на рис. 1.41. В нормальном состоянии выключатель (В) включен. Токовое реле (ТР) обесточено. Как ТР, так и В могут ложно сработать (соответствующие интенсивности  $\lambda_{Тлр}$ ,  $\lambda_{Влр}$ ). На токовое реле воздействует внешний поток КЗ (интенсивность  $\lambda_{КЗ}$ ). Вероятности отказа при возникновении требования на срабатывание для ТР и В составляют соответственно  $q_T$  и  $q_B$  (вероятности безотказности  $p_T = 1 - q_T$  и  $p_B = 1 - q_B$ ). Длительность восстановления ТР принимается равной нулю, а выключателя зависит от характера отказа: при ложном срабатывании –  $\tau_{Вл}$ , при отказе срабатывания –  $\tau_{Ва}$ . Необходимо определить показатели надежности РЗ. С этой целью требуется составить вероятностную диаграмму, отражающую события и состояния:

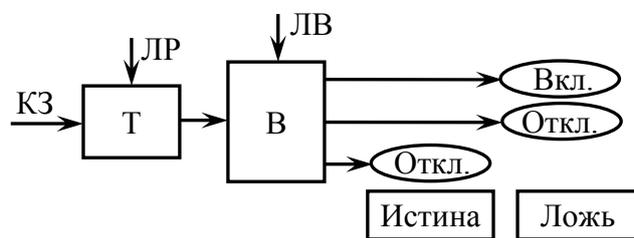


Рис. 1.41. Структурная схема устройства «токовое реле – выключатель»

соответственно  $q_T$  и  $q_B$  (вероятности безотказности  $p_T = 1 - q_T$  и  $p_B = 1 - q_B$ ). Длительность восстановления ТР принимается равной нулю, а выключателя зависит от характера отказа: при ложном срабатывании –  $\tau_{Вл}$ , при отказе срабатывания –  $\tau_{Ва}$ . Необходимо определить показатели надежности РЗ. С этой целью требуется составить вероятностную диаграмму, отражающую события и состояния:

- РР – безотказная работа как ТР, так и В при появлении КЗ (состояние, с интенсивностью  $\mu_{p,p}$  и длительностью восстановления  $\tau_{p,p}$ );
- Т – отказ срабатывания реле при появлении КЗ (событие, определяемое частотой);
- РО – отказ срабатывания выключателя при безотказной работе ТР и появлении требования на отключение (состояние с длительностью восстановления  $\tau_{p,o}$ );
- ЛР – ложное срабатывание ТР с последующим срабатыванием выключателя (длительность восстановления  $\tau_{л,r}$  определяется длительностью оперативных переключений  $\tau_{оп}$ );
- ЛО – ложное срабатывание ТР и отказ выключателя при появлении требования на отключение (длительность восстановления  $\tau_{p,l}$  определяется длительностью диагностики и восстановления выключателя; отключение выключателя выполняется с минимальным ущербом по команде диспетчера);
- ЛВ – ложное срабатывание В (длительность восстановления  $\tau_{p,l}$  определяется длительностью диагностики и восстановления выключателя).

Обозначим события, идентифицированные интенсивностью, логическими переменными  $x$ , а вероятностью –  $y$ . Результирующее событие (состояние) обозначим логической функцией  $Z$ . Диаграмма вероятностных переходов представлена на рис. 1.42, а). Ее эквивалентное преобразование показано на рис. 1.42, б).

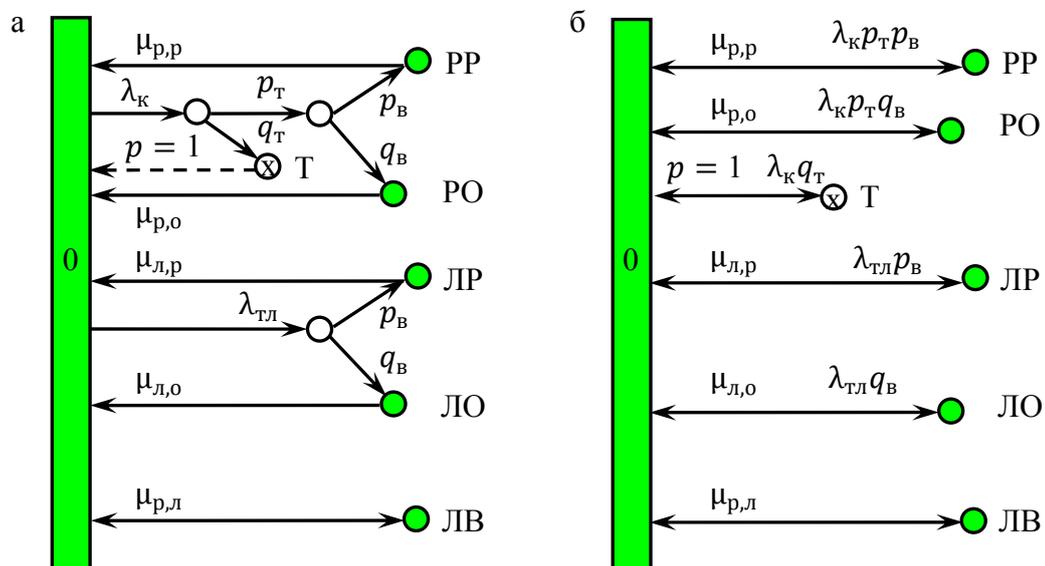


Рис. 1.42. Диаграмма состояний «токовое реле – выключатель»

Логические функции, вероятности и частоты событий представлены в табл. 1.11. В частности, событие «РО» (работоспособность ТР и отказ выключателя) характеризуется следующей последовательностью событий: появление КЗ ( $y_k$ ), работоспособность ТР ( $x_T$ ) и отказ выключателя при появлении требования на отключение ( $\bar{x}_B$ ). Это описывается логической функцией

$Z = y_k x_T \bar{x}_B$ . Ей соответствует вероятность  $P_{PO} = P_0(\lambda_k p_T q_B) / \mu_{p,o}$  и частота  $f_{PO} = P_0(\lambda_k p_T q_B)$ .

Таблица 1.11

Логические функции, вероятности и частоты событий

Состояние	$Z$	Вероятность	Частота
PP	$Z = y_k x_T x_B$	$P_{PP} = P_0(\lambda_k p_T p_B) / \mu_{p,p}$	$f_{PP} = P_0(\lambda p_T p_B)$
PO	$Z = y_k x_T \bar{x}_B$	$P_{PO} = P_0(\lambda_k p_T q_B) / \mu_{p,o}$	$f_{PO} = P_0(\lambda_k p_T q_B)$
T	$Z = y_k \bar{x}_T$	0	$f_T = P_0(\lambda_k q_T)$
ЛР	$Z = y_{ЛТ} x_B$	$P_{ЛР} = P_0(\lambda_{ЛТ} p_B) / \mu_{л,r}$	$f_{ЛР} = P_0(\lambda_{ЛТ} p_B)$
ЛО	$Z = y_{ЛТ} \bar{x}_B$	$P_{ЛО} = P_0(\lambda_{ЛТ} q_B) / \mu_{л,o}$	$f_{ЛО} = P_0(\lambda_{ЛТ} q_B)$
ЛВ	$Z = y_{ЛВ}$	$P_{ЛВ} = P_0 \lambda_{ЛВ} / \mu_{p,l}$	$f_{ЛВ} = P_0 \lambda_{ЛТ}$

**Пример 1.11** (является развитием примера 1.4). В комнате горит одна лампочка. Домохозяйка имеет в запасе одну лампочку. Длительность безотказной работы лампочек описывается экспоненциальным распределением  $\lambda = 5$  (1/год). Считаем, что замена рабочей лампочки на резервную происходит мгновенно (пусть смелое для домохозяйки предположение). После перегорания рабочей лампочки хозяйка с вероятностью  $q$  покупает новую. На эту операцию ей требуется  $\tau = 4$  часа ( $\mu = 8760/4$  (1/год)). С вероятностью  $p = 1 - q$  домохозяйка в магазин не идет, а ждет, когда перегорит вторая лампочка. Необходимо составить диаграмму состояний и определить вероятность отсутствия света в комнате.

Диаграмма состояний, соответствующая данному примеру, и ее преобразование представлены на рис. 1.43, где состояние 1 соответствует одной перегоревшей лампочке (нет запаса, но вторая лампочка исправна), состояние 2 – двум перегоревшим лампочкам (темнота), состояние М – поиску нужной лампочки в ближайшем магазине. Преобразование диаграммы осуществляется по описанным выше алгоритмам. Представляющее интерес состояние 2 находится в кольцевой структуре (п. 1.3.4), согласно которой  $P_1 = P_0 \lambda p / \lambda = P_0 p$ ,  $P_2 = P_0 \lambda p / \mu$ . Дополнительно  $P_M = P_0 \lambda q / \mu$ .

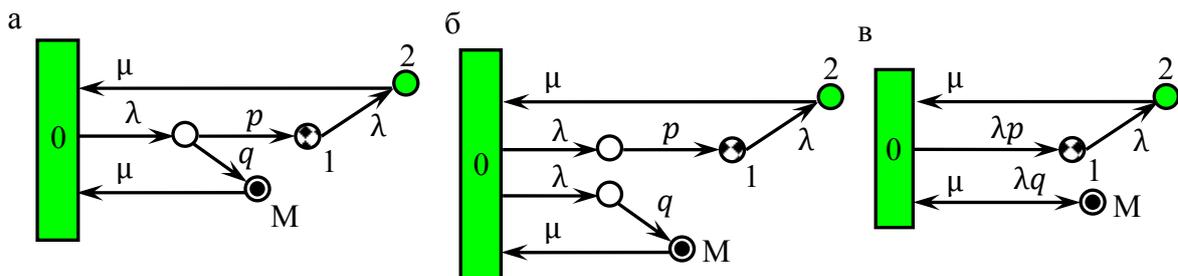


Рис. 1.43. Диаграмма состояний модели «домохозяйка»

Принимая во внимание равенство единице суммарной вероятности всех состояний  $(0, 1, 2, M)$ , получаем

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda p}{\lambda} + \frac{\lambda p}{\mu} + \frac{\lambda q}{\mu}} = \frac{1}{1 + p + \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Далее нетрудно определить вероятности и частоты всех остальных событий. Так, суммарная частота «походов» в магазин  $f_{MC} = f_M + f_2 = P_0(\lambda q + \lambda p) = P_0\lambda$ . Может сложиться впечатление, что эта частота не зависит от того, пойдет ли домохозяйка в магазин после каждого перегорания лампочки или нет. Однако от этой стратегии зависит  $P_0$ . При  $q = 1$  вероятность  $P_0 = 1/(1 + \lambda/\mu)$  и частота  $f_{MC} = P_0\lambda = \lambda/(1 + \lambda/\mu)$  максимальны, а при  $q = 0$  вероятность  $P_0 = 1/(2 + \lambda/\mu)$  и частота  $f_{MC} = \lambda/(2 + \lambda/\mu)$  минимальны. Поэтому, если домохозяйка боится темноты, она не поленится лишний раз сбегать в магазин.

**Задание.** Разработать диаграмму состояний при  $n$  рабочих (квартира) и  $m$  запасных лампочек. Рассмотреть стратегии поведения хозяйки – «поход» в магазин: после каждого перегорания лампочки; после перегорания двух лампочек; после перегорания  $k$  лампочек; после перегорания всех лампочек. С помощью ЭВМ (Excel, MatCad, MatLab и др.) получить численное решение задачи для  $n > 2, m > 2$ .

**Методическое указание.** Считать, что одновременный отказ нескольких лампочек невозможен. Считать, что вероятность «похода» в магазин не зависит от числа перегоревших лампочек. При  $k$  исправных лампочках интенсивность отказа одной из них составляет  $\lambda k$ .

## 2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ЭКВИВАЛЕНТИРОВАНИЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ОТКАЗОВ ТИПА «ОБРЫВ»

Элементы ЭЭС обычно идентифицируются по конструктивному признаку (трансформаторы, генераторы, линии, выключатели, шины и т. д.). Даже при современном уровне развития вычислительной техники решение задач надежности реальных ЭЭС, представленных через полную совокупность всех входящих в их состав элементов, практически невозможно из-за чрезвычайно большого числа последних. Проблема становится разрешимой только при снижении числа расчетных элементов за счет эквивалентирования отдельных участков ЭЭС. Связанные выполнением некоторой локальной задачи (в едином процессе производства, распределения и потребления электроэнергии) элементы могут и должны объединяться в группы (электрические станции, подстанции и т. п.). При этом группа может быть представлена как элемент. Отсюда понятия «элемент» и «система» диалектически относительны и зависят от специфики и уровня детализации решаемой задачи.

Процедура эквивалентирования присутствовала при определении результирующих показателей надежности практически всех рассмотренных в предыдущей главе упрощенных структур (последовательно-параллельные, «мостик» и др.). Однако эквивалентирование может быть использовано не только на финальном этапе, но и как самостоятельное направление анализа надежности сложных структур. Именно этому аспекту посвящена данная глава. Метод вероятностного эквивалентирования для анализа структурной надежности сложных ЭЭС разработан на кафедре автоматизированных электрических систем УПИ (УрФУ) и реализован в программном комплексе «Струна», где рассматриваются не только общепринятые отказы типа «обрыв», но и типа «КЗ», что необходимо для реальных электрических цепей.

Под отказами элементов (системы) типа «обрыв» (ОТО) понимаются отказы, с последующим выводом отказавшего элемента в неплановый ремонт, вследствие чего происходит разрыв электрической цепи по месту элемента. Считается, что отказ электроснабжения имеет место тогда, когда нарушается связь источника питания с рассматриваемым узлом. При этом, как правило, не учитываются ограничения по пропускной способности связей и допустимому отклонению напряжений узлов. Эти ограничения могут быть частично учтены при разработке расчетной схемы.

Для расчета показателей структурной надежности (ПСН), как правило, вводятся следующие допущения и ограничения:

- отказы элементов независимы;
- длительности безотказной работы и восстановления элементов описываются экспоненциальными законами распределения;
- длительности безотказной работы элементов значительно больше времени их восстановления;
- поток отказов элементов считается стационарным (параметр потока отказов  $\omega(t)$  и интенсивность отказов  $\lambda(t)$  не зависят от времени, т. е.  $\omega(t) = \omega = \text{const}$ ;  $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ );

- поток отказов элементов ординарен;
- работа системы контролируется непрерывно, т.е. момент отказа обнаруживается практически мгновенно;
- все источники питания абсолютно надежны и объединяются в единый узел расчетного графа (учет реальной надежности ИП может быть учтен дополнительной последовательно подключенной к ИП связью).

В качестве *результатирующих показателей СН* рассматриваются вероятные показатели надежности (вероятность и интенсивность отказа, среднее время восстановления и др.) системы электроснабжения узлов. Реальная электрическая схема представляется в виде расчетного графа (расчетной структурной схемы), элементами которого являются вершины (узлы) и ребра (ветви), моделирующие реальные элементы ЭЭС.

## 2.1. Расчетная схема

В описанных в гл. 1 алгоритмах расчета ПН присутствует наиболее значимый, наиболее неопределенный и наименее формализованный участок – разработка логической расчетной схемы. В частности, если расчетной схемой является диаграмма состояний, то, как это было показано выше, параллельное в электрическом смысле соединение  $n$  элементов представляется диаграммой из  $2n$  состояний. При этом логическая схема ориентируется на показатели надежности отдельного узла системы электроснабжения. Смена узла назначения потребует замены диаграммы состояний, поскольку меняется логическая функция надежности. Следовательно, в общем виде диаграмма состояний не обладает свойством универсальности и не может быть использована в качестве базовой для одновременного расчета ПН всех узлов сложных систем электроснабжения потребителей.

Проблеме формирования расчетных схем было посвящено достаточно много работ, например [20, 36]. В них просматривается общая тенденция – в качестве исходной схемы должна рассматриваться принципиальная и детальная электрическая схема (например, рис. 2.1), которая в процессе расчетов автоматически адаптируется (расчетная схема) к рассматриваемой задаче и конкретному узлу электроснабжения.

Поскольку основная направленность расчетов – определение ПН системы электроснабжения узлов нагрузки, то на электрической, а следовательно, и расчетной схеме (рис. 2.2) должны быть указаны все обладающие ограниченной надежностью элементы на пути от ИП до конечных потребителей.

Узлами расчетной схемы являются узлы электрической схемы (нагрузки, генерации и др.), а также дополнительные узлы, вводимые с целью учета тех или иных характерных свойств надежности (фиктивные узлы, отражающие одновременный отказ нескольких узлов нагрузки; фиктивный узел единой генерации; узлы, входящие в состав эквивалентной схемы замещения и др.). В общем случае узлы (например, система шин) могут обладать ограниченной надежностью. На рис. 2.2 имеются фиктивные узлы: ИП, ха-

рактирующей абсолютно надежный источник питания, и ООт – узел, представляющий одновременный отказ обеих систем шин низкого напряжения.

Следует выделять: фиктивные узлы (ИП, ООт); узлы, обладающие собственными (или за счет подключенных к узлу элементов, например, ТН1, ТН2, ОПН1, ОПН2, СШ1, СШ2 на рис. 2.2) ПН; узлы нагрузки (Н1, Н2); а также узлы возможного изменения потоков электроэнергии (ТН1, ТН2, СШ1, СШ2). На рис. 2.2 такие узлы показаны большими кружками.

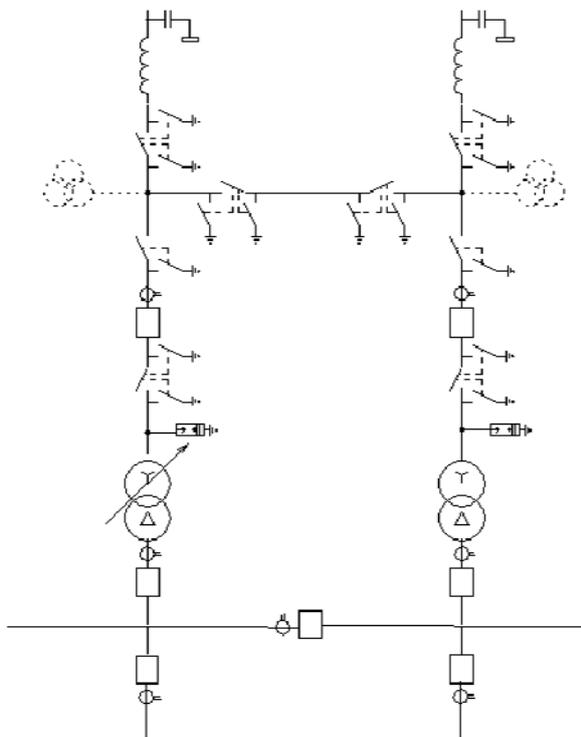


Рис. 2.1. Электрическая схема

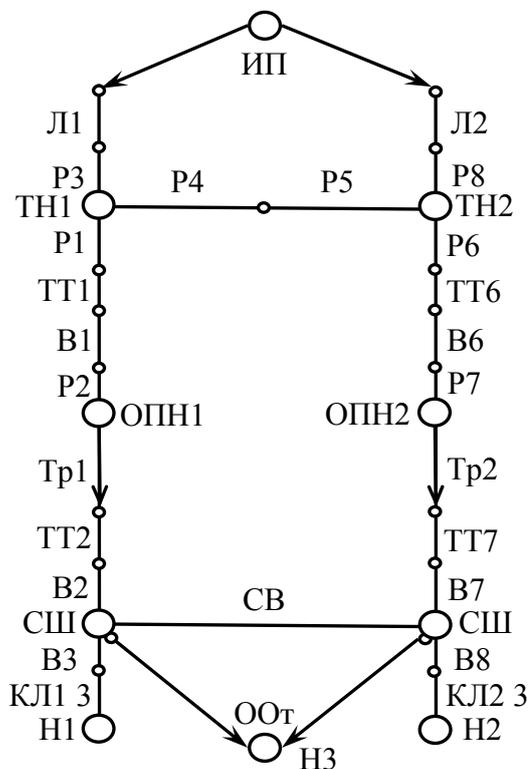


Рис. 2.2. Расчетная схема

Связями на расчетной схеме являются обладающие конечной надежностью элементы электрической схемы, по которым энергия передается от ИП к узлам нагрузки (линии электропередачи, трансформаторы, выключатели, разъединители, трансформаторы тока и др.). Дополнительно на расчетной схеме могут быть введены связи:

- фиктивные (соединяющие фиктивные узлы с узлами электрической схемы);
- заменяющие реальные ИП и определяющие их ПН;
- входящие в состав эквивалентной схемы замещения участка электрической схемы;
- моделирующие работу устройств автоматики (АВР) и др.

Некоторые элементы электрических сетей характеризуются тем, что поток электроэнергии преимущественно направлен в одну сторону (например, понижающий трансформатор, который не предполагается использовать в реверсивном режиме). Отказы таких элементов оказывают влияние на надежность (ОТО) лишь тех узлов, которые расположены на пути электропитания за отказавшими элементами. Поэтому в расчетном графе некото-

рые элементы должны быть представлены ориентированными ребрами с присущими им несимметричными показателями надежности. Это связано с появлением и анализом ориентированного расчетного графа сети.

В процессе анализа направленного графа при каждой операции вероятностного преобразования необходимо учитывать направленность ребер, чего не требуется при ненаправленном эквивалентировании. Процедуры направленного эквивалентирования связаны не только с существенным увеличением затрат машинного времени, но и с трудностями получения расчетных выражений.

ЭЭС с трансформаторами часто удается разбить на иерархические подсистемы без трансформаторов, считая при этом узлы связи с ЭЭС более высокого напряжения источниками питания ограниченной надежности (определенной на этапе расчета ПСН сети повышенного напряжения). Если трансформаторы – единственный вид направленных элементов графа, то такой прием позволяет использовать более простые процедуры ненаправленного эквивалентирования. Однако в любом случае разбиение ЭЭС на подсистемы одного уровня напряжения является действенным приемом сокращения размерности расчетной схемы.

В расчетной схеме, как правило, имеется некоторая совокупность последовательных электрических цепей (последовательно соединенных элементов), в которых при отказе одного элемента отключается вся последовательная цепь. Примерами таких цепей на рис. 2.2 являются цепи {P1, ТТ1, В1, Р2, ОПН1, ТР1, ТТ2, В2}, {P6, ТТ6, В6, Р7, ОПН2, ТР2, ТТ7, В7}, {B3, КЛ1}, {B8, КЛ2}, {Л1, Р3}, {Л1, Р3}, {P4, P5}. С целью сокращения размерности расчетной схемы до начала расчетной процедуры такие цепи целесообразно эквивалентировать одной связью, т. е. этапу непосредственных расчетов ПН должен предшествовать этап преобразования расчетной схемы (см. рис. 2.2) получаем рис. 2.3.

Существует два алгоритмических подхода к определению ПН узлов нагрузки электрической сети – последовательный и параллельный. В первом случае расчетная процедура заключается в циклически последовательном назначении узлов нагрузки в качестве единственного узла, для которого определяются ПН. В параллельном алгоритме ПН всех узлов определяются в рамках двухэтапной процедуры — исключение-восстановление узлов безотносительно порядка следования узлов нагрузки.

Начальным этапом в стандартной последовательной процедуре является выделение в электрической схеме источников питания и узла электропотребления, относительно которого определяются показатели надежности системы электроснабжения. Далее расчетная схема адаптируется под те или

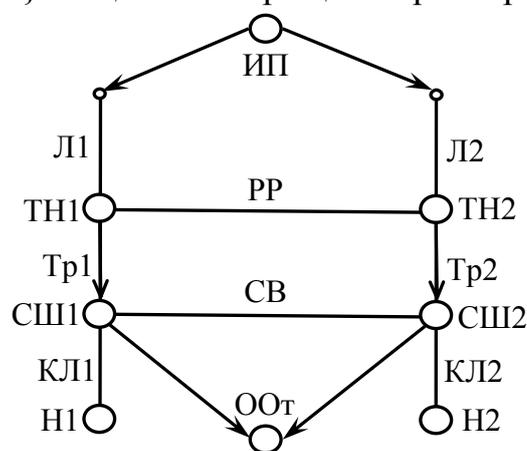


Рис. 2.3. Преобразованная расчетная схема

иные математические методы расчета ПН. Чаще всего это схема, которая позволяет использовать алгебру логики. Следующим этапом является определение результирующих показателей. При этом выполняется преобразование расчетной схемы, связанное с применением тех или иных логических операций (эквивалентирование участков с исключением узлов расчетной схемы).

Смена узла назначения приводит к практически полному повторению указанной последовательности операций. При этом многие операции повторяются многократно. Это влечет за собой недопустимо расточительное использование машинного времени. Альтернативой такому вычислительному процессу может служить упомянутая параллельная процедура одновременного определения ПН всех узлов электрической схемы.

### **Параллельная процедура расчета показателей надежности**

В данной работе в качестве основного принимается двухэтапный расчетный процесс «свертка – развертка схемы». На первом этапе исходная схема преобразуется к простейшей путем последовательного исключения узлов. При этом отсутствует предварительный выбор узла назначения (стока). Последовательность исключения узлов соответствует критерию минимального числа новых ненулевых элементов, например исключение в порядке возрастания ранга узлов (статическая или динамическая оптимальная нумерация узлов [37]). На следующем этапе, в порядке, обратном порядку исключения, определяются искомые показатели СН узлов схемы. Здесь используются процедуры вероятностного эквивалентирования, которые вносят в результаты некоторую незначимую для практических расчетов погрешность.

Задача определения надежности электрических сетей характеризуется большой неопределенностью исходных данных, к числу которых относятся показатели надежности элементов системы. Отсюда требования к точности результирующих данных, как правило, относительно невысоки. Это позволяет отдать предпочтение оценочным моделям, если их погрешности допустимы, а программные реализации гораздо эффективнее (например, по быстродействию), чем для точных моделей.

## **2.2. Неориентированный граф расчетной схемы**

### **2.2.1. Исключение и восстановление узлов ранга 1**

Под рангом будем понимать число ветвей, примыкающих к данному узлу. В общей теории графов [34] ранг – это степень вершины. Свертка схемы (исключение узлов) осуществляется относительно единого источника питания, который через фиктивные ветви с эквивалентными ПН связан с узлами, моделирующими реальные ИП. На каждом шаге исключения уменьшается размерность (число узлов) расчетной схемы. Таким образом, в идеале в ней остаются только два узла, одним из которых является неисключаемый источник питания.

*Исключение узлов ранга 1* не изменяет показателей надежности оставшихся узлов, поскольку через исключаемый узел нет пути от источника

питания до любого другого узла. Поэтому исключение узлов ранга 1 в модели ОТО сводится к их простому отбрасыванию. Эта процедура максимально эффективна при оценке структурной надежности радиальных распределительных сетей. Следует заметить, что радиальная по электрическому режиму структура не всегда является радиальной по надежности. Распределительная сеть среднего напряжения 6–10 кВ является радиальной по распределению токов (наперед известно, от какого узла к какому идет ток), но не всегда является радиальной при расчете надежности, поскольку секционные выключатели и разъединители позволяют переключаться между источниками электроснабжения, что делает расчетную по надежности схему многоконтурной.

В процессе восстановления узлов ранга 1 (определения их результирующих ПН) считаются известными результирующие показатели надежности всех восстановленных узлов, в том числе и узла, от которого осуществляется электроснабжение радиальной связи. Это возможно лишь в том случае, когда восстановление узлов выполняется в порядке, обратном порядку их исключения.

Расчет показателей надежности первого восстанавливаемого узла не представляет сложности. Для определения показателей надежности очередного восстанавливаемого узла ранга 1 составляется расчетная логическая функция. Результирующий отказ рассматриваемого узла  $i$  (событие  $A_i$ ), связанного ветвью  $i - j$  с узлом  $j$ , показатели надежности которого уже определены, возможен при выполнении хотя бы одного из следующих событий:  $A_j$  – отказ узла  $j$  как собственный, так и системы внешнего электроснабжения (результирующий отказ узла  $j$ );  $A_{ij}$  – отказ связи  $i - j$ ;  $A_{ii}$  – отказ узла  $i$  по собственным причинам. Описанную логическую конструкцию записываем в виде

$$A_i = A_j + A_{ij} + A_{ii}, \quad (2.1)$$

или, что более предпочтительно для расчетов,

$$\bar{A}_i = \bar{A}_j \cdot \bar{A}_{ij} \cdot \bar{A}_{ii}, \quad (2.2)$$

где  $\bar{A}$  – событие, противоположное событию  $A$  (логическая операция отрицания).

Знак суммы в приведенной логической формуле условно означает логическую операцию дизъюнкции «ИЛИ». Для обозначения логической операции конъюнкции «И» в логических формулах нами используется знак умножения. Логические формулы (2.1), (2.2) позволяют определить результирующие показатели надежности узла  $i$ , которые соответствуют эквивалентным показателям системы из последовательных элементов (п. 1.3.4):

$$L_i = L_j + \lambda_{ij} + \lambda_{ii};$$

$$\gamma_i = \gamma_j + \gamma_{ij} + \gamma_{ii};$$

$$K_r = 1/(1 + \gamma_i).$$

### 2.2.2. Исключение и восстановление узлов ранга 2

Процедура исключения узлов ранга 2 следует за полным исключением узлов ранга 1. В результате предварительно будут исключены все радиальные связи. Дальнейшее исключение узлов ранга 2 связано с выполнением последовательно-параллельных преобразований, поскольку ранг 2 указывает на последовательное соединение двух смежных ребер графа. Третьим элементом последовательного соединения является рассматриваемый узел (вершина расчетного графа), который также характеризуется некоторыми показателями надежности.

Пусть узел  $i$  ранга 2 связан с узлом  $j$  через ветвь  $i - j$  и с узлом  $k$  через ветвь  $i - k$  (рис. 2.4). При исключении узла  $i$  структура  $j - i - k$  заменяется на эквивалентную ветвь  $w$ . При определении ПН последовательной структуры согласно п. 1.3.4 исключалась возможность одновременного отказа входящих в состав структуры элементов. В то же время в сложноразветвленной электрической сети в узел соединения двух последовательных связей возможна передача электрической энергии со стороны обоих смежных узлов. Отсюда не исключается возможность работы одной связи при отказе и последующем отключении другой инцидентной связи, а следовательно, и одновременного отказа последовательных связей. Вместе с тем для внешней электрической сети последовательная структура представляет интерес с позиции обеспечения транзита электрической энергии. Поэтому отказ любого элемента последовательной структуры приводит к прерыванию транзита, а следовательно, и к отказу последовательной цепи. В результате диаграмма состояний последовательной цепи из трех элементов  $a, b, c$ , соответствующая данной логике отказа, будет иметь вид, представленный на рис. 2.5.

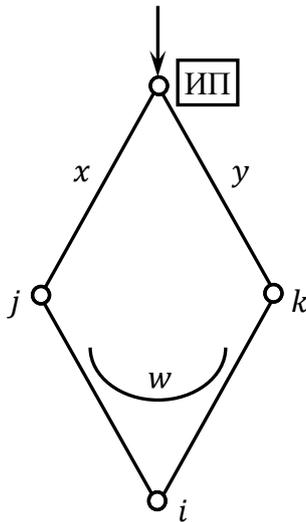


Рис. 2.4. Эквивалентный граф

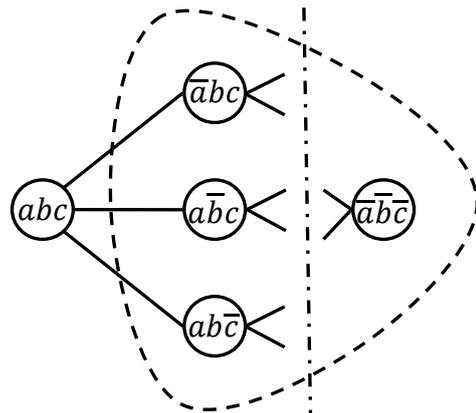


Рис. 2.5. Диаграмма состояний

Согласно этой диаграмме эквивалентные ПН

$$\begin{aligned}
 K_{ГЭ} &= P_{abc} = K_{Гa}K_{Гb}K_{Гc}; & K_{НЭ} &= 1 - K_{ГЭ}; \\
 \lambda_{Э} &= \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c; & \gamma_{Э} &= K_{НЭ}/K_{ГЭ}; \\
 f &= K_{ГЭ}\lambda_{Э} = K_{НЭ}\mu_{Э}; & \mu_{Э} &= \lambda_{Э} K_{НЭ}/K_{ГЭ} = \lambda_{Э}/\gamma_{Э}.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

По сравнению с формулами п. 1.3.4 здесь частично изменены все параметры за исключением интенсивности отказа. При этом вероятности отказа и безотказной работы соответствуют широко используемым формулам дизъюнкции и конъюнкции.

В процессе исключения узлов могут образовываться параллельные связи, которые эквивалентруются методами преобразований электрически параллельных структур (п. 1.3.1).

Определение результирующих показателей надежности узла  $i$  ранга 2, связанного с узлами  $j$ ,  $k$ , в процессе восстановления расчетной схемы в самом общем виде представляет довольно сложную процедуру. Для точного определения показателей надежности требуется знание не только показателей надежности узлов  $j$ ,  $k$  порознь, но и их совместных вероятностных характеристик, определение которых зачастую чрезвычайно сложно. Поэтому здесь уместно применение оценочных моделей. Сущность приближенного моделирования заключается в том, что расчетная схема на каждом шаге восстановления узла заменяется эквивалентной, удовлетворяющей некоторой совокупности критериев равенства вероятностных показателей.

Рассмотрим эквивалентирование схемы, целью которого является оценка результирующих показателей надежности восстанавливаемого узла  $i$  ранга 2. Здесь следует выделить три типа электроснабжения узла:

- электроснабжение рассматриваемого узла осуществляется независимо со стороны обоих смежных узлов  $j$  и  $k$  (общий случай). Между узлами  $j$ ,  $k$  нет непосредственной связи;
- общий случай – при наличии непосредственной связи между узлами  $j$ ,  $k$ ;
- электроснабжение рассматриваемого и одного из смежных узлов возможно только со стороны другого смежного узла.

**Отсутствие непосредственной связи между смежными узлами.** Для первого типа электроснабжения расчетная схема представляется в виде последовательно-параллельной схемы (см. рис. 2.4). Здесь рассматриваемый узел  $i$  объединен связями  $i - j$ ,  $i - k$  с узлами  $j$  и  $k$ , которые через эквивалентные ветви  $x$  и  $y$  соединяются с источником питания. Каждая из ветвей  $x$  и  $y$  представляет собой связь, эквивалентирующую схему внешнего электроснабжения соответствующих узлов.

Считается, что результирующие показатели надежности узлов  $j$  и  $k$  уже определены. Представление части структурной схемы в виде ветвей  $x$  и  $y$  позволяет упростить схему на этапе восстановления узлов второго ранга, т. е. привести ее к удобному для расчета ПН последовательно-параллельному виду. На основе критерия равенства полученных ранее показателей надежности узлов  $j$  и  $k$  показателям, определенных для этих же узлов с учетом ветвей  $x$  и  $y$  по схеме (см. рис. 2.4), можно составить систему логических уравнений. Пусть  $w$  – эквивалентная ветвь, состоящая из последовательно соединенных ветвей  $i - j$ ,  $i - k$  и узла  $i$ . Отказ рассматриваемой связи моделируется структурным уравнением:

$$A_w = A_{ij} + A_{ik} + A_i,$$

тогда отказ узлов  $j, k$ :

$$\begin{aligned} A_j &= A_{jj} + A_x \cdot (A_y + A_{kk} + A_w); \\ A_k &= A_{kk} + A_y \cdot (A_x + A_{jj} + A_w). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Данным логическим формулам соответствуют системы в общем случае нелинейных алгебраических уравнений, из которых определяются ПН ветвей  $x$  и  $y$ . В частности, для вероятностей отказов система (2.4) будет иметь вид

$$Q_j = q_{jj} + p_{jj}q_x(q_{kw} + p_{kw}q_y) = q_{jj} + p_{jj}p_{kw}q_x(q_{kw}/p_{kw} + q_y) \quad (2.5)$$

или

$$\frac{Q_j - q_{jj}}{p_{kwj}} = q_x \left( \frac{q_{kw}}{p_{kw}} + q_y \right) = q_x(\gamma_{kw} + q_y),$$

где  $p_{kwj} = p_{jj}p_{kw}$ ;  $q_{kw}$  – вероятность отказа цепи из двух последовательно соединенных элементов – связи  $w$  и узла  $k$ . Прописными буквами обозначены результирующие ПН (вероятности отказа) узлов.

В приведенных выражениях вероятности вычисляются с учетом возможности одновременного отказа последовательно соединенных связей:

$$p_{\exists} = \prod_{i=1}^n p_i; \quad q_{\exists} = 1 - p_{\exists};$$

$$q_{a+b} = q_a + q_b - q_a q_b = q_a + p_a q_b.$$

Для узла  $k$  можно записать выражения, аналогичные (2.5). В результате:

$$\begin{aligned} a q_x + q_x q_y &= A; \\ b q_y + q_x q_y &= B, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где полученные на базе уже известных результирующих узловых вероятностей величины:

$$A = \frac{Q_j - q_{jj}}{p_{kwj}}; \quad B = \frac{Q_k - q_{kk}}{p_{kwj}}.$$

Коэффициенты при искомым переменных:

$$a = \gamma_{kw} = \frac{q_{kw}}{p_{kw}}; \quad b = \gamma_{jw} = \frac{q_{jw}}{p_{jw}}.$$

Структуры  $kw, jw, kwj$  представляют последовательное соединение соответствующих элементов: узлов  $k, j$  и ветви  $w$  между этими узлами. При этом

$$p_{jw} = p_w \cdot p_{jj}; \quad p_{kw} = p_w \cdot p_{kk}; \quad p_{kwj} = p_{kk} \cdot p_w \cdot p_{jj}.$$

Представленная система нелинейна относительно  $q_x, q_y$ . Вычитая в системе (2.6) второе уравнение из первого, получаем представление одной из переменных через другую:

$$q_y = \frac{aq_x + B - A}{b}.$$

Стоит обратить внимание на то, что при одинаковых результирующих вероятностях безотказной работы узлов  $i, k$  разность  $A - B$  равна нулю, коэффициенты  $a$  и  $b$  равны между собой, и, следовательно, вероятности отказов эквивалентных ветвей  $x, y$  одинаковы, что и следовало ожидать.

В результате подстановки полученного выражения, например, в первое уравнение получаем квадратное уравнение

$$aq_x^2 + q_x(ab + B - A) - Ab = 0, \quad (2.7)$$

решение которого не представляет особого труда.

Существование решения определяется неотрицательностью дискриминанта квадратного уравнения (2.7). Поскольку согласно (2.5)  $q_{jj}$  в качестве положительного слагаемого входит в состав  $Q_j$ , то свободный член  $A = (Q_j - q_{jj})/p_{kwj} > 0$ . Коэффициент при квадратном члене в (2.7) также неотрицателен, поскольку  $a = \gamma_{kw} \geq 0$ ;  $b = \gamma_{jw} \geq 0$ . Отсюда  $Aab \geq 0$ , а дискриминант  $D = [ab + B - A]^2 + 4Aab \geq 0$ , поэтому уравнение (2.7) всегда имеет решение.

Можно утверждать, что существует, по крайней мере, один положительный корень, поскольку корень из дискриминанта не меньше коэффициента  $ab + B - A$  при линейной части. Отсутствие приемлемой по критерию вероятности пары решений ( $0 \leq (q_x, q_x) \leq 1$ ), как правило, свидетельствует об ошибке при определении на предыдущих этапах результирующих параметров  $Q_j, Q_k$ .

**Пример 2.1.** Пусть в процессе восстановления (определения ПН) при условии  $q_w = 0,05$  и  $q_{jj} = q_{kk} = 0$  были получены результирующие вероятности отказа узлов  $Q_j = 0,0335$  и  $Q_k = 0,0435$ . Определим вероятности отказа эквивалентных связей.

Расчетные коэффициенты:

$$A = \frac{Q_j - q_{jj}}{p_{kwj}} = \frac{0,0335}{1 - 0,05} = 0,0353; \quad B = \frac{Q_k - q_{kk}}{p_{kwj}} = \frac{0,0435}{1 - 0,05} = 0,046;$$

$$a = b = \frac{q_{kw}}{p_{kw}} = \frac{0,05}{0,95} = 0,053.$$

Отсюда квадратное уравнение для определения  $q_x$  имеет вид

$$\frac{a}{b} \cdot q_x^2 + q_x \left[ a + \frac{B - A}{b} \right] - A = q_x^2 + 0,253q_x - 0,0353 = 0.$$

Решение данного уравнения:  $q_{x1} = -0,3533$ ;  $q_{x2} = 0,1$ . Отсюда  $q_{y1} = -0,008$ ;  $q_{y2} = 0,3$ .

Первая пара не удовлетворяет, а вторая удовлетворяет требованиям, предъявляемым к вероятностям, поэтому в качестве эквивалентных параметров принимается вторая пара.

**Относительные длительности отказа.** Для восстанавливаемых систем логические функции (2.4) с учетом (1.34) относительно  $\gamma_x, \gamma_y$  определяют следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_x \gamma_{ykw}}{1 + \gamma_x + \gamma_{ykw}} &= \frac{\gamma_x (\gamma_y + \gamma_{kw})}{1 + \gamma_x + \gamma_y + \gamma_{kw}} = \gamma_j^*; \\ \frac{\gamma_y \gamma_{xjw}}{1 + \gamma_y + \gamma_{xjw}} &= \frac{\gamma_y (\gamma_x + \gamma_{kw})}{1 + \gamma_y + \gamma_x + \gamma_{kw}} = \gamma_k^*, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $\gamma_{ykw} = \gamma_y + \gamma_w + \gamma_{kk}$ ,  $\gamma_{xjw} = \gamma_x + \gamma_w + \gamma_{jj}$ ,  $\gamma_j^* = \gamma_j - \gamma_{jj}$ ,  $\gamma_k^* = \gamma_k - \gamma_{kk}$ .

На рассматриваемом этапе расчетов результирующие параметры  $\gamma_j, \gamma_k$  считаются известными. Однако более простое решение может быть получено, если уже известны  $q_x, q_y, p_x = 1 - q_x, p_y = 1 - q_y$ . В этом случае  $\gamma_x = q_x/p_x, \gamma_y = q_y/p_y$ . Для предыдущего примера, где  $q_x = 0,1, q_y = 0,3$ , показатели  $\gamma_x = 0,1/(1 - 0,1) = 0,11, \gamma_y = 0,3/(1 - 0,3) = 0,428$ . Нетрудно убедиться, что эти решения удовлетворяют системе уравнений (2.8).

Интенсивности отказов эквивалентных ветвей  $x, y$  определяются после расчетов  $q_x, q_y$  или  $\gamma_x, \gamma_y$ . Эквивалентную интенсивность отказа параллельного соединения двух элементов  $a$  и  $b$  целесообразно получать после определения:

$$q_\varepsilon = q_a q_b; \quad p_\varepsilon = 1 - q_\varepsilon; \quad \mu_\varepsilon = \mu_a + \mu_b.$$

В этом случае

$$\lambda_\varepsilon = \mu_\varepsilon q_\varepsilon / p_\varepsilon.$$

Однако в рассматриваемой задаче эквивалентную интенсивность  $\lambda_\varepsilon$  желательно представить через составные интенсивности отказа  $\lambda_a, \lambda_b$ . Для параллельного соединения элементов эквивалентная интенсивность восстановления  $\mu_\varepsilon = \mu_a + \mu_b$ . Это соотношение можно преобразовать к виду

$$\mu_\varepsilon \frac{q_\varepsilon}{p_\varepsilon} = \lambda_\varepsilon = \mu_a \frac{q_a}{p_a} \cdot \frac{q_b p_a}{p_\varepsilon} + \mu_b \frac{q_b}{p_b} \cdot \frac{q_a p_b}{p_\varepsilon} = \lambda_a \frac{q_b p_a}{p_\varepsilon} + \lambda_b \frac{q_a p_b}{p_\varepsilon}$$

или

$$\lambda_\varepsilon p_\varepsilon = \lambda_a p_a q_b + \lambda_b p_b q_a. \quad (2.9)$$

Вероятность отказа реальных электротехнических устройств несопоставимо меньше вероятности их безотказной работы. Отсюда в практических расчетах часто используется приближенное выражение^

$$\lambda_\varepsilon \approx \lambda_a q_b + \lambda_b q_a. \quad (2.10)$$

Система уравнений, соответствующая логическим формулам (2.4) и выражению (2.9), для узла  $j$  имеет вид

$$\lambda_x p_x q_{ykw} + (\lambda_y + \lambda_{kk} + \lambda_w) p_{ykw} q_x = L_j^* p_j^*$$

или

$$\frac{\lambda_x}{\gamma_x} + \frac{\lambda_y}{\gamma_{ykw}} = A = \frac{L_j^*}{\gamma_j^*} - \frac{\lambda_{kk} + \lambda_w}{\gamma_{ykw}}. \quad (2.11)$$

где  $L_j^* = L_j - \lambda_{jj}$ ;  $\gamma_j^* = Q_j^*/(1 - Q_j^*)$ ;  $Q_j^* = (Q_j - q_{jj})/p_{jj}$  – ПН узла без учета собственных отказов.

По аналогии с (2.11) записывается второе уравнение:

$$\frac{\lambda_y}{\gamma_y} + \frac{\lambda_x}{\gamma_{xjw}} = B = \frac{L_k^*}{\gamma_k^*} - \frac{\lambda_{jj} + \lambda_w}{\gamma_{xjw}}. \quad (2.12)$$

Полученные выражения легко воспринимаются как представление интенсивности восстановления параллельного соединения (сумма интенсивностей восстановления).

В результате решения системы уравнений (2.11), (2.12) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_x &= (A\gamma_{ykw} - B\gamma_y) / \left( \frac{\gamma_{ykw}}{\gamma_x} - \frac{\gamma_y}{\gamma_{xjw}} \right); \\ \lambda_y &= (B\gamma_{xjw} - A\gamma_x) / \left( \frac{\gamma_{xjw}}{\gamma_y} - \frac{\gamma_x}{\gamma_{ykw}} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Полученные параметры надежности эквивалентных связей  $x$ ,  $y$  позволяют получить ПН восстанавливаемого узла  $i$ , по отношению к которому схема представляется двумя параллельными связями из последовательно соединенных элементов  $\{x, j, i - j\}$  (левая связь) и  $\{y, k, i - k\}$  (правая связь). Собственные отказы узла  $i$  представляются как последовательно соединенный элемент. Такой структуре соответствует логическая формула:

$$A_i = A_{ii} + (A_x + A_{jj} + A_{ij})(A_y + A_{kk} + A_{ik}).$$

При этом вероятность отказа

$$Q_i = q_{ii} + p_{ii}(1 - p_x p_{jj} p_{ij})(1 - p_y p_{kk} p_{ik}).$$

Зная вероятности  $q_{xji} = 1 - p_x p_{jj} p_{ij}$  и  $q_{yki} = 1 - p_y p_{kk} p_{ik}$  и интенсивности отказов  $\lambda_{xij} = \lambda_x + \lambda_{jj} + \lambda_{ji}$  и  $\lambda_{yki} = \lambda_y + \lambda_{kk} + \lambda_{ki}$  параллельных ветвей, нетрудно найти интенсивность восстановления параллельной структуры

$$\mu_s = \lambda_{xij} \frac{1 - q_{xji}}{q_{xji}} + \lambda_{yki} \frac{1 - q_{yki}}{q_{yki}},$$

а следовательно, и соответствующую интенсивность отказа  $\lambda_s = \mu_s q_s / (1 - q_s)$ , где  $q_s = q_{xji} q_{yki}$ .

Результирующая интенсивность отказа  $L_i = \lambda_{ii} + \lambda_s$ .

Относительная длительность отказа узла

$$\gamma_i = \gamma_{ii} + \frac{\gamma_{xji}\gamma_{yki}}{1 + \gamma_{xji} + \gamma_{yki}},$$

где  $\gamma_{yki} = \gamma_y + \gamma_{kk} + \gamma_{ki}$ ;  $\gamma_{xji} = \gamma_x + \gamma_{jj} + \gamma_{ji}$ .

**Наличие связи между инцидентными узлами.** Второй вариант электроснабжения узла  $i$  характеризуется наличием либо непосредственной, либо

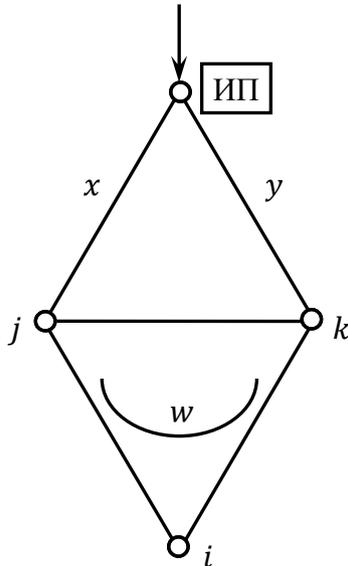


Рис. 2.6. Эквивалентирование с поперечной связью

полученной в результате предварительного эквивалентирования связи  $j - k$  (рис. 2.6). По отношению к узлам  $j, k$  связь  $j - k$  и последовательная связь из элементов  $\{j - i, i - i, i - k\}$  представляют собой две параллельные ветви, эквивалентруемые одной связью  $w$ :

$$A_w = A_{jk}(A_{ji} + A_{ii} + A_{ik}). \quad (2.14)$$

При этом определение показателей надежности эквивалентных связей  $x, y$  сводится к рассмотренной выше процедуре.

При развертке по отношению к узлу  $i$  представленная эквивалентная схема является схемой типа «мостик». В этом случае расчет показателей надежности узла  $i$  следует выполнять либо методом декомпозиции (удаление и сжатие

ветви  $j - k$ ), либо эквивалентированием, например, треугольника  $i - j - k$  звездой, что также достаточно эффективно, но и не менее сложно.

Однако расчет структуры (см. рис. 2.6) может быть полностью сведен к предыдущему алгоритму, если на этапе исключения узлов в качестве непосредственной связи между узлами  $j, k$  рассматривать структуру (2.14), а на этапе восстановления только одну из параллельных связей, а именно ту структуру  $\{j - i, i - i, i - k\}$ , в состав которой входит восстанавливаемый узел

$$A_w = A_{ji} + A_{ii} + A_{ik}.$$

В этом случае ПН шунтирующей связи войдут в результирующие ПН узлов  $j, k$ , а в процессе эквивалентирования (эквивалентные связи  $x, y$ ) они перейдут в ПН связей  $x, y$ . Как показывают расчеты, погрешности, вызванные неучетом связи  $j - k$  на этапе восстановления узла, несущественны, а описанный подход является достаточно эффективным.

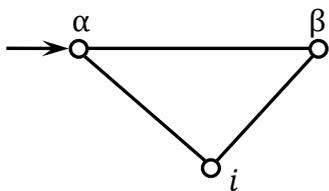


Рис. 2.7. Одностороннее питание

**Одностороннее электроснабжение узла второго ранга.** Третий вариант электроснабжения восстанавливаемого узла, где питание осуществляется со стороны лишь одного из смежных узлов (рис. 2.7), рассматривается особо, поскольку здесь не требуется

ввод дополнительных ветвей  $x$ ,  $y$ . Показатели надежности узла  $i$  определяются в результате расчета последовательно-параллельной цепи из последовательных элементов: элемент с результирующими показателями надежности питающего узла  $\alpha$ , узел  $i$  с собственными параметрами отказов, схемы из двух параллельных связей  $\alpha - i$  и из последовательно соединенных элементов  $\alpha - \beta$ ,  $\beta$ ,  $\beta - i$ . Данная структура описывается логической формулой

$$A_i = A_{ii} + A_\alpha + A_{\alpha i}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\beta} + A_{\beta i}),$$

где событие  $A_{\beta\beta}$  определяет собственный отказ узла  $\beta$ .

Так, для показателя  $\gamma_i$  узла  $i$  получаем следующую расчетную формулу:

$$\gamma_i = \gamma_\alpha + \gamma_{ii} + \frac{\gamma_{\alpha i}(\gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\beta} + \gamma_{\beta i})}{1 + \gamma_{\alpha i} + \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\beta} + \gamma_{\beta i}}.$$

Остальные показатели надежности определяются по аналогии.

Здесь следует заметить, что связь  $\alpha - \beta$  может быть эквивалентной, полученной в процессе преобразования схемы. Сверх того, может быть известно, что узел  $\beta$  получает питание от узла  $\alpha$ . Известны результирующие ПН узла  $\beta$ , но не известны ПН связи  $\alpha - \beta$ . В этом случае связь  $\alpha - \beta$  следует представить как эквивалентную, ПН которой определяются исходя из результирующих ПН узла  $\beta$ .

**Совместные отказы.** Рассмотренные выше вероятностные модели недостаточно полно учитывают события, приводящие к одновременному отказу инцидентных узлов, и это вносит основную погрешность в расчеты ПН. В то же время в реальных схемах часто встречаются последовательные элементы, отключение которых приводит к нарушению электроснабжения некоторого района электрической сети. Кроме того, сами источники питания характеризуются некоторыми показателями надежности. Эти ПН также оказывают влияние на надежность электроснабжения рассматриваемого множества узлов. Более полно на этапе восстановления узла второго ранга совместные отказы могут быть описаны эквивалентной расчетной схемой (рис. 2.8), где элемент  $z$  вводится для учета совместных отказов узлов  $j$ ,  $k$  при условии отсутствия непосредственной связи между ними. Данные о совместных отказах удобно хранить в виде матриц, в которых элемент  $\{jk\}$  определяет параметр одновременного отказа  $j$ ,  $k$ . Пусть на предыдущих этапах восстановления были получены элементы матриц вероятностей  $\{\hat{q}_{jk}\}$ , интенсивностей  $\{\hat{\lambda}_{jk}\}$  и длительностей  $\{\hat{\gamma}_{jk}\}$ ,  $\{\hat{\tau}_{jk}\}$  потока совместных отказов узлов. Выборка из матриц, соответствующая узлам  $j$ ,  $k$ , соотносится с ПН эквивалентной связи  $z$ .

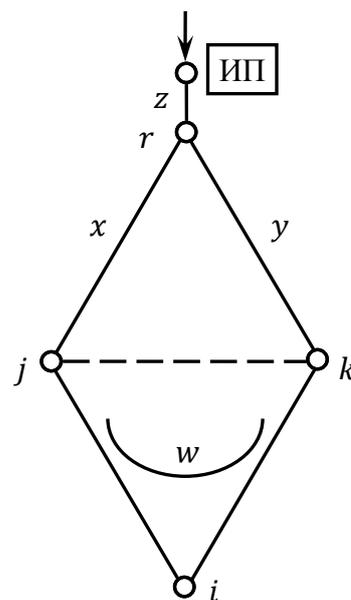


Рис. 2.8. Совместные отказы

Логические функции (2.4) в данном случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} A_k &= A_z + A_{kk} + A_x \cdot (A_y + A_{jj} + A_w); \\ A_j &= A_z + A_{jj} + A_y \cdot (A_x + A_{kk} + A_w). \end{aligned} \quad (2.15)$$

В соответствии с этими логическими формулами можно составить системы алгебраических уравнений, из которых определяются ПН ветвей  $x$  и  $y$ . В частности, для вероятностей отказов система (2.15) будет иметь вид

$$\begin{aligned} a \cdot q_x + q_x q_y &= A = \frac{Q_j - q_z - p_z q_{jj}}{p_z p_{jj} p_{kw}}; \\ b \cdot q_y + q_x q_y &= B = \frac{Q_k - q_z - p_z q_{kk}}{p_z p_{kk} p_{jw}}. \end{aligned}$$

Решение данной системы аналогично описанному выше для системы (2.6).

Полученные параметры надежности эквивалентных связей  $x$ ,  $y$  позволяют получить ПН восстанавливаемого узла  $i$ , по отношению к которому схема представляется двумя параллельными связями из последовательно соединенных элементов  $x$ ,  $j$ ,  $i - j$  (левая связь) и  $y$ ,  $k$ ,  $i - k$  (правая связь). Собственные отказы узла  $i$  и отказы эквивалентной связи  $z$  представляются как последовательно соединенные элементы. Такой структуре соответствует логическая формула:

$$A_i = A_z + A_{ii} + (A_x + A_{jj} + A_{ij})(A_y + A_{kk} + A_{ik}).$$

**Результирующие ПН совместных отказов.** Наряду с результирующими показателями надежности узла  $i$  в рассматриваемой модели необходимо получить вероятностные показатели совместных отказов узла  $i$  с каждым из смежных узлов при условии отсутствия непосредственной связи между ними.

Рассмотрим, например, совместный отказ узлов  $i$ ,  $j$  (событие  $B_{ij}$ ). Анализ эквивалентной схемы замещения (см. рис. 2.8) показывает, что это возможно либо в результате внешних отказов (эквивалентная связь  $z$ ), либо из-за отказов элементов во «внутренней» схеме (одновременный отказ хотя бы одного элемента в левой (связь  $x$ , узел  $j$ ) и правой (связи  $y$ ,  $i - k$ , узлы  $i$ ,  $k$ ) структурах. Логически данное событие может быть описано формулой:

$$\begin{aligned} B_{ij} &= A_z + (A_x + A_{jj})(A_y + A_{kk} + A_{ki} + A_{ii}) = \\ &= A_z + (A_x + A_{jj})(A_y + A_{kk}) + (A_x + A_{jj})(A_{ki} + A_{ii}). \end{aligned}$$

Но  $A_z + (A_x + A_{jj})(A_y + A_{kk})$  входит в одновременный отказ узлов  $j$ ,  $k$  ( $B_{jk}$  – совместный отказ узлов  $j$ ,  $k$ ). Поэтому  $B_{ij} = B_{jk} + (A_x + A_{jj})(A_{ki} + A_{ii})$ .

Данной формуле соответствуют математические представления показателей надежности:

– вероятность

$$\hat{q}_{ij} = \hat{q}_{jk} + \hat{p}_{jk}(q_x + p_x q_{jj})(q_{ik} + p_{ik} q_{ii});$$

– относительная длительность состояния отказа

$$\hat{\gamma}_{ij} = \hat{\gamma}_{jk} + \frac{(\gamma_x + \gamma_{jj})(\gamma_{ii} + \gamma_{ik})}{1 + \gamma_x + \gamma_y + \gamma_{ii} + \gamma_{ik}};$$

– интенсивность отказа для восстанавливаемой системы

$$\hat{\lambda}_{ij} = \hat{\lambda}_{jk} + \frac{\lambda_{xj}\gamma_{kii} + \lambda_{kii}\gamma_{xj}}{1 + \gamma_{xj} + \gamma_{kii}}.$$

Проверочные расчеты показывают, что учет совместных отказов существенно повышает точность расчетов.

**Пример 2.2.** Методом эквивалентных преобразований выполнить расчет вероятности отказа представленной на рис. 2.9, а системы электроснабжения со следующими исходными данными  $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_f = 2$ ;  $\tau_a = \tau_b = \tau_f = 0,05$ ;  $\lambda_c = \lambda_d = \lambda_e = 1$ ;  $\tau_c = \tau_d = \tau_e = 0,2$ . Узлы абсолютно надежны.

**Решение.** Последовательность исключения узлов представлена на рис. 2.9, б, в, г. Коэффициенты неготовности элементов  $K_H = \lambda\tau/(1 + \lambda\tau)$ . Отсюда  $K_{Ha} = K_{Hb} = K_{Hf} = 0,091$ ;  $K_{Hc} = K_{Hd} = K_{He} = 0,167$ . Вероятности отказа элементов считаем равными их коэффициентам неготовности  $q_i = K_{Hi}$ .

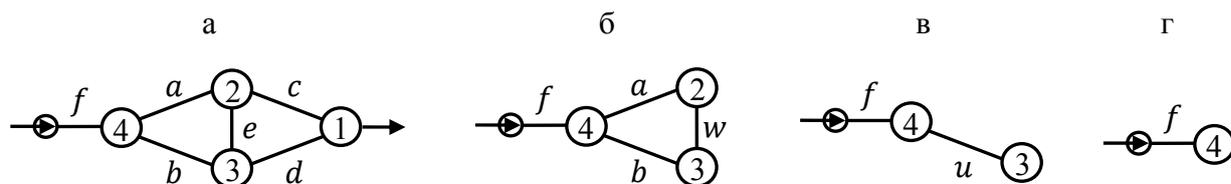


Рис. 2.9. Преобразование схемы:

а – исходная схема; б – исключение узла 1;  
в – исключение узла 2; г – исключение узла 3

Исключение узлов 1, 2 представлено в табл. 2.1. Расчет показателей надежности выполнен согласно методам и расчетным формулам, описанным в гл. 1.

Таблица 2.1

Исключение узлов 1, 2 в тестовой схеме

ПН	Исключение узла 1			Исключение узла 2		
	$c = d = e$	$c + d$	$w = (c + d)e$	$a = b = f$	$a + w$	$u = b(a + w)$
$\lambda$	1,0	2,0	0,5122	2,0	2,5122	0,4522
$\tau$	0,2	0,22	0,1048	0,05	0,0633	0,0279
$\mu$	5,0	4,545	9,5455	20,0	15,7975	35,7975
$\gamma$	0,2	0,44	0,0537	0,1	0,1590	0,0126
$K_{\Gamma}$	0,833	0,694	0,9491	0,909	0,8628	0,9875
$K_H$	0,167	0,306	0,0509	0,0909	0,1372	0,0125
f	0	1,389	0,4861	0	2,1675	0,4465

На первом этапе последовательно-параллельным преобразованием исключается узел 1:  $w = e(c + d)$ . Эквивалентная вероятность отказа

$$q_w = q_e(q_c + p_c q_d) = 0,1667 \cdot (0,1667 + 0,8333 \cdot 0,1667) = 0,0509.$$

Исключение узла 2 связано с последовательно-параллельным преобразованием  $u = b(a + w)$ . Эквивалентная вероятность отказа

$$q_u = q_b(q_a + p_a q_w) = 0,0909 \cdot (0,0909 + 0,909 \cdot 0,0509) = 0,0125.$$

Исключение узла 3 не требуется, поскольку на данном этапе сформировалась радиальная структура, где исключение узлов ранга 1 связано с простым их отбрасыванием.

### Неучет связи $f$

С целью анализа погрешности при разных подходах к учету связей  $e$  и  $f$  рассмотрим структур без связи  $f$ . В этом случае  $Q_3 = q_u = 0,0125$ . В силу симметрии схемы  $Q_2 = Q_3 = 0,0125$ .

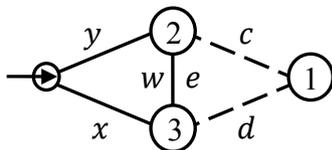


Рис. 2.10. Эквивалентный граф

**Вероятностное эквивалентирование расчетной схемы.** Для определения ПН узла 1 следует использовать эквивалентную схему с ветвями  $x$ ,  $y$ , соединяющими узлы 2 и 3 непосредственно с ИП (рис. 2.10). Согласно схеме можно определить структурные уравнения относительно результирующих

ПН узлов 2, 3:  $U_2 = x(y + w)$ ,  $U_3 = y(x + w)$ .

Как было отмечено выше, ПН связей  $x$ ,  $y$  можно определять исходя из того, что, во-первых, связь между узлами 2, 3 является эквивалентной ( $w$ ), определенной на этапе исключения узлов, и, во-вторых, эта связь определяется только элементами  $c$ ,  $d$ .

В первом случае (учет связи  $e$ )

$$\begin{aligned} Q_2 &= q_x(q_w + p_w q_y); \\ Q_3 &= q_y(q_w + p_w q_x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

или

$$\begin{aligned} q_x(0,0509 + 0,949q_y) &= 0,0125; \\ q_y(0,0509 + 0,949q_x) &= 0,0125. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из этой системы алгебраических уравнений следует, что  $q_x = q_y = 0,0909$ .

Для определения ПН узла 1 следует использовать эквивалентную схему с ветвями  $x$ ,  $y$ , соединяющими узлы 2 и 3 непосредственно с ИП (см. рис. 2.10). При известных  $q_x$ ,  $q_y$  результирующие ПН узла 1 могут быть определены, например, *методом декомпозиции по элементу «e»*. Вероятность отказа узла 1 (системы электроснабжения в целом)  $Q_1 = 0,03964$ .

Как было отмечено выше, ПН связей  $x$ ,  $y$  можно определять упрощенным методом исходя из того, что связь между узлами 2, 3 определяется только элементами  $c$ ,  $d$  (отсутствует связь  $e$ ,  $q_w = 0,3056$ ).

В этом случае система уравнений (2.17) имеет вид

$$\begin{aligned}q_x(0,3056 + 0,6944q_y) &= 0,0125; \\q_y(0,3056 + 0,6944q_x) &= 0,0125.\end{aligned}$$

Отсюда  $q_x = q_y = 0,0377$  (существенно больше по сравнению с (2.17)).

Выполним восстановление узла 1 без учета шунтирующей связи  $e$  по схеме последовательно-параллельных соединений

$$Y_1 = (x + d)(y + c).$$

Вероятность отказа узла 1

$$Q_1 = (0,0377 + (1 - 0,0377) \cdot 0,1667)^2 = 0,03925.$$

По сравнению с методом декомпозиции ошибка составляет 0,99 %, чем, безусловно, в практических расчетах можно пренебречь.

### Учет связи $f$

При учете связи  $f$  на этапе восстановления показатели надежности узла 4 определяются через показатели надежности связи  $f$ , т. е. результирующая вероятность  $Q_4 = q_f = 0,0909$ . ПН узла 3 определяются структурным уравнением  $Y_3 = Y_4 + u$  (последовательное соединение с узлом 4 через связь  $u$ ). Отсюда  $Q_{3f} = Q_4 + (1 - Q_4)q_u$ :

$$Q_{3f} = 0,0909 + 0,909 \cdot 0,0125 = 0,1022.$$

Восстановление узла 2 ранга 2 выполняется после определения ПН узлов 3, 4. При этом питание подается только со стороны узла 4. Поэтому здесь следует рассматривать восстановление узла по схеме треугольника  $Y_2 = Y_4 + a(b + w)$ .

Результирующая вероятность отказа узла 2

$$Q_{2f} = 0,0909 + 0,909 \cdot 0,0909 \cdot (0,0909 + 0,909 \cdot 0,0509) = 0,1022.$$

Величины вероятностей  $Q_{2f}$ ,  $Q_{3f}$  можно определить из предыдущего расчета, принимая во внимание, что связь  $f$  является последовательной для всей схемы мостика, в том числе и для узлов 2, 3

$$Q_{3f} = Q_{2f} = q_f + p_f Q_2 = 0,0909 + (1 - 0,0909) \cdot 0,0125 = 0,1022.$$

Система уравнений (2.16), определяющая вероятности эквивалентных ветвей, с учетом новых результирующих вероятностей отказа узлов 2, 3 будет иметь вид

$$\begin{aligned}q_x(0,0509 + 0,949q_y) &= 0,1022; \\q_y(0,0509 + 0,949q_x) &= 0,1022.\end{aligned}$$

Ее решение:  $q_x = q_y = 0,3024$ .

Вероятность отказа узла 1, определенная методом декомпозиции по элементу « $e$ »  $Q_{1f} = 0,12645$ .

При неучете связи  $e$  при эквивалентировании

$$q_x(0,3056 + 0,6944q_y) = 0,1022;$$

$$q_y(0,3056 + 0,6944q_x) = 0,1022.$$

Решение данной системы уравнений  $q_x = q_y = 0,2222$ .

Вероятность отказа узла 1, определенная методом последовательно параллельных преобразований,

$$Q_{1f} = (0,2222 + (1 - 0,2222) \cdot 0,1667)^2 = 0,1238.$$

Нетрудно видеть, что как в первом (неучет связи  $f$ ), так и во втором (с учетом связи  $f$ ) случаях вторая схема восстановления узла 1 (неучет связи  $e$  при определении эквивалентных параметров  $x$ ,  $y$  и отсутствие декомпозиции при последующем восстановлении узла 1) обеспечивает приемлемую погрешность расчетов (максимальная погрешность вероятности отказа системы электроснабжения составляет 2 %). Следовательно, эта схема может быть рекомендована для практических расчетов как менее трудоемкая.

В то же время необходимо отметить, что при учете связи  $f$ , моделирующей ненадежность ИП, погрешность иных подходов возрастает. Это вызвано тем, что возрастают вероятности отказа всех узлов схемы, а следовательно, и эквивалентных связей  $x$ ,  $y$ . Увеличение вероятностей отказов приводит к увеличению погрешностей приближенных расчетов. Отсюда при возможности следует выделять последовательные структуры и учитывать их лишь на последних этапах расчета ПН. В частности,

$$Q_{1f} = q_f + (1 - q_f)Q_{1f} = 0,0909 + (1 - 0,0909) \cdot 0,03925 = 0,1266,$$

что практически совпадает с расчетами методом декомпозиции ( $Q_{1f} = 0,12645$ ).

В рассмотренном примере исходные данные ПН связей далеки от реальных для электротехнических объектов. Действительные вероятности отказов элементов на два порядка меньше тех, что приняты в примере. Отсюда погрешность метода вероятностного эквивалентирования вполне допустима для практического применения. Определение ПН электроснабжения узлов в текстовой схеме представлено в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Восстановление узлов в тестовой схеме

ПН	узел 2, 3		$w = c + d$	$x = y$	$x + c = y + d$	узел 1	
	$u$	$u + f$				$(x + c)(y + d)$	$+f$
$\lambda$	0,4522	2,4522	2	1,0207	2,021	0,6680	2,6680
$\tau$	0,0279	0,0464	0,22	0,0383	0,122	0,0611	0,0543
$\mu$	35,7975	21,530	4,545	26,1	8,185	16,3694	18,414
$\gamma$	0,0126	0,1139	0,44	0,0391	0,247	0,0408	0,1449
$K_r$	0,9875	0,8978	0,694	0,9624	0,802	0,9608	0,8734
$K_H$	0,0125	0,1022	0,306	0,0376	0,198	0,0392	0,1266

### 2.2.3. Эквивалентирование «звезда – треугольник», «треугольник – звезда»

В процессе преобразования сложных расчетных схем может оказаться, что дальнейшее параллельно-последовательное преобразование невозможно. Одним из путей выхода из создавшегося затруднения является, например, использование метода декомпозиции. Другим не менее эффективным приемом представляется преобразование некоторого подграфа расчетного графа, состоящего из узла и трех ребер (звезда), в подграф типа треугольник или, наоборот, из треугольника в звезду. Такое эквивалентирование может дать возможность дальнейшего параллельно-последовательного преобразования схемы.

В ряде работ [56 и др.] получены условия, выполнение которых обеспечивает справедливость преобразования треугольника в звезду и наоборот. Однако описанные в литературе процедуры эквивалентирования не распространяются на интенсивности отказов и длительности восстановлений.

Рассмотрим вычислительные аспекты данного вида эквивалентирования. Пусть трехлучевая звезда с ребрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  заменяется треугольником со сторонами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 2.11). Определим расчетные выражения для вероятностей отказа ребер треугольника  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ , считая известными  $q_a$ ,  $q_b$ ,  $q_c$ .

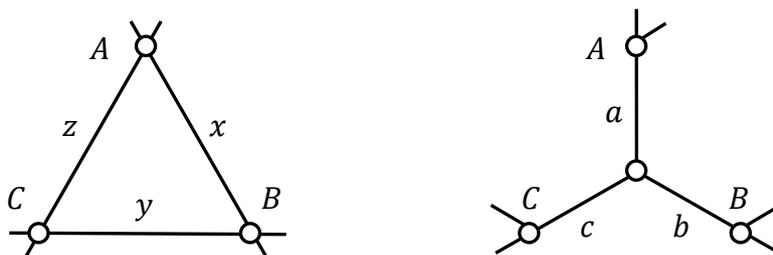


Рис. 2.11. Преобразование «треугольник – звезда»

Формула эквивалентирования должна быть нечувствительной к схеме внешней сети, поэтому выражения для  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  можно получить исходя из трех режимов работы схемы:

1. ИП находится в узле  $A$ , сток – в узле  $B$ , узел  $C$  ненагружен (надежность транспорта энергии из  $A$  в  $B$  или наоборот – из  $B$  в  $A$ );
2. ИП находится в узле  $A$ , сток – в узле  $C$ , узел  $B$  ненагружен;
3. ИП находится в узле  $B$ , сток – в узле  $C$ , узел  $A$  ненагружен.

Из этих трех опытов путем эквивалентного преобразования параллельно-последовательных схем можно вывести систему алгебраических уравнений относительно искомым неизвестных:

$$\begin{aligned} q_x(q_y + q_z - q_y q_z) &= \alpha = q_a + q_b - q_a q_b; \\ q_z(q_x + q_y - q_x q_y) &= \beta = q_a + q_c - q_a q_c; \\ q_y(q_x + q_z - q_x q_z) &= \eta = q_b + q_c - q_b q_c. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Данная система имеет ярко выраженный нелинейный характер. Решить ее можно итерационными методами, например, методом простой ите-

рации, Зейделя, Ньютона и др. Следует отметить, что итерационный процесс в общем случае может оказаться расходящимся. Систему (2.18) целесообразно привести к виду одного нелинейного уравнения, решение которого, если оно существует, можно гарантированно получить, например, методами оптимизации по одному параметру (методами хорд или деления отрезка пополам). С этой целью в преобразование «звезда – треугольник» (определение вероятностей отказа эквивалентных связей  $x, y, z$ ) введем дополнительные переменные:

$$r = q_x q_y; \quad s = q_x q_z; \quad t = q_y q_z. \quad (2.19)$$

При этом система (2.18) записывается в виде

$$\begin{cases} r + s - \omega = \alpha = Q_{ab}; \\ s + t - \omega = \beta = Q_{ac}; \\ r + t - \omega = \eta = Q_{bc}, \end{cases} \quad (2.20)$$

где  $\omega = q_x q_y q_z = \sqrt{rst}$  (это выражение позволяет не рассматривать  $\omega$  как четвертую переменную в системе из трех уравнений).

Параметр  $\omega$  определяет вероятность отказа всех элементов эквивалентной системы. Если рассматривать такое событие, как отказ всех элементов в исходной системе, то  $\omega \approx q_a q_b q_c$ . Однако если  $\omega$  рассматривать как вероятность нарушения связности узлов  $A, B, C$ , то в исходной схеме этому событию соответствуют отказы не менее двух ветвей звезды. Отсюда

$$\begin{aligned} \omega &= q_a q_b q_c + p_a q_b q_c + q_a p_b q_c + q_a q_b p_c = q_b q_c + q_a (p_b q_c + q_b p_c) = \\ &= [\gamma_b \gamma_c + q_a (\gamma_c + \gamma_b)] p_b p_c. \end{aligned} \quad (2.21)$$

При известном значении  $\omega$  система уравнений (2.20) становится линейной относительно  $r, s, t$ . Ее решение не составляет проблемы.

Для более точного решения выполним некоторые математические преобразования системы (2.20). Вычитая второе уравнение из первого, третье из первого и первое из суммы второго и третьего, получаем:

$$\begin{aligned} r &= t + \alpha - \beta; \\ s &= t + \alpha - \eta; \\ -\omega &= \beta + \eta - \alpha - 2t. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Первые два уравнения определяют  $r$  и  $s$  через  $t$ . Последнее уравнение после подстановки  $r(t)$  и  $s(t)$  в  $\omega$  становится кубическим относительно  $t$ :

$$\omega^2 = rst = (t + \alpha - \beta)(t + \alpha - \eta)t = (\beta + \eta - \alpha - 2t)^2,$$

и его решение можно получить путем использования какой-либо итерационной процедуры. После определения  $t$ , а следовательно, и  $r, s$ , отыскание  $q_x, q_y, q_z$  не представляет особых затруднений:  $r = t + \alpha - \beta; s = t + \alpha - \eta$ .

$$q_x^2 = \frac{rs}{t}; \quad q_y^2 = \frac{rt}{s}; \quad q_z^2 = \frac{st}{r}. \quad (2.23)$$

Если пренебречь произведением вероятностей в формуле для последовательного соединения, что в инженерной практике вполне допустимо, поскольку  $q \ll 1$ , то система (2.16) принимает более простой вид:

$$\begin{cases} q_x q_y + q_x q_z = q_a + q_b; \\ q_x q_z + q_y q_z = q_a + q_c; \\ q_x q_y + q_y q_z = q_b + q_c. \end{cases}$$

Воспользовавшись заменой переменных (2.19), получаем линейную систему:

$$\begin{cases} r + s = q_a + q_b; \\ s + t = q_a + q_c; \\ r + t = q_b + q_c. \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$r = q_b; \quad s = q_a; \quad t = q_c. \quad (2.24)$$

Принимая во внимание (2.23), получаем следующее решение:

$$q_x^2 = \frac{q_a q_b}{q_c}; \quad q_y^2 = \frac{q_b q_c}{q_a}; \quad q_z^2 = \frac{q_a q_c}{q_b}. \quad (2.25)$$

Таким образом, квадрат вероятности отказа стороны эквивалентного треугольника примерно равен произведению вероятностей отказа примыкающих к данной стороне лучей звезды, деленному на вероятность отказа третьего луча звезды. Полученное решение можно использовать так же, как первое приближение в уточненном итерационном процессе.

**Пример преобразования «звезда – треугольник».** Пусть требуется преобразовать звезду с параметрами  $q_a = q_b = 0,09091$  ( $\lambda = 1$ ,  $\tau = 0,1$ ) и  $q_c = 0,083...3$  ( $\lambda = 0,9091$ ,  $\tau = 0,1$ ) в треугольник с параметрами  $q_x, q_y, q_z$ .

**Решение.** Промежуточные данные:

$$\alpha = q_a + q_b - q_a q_b = 0,17355; \quad \beta = q_a + q_c - q_a q_c = 0,1(6);$$

$$\eta = q_b + q_c - q_b q_c = 0,1(6); \quad \alpha - \beta = \alpha - \eta = 0,00688;$$

$$\beta + \eta - \alpha = 0,15978.$$

Начальное приближение, которое можно рассматривать как приближенное решение поставленной задачи, вычисляется согласно выражениям:

$$q_x = \sqrt{\frac{q_a q_b}{q_c}} = 0,3149; \quad q_y = \sqrt{\frac{q_b q_c}{q_a}} = 0,2887; \quad q_z = \sqrt{\frac{q_a q_c}{q_b}} = 0,2887;$$

$$r^{(0)} = q_b; \quad s^{(0)} = q_a; \quad t^{(0)} = q_c; \quad \omega^{(0)} = \sqrt{r^{(0)} s^{(0)} t^{(0)}}.$$

Рекуррентные соотношения метода Зейделя могут быть получены из (2.22):

$$t^{(k+1)} = \frac{\omega^{(k)} + \beta + \gamma - \alpha}{2};$$

$$r^{(k+1)} = t^{(k+1)} + (\alpha - \beta);$$

$$s^{(k+1)} = t^{(k+1)} + (\alpha - \gamma);$$

$$\omega^{(k+1)} = \sqrt{r^{(k+1)}s^{(k+1)}t^{(k+1)}}.$$

Расчеты даны в табл. 2.3. Здесь значения  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  приведены для того, чтобы проследить сходимость итерационного процесса для данных параметров. В общем случае они вычисляются только на последней итерации после сходимости процесса по  $\omega$ .

Таблица 2.3

Итерационный процесс эквивалентирования «звезда – треугольник»

Параметр	Итерация					
	0	1	2	3	4	5
$r = s$	0,0909	0,09989	0,102	0,1025	0,1026	0,1026
$t$	0,0833	0,09301	0,09512	0,09562	0,09574	0,09576
$\omega$	0,02624	0,03046	0,03146	0,03169	0,03175	0,03176
$q_x$	0,3152	0,3271	0,331	0,3315	0,3316	0,3316
$q_y = q_z$	0,2892	0,305	0,308	0,308	0,3092	0,3094

Расчеты показывают, что погрешность начальных приближений  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  для рассмотренного примера составляет не более 6,7 % и будет уменьшаться с уменьшением исходных  $q_a$ ,  $q_b$ ,  $q_c$ . Итерационный процесс практически можно было ограничить тремя итерациями.

Расчет системы линейных относительно параметров  $r$ ,  $s$ ,  $t$  уравнений по формуле (2.20) с последующим преобразованием  $r$ ,  $s$ ,  $t$  по формулам (2.23) в искомые вероятности позволяет получить  $q_x = 0,307$  (погрешность 7,4 %);  $q_y = q_z = 0,282$  (погрешность 8,6 %). Чуть лучше получается решение системы уравнений (2.20) при  $\omega \approx q_a q_b q_c = 0,000689$ :  $q_x = 0,3076$  (погрешность 7,2 %);  $q_y = q_z = 0,2832$  (погрешность 8,4 %). Наименьшая погрешность наблюдается при определении  $\omega$  по формуле (2.21). Здесь  $q_x = 0,324$  (погрешность 2,2 %);  $q_y = q_z = 0,3015$  (погрешность 2,5 %). Такая погрешность позволяет рекомендовать упрощенную (без итерационного процесса решения нелинейного уравнения) процедуру определения вероятностей отказов ветвей эквивалентного треугольника путем решения системы линейных уравнений (2.20) с предварительным определением параметра  $\omega$  по формуле (2.21) и последующими преобразованиями (2.25).

Систему уравнений (2.20) можно записать в виде:

$$\begin{cases} f_1 = r + s - \sqrt{rst} - \alpha = 0; \\ f_2 = s + t - \sqrt{rst} - \beta = 0; \\ f_3 = r + t - \sqrt{rst} - \gamma = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

В этом случае для расчета искомых параметров можно использовать рекуррентное соотношение метода Ньютона  $J(X^{(k)})\Delta X^{(k+1)} = -F(X^{(k)})$ , которое применительно к системе (2.26) и переменным  $X = \{r, s, t, \omega\}$  будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega^{(k)}}{2r^{(k)}} & 1 - \frac{\omega^{(k)}}{2s^{(k)}} & -\frac{\omega^{(k)}}{2t^{(k)}} \\ -\frac{\omega^{(k)}}{2r^{(k)}} & 1 - \frac{\omega^{(k)}}{2s^{(k)}} & 1 - \frac{\omega^{(k)}}{2t^{(k)}} \\ 1 - \frac{\omega^{(k)}}{2r^{(k)}} & -\frac{\omega^{(k)}}{2s^{(k)}} & 1 - \frac{\omega^{(k)}}{2t^{(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r^{(k+1)} \\ \Delta s^{(k+1)} \\ \Delta t^{(k+1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ f_3^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Последовательность расчетов на первой итерации методом Ньютона приведена в табл. 2.4, где искомые переменные представлены в виде  $X = \{r, s, t, \omega\}$ ,  $Q = \{q_x, q_y, q_z\}$ . Погрешность решения оценивалась относительно решения методом Зейделя (5-я итерация).

Таблица 2.4

Первая итерация методом Ньютона

$X(0)$	Матрица Якоби			$F(0)$	$\Delta X(1)$	$X(1)$	$\varepsilon$	$Q$
0,0909	0,8557	0,8557	-0,144	-0,018	0,0115	0,1024	0,15 %	0,3314
0,0909	-0,144	0,8557	0,8557	-0,019	0,0115	0,1024	0,15 %	0,3091
0,0833	0,8557	-0,144	0,8557	-0,019	0,0122	0,0956	0,21 %	0,3091
0,0262	-	-	-	-	-	0,0317	0,26 %	-

Нетрудно увидеть, что уже первая итерация методом Ньютона дала практически точное решение. Следовательно, метод Ньютона (2.27) в виде одной итерации может быть рекомендован для практических расчетов. При этом в качестве начального приближения можно использовать соотношения (2.24):

$$r^{(0)} = q_b; s^{(0)} = q_a; t^{(0)} = q_c; \omega^{(0)} = \sqrt{r^{(0)}s^{(0)}t^{(0)}}.$$

В преобразовании «треугольник – звезда» более удобно оперировать не с вероятностями отказов элементов, а с вероятностями их безотказной работы  $p = 1 - q$ . Принимая во внимание, что при последовательном соединении перемножаются вероятности безотказной работы, а при параллельном –

вероятности отказов, получаем следующую, отражающую идеологию двух узлов (источник – сток), систему алгебраических уравнений (см. рис. 2.11):

$$p_a p_b = \alpha = p_x + p_y p_z - p_x p_y p_z;$$

$$p_a p_c = \beta = p_z + p_x p_y - p_x p_y p_z;$$

$$p_b p_c = \eta = p_y + p_x p_z - p_x p_y p_z.$$

Умножая первое уравнение на второе и поделив полученное произведение на третье, получаем выражение для  $p_a^2$ . По аналогии можно вычислить и остальные вероятности:

$$p_a = \sqrt{\alpha\beta/\eta}; \quad p_b = \sqrt{\alpha\eta/\beta}; \quad p_c = \sqrt{\beta\eta/\alpha}.$$

Интенсивности отказов ребер эквивалентных графов (треугольника или звезды) определяются исходя из тех же трех опытов, которые были положены в основу при построении расчетных выражений для вероятности отказов. Используя формулы для интенсивностей отказов параллельного и последовательного соединений элементов, получаем систему линейных уравнений, связывающую интенсивности отказов ребер треугольника и звезды:

$$\begin{aligned} \lambda_x q_{yz} + (\lambda_y + \lambda_z) q_x &= \lambda_a + \lambda_b; \\ \lambda_y q_{xz} + (\lambda_x + \lambda_z) q_y &= \lambda_b + \lambda_c; \\ \lambda_z q_{xy} + (\lambda_x + \lambda_y) q_z &= \lambda_a + \lambda_c. \end{aligned} \quad (2.28)$$

где  $q_{yz}$ ,  $q_{xz}$ ,  $q_{xy}$  – вероятности последовательного соединения соответственно элементов  $(y, z)$ ,  $(x, z)$ ,  $(x, y)$ , например  $q_{xy} = q_x + q_y - q_x q_y$ .

Следует отметить, что для расчета интенсивностей отказов необходимы вероятности отказов сторон треугольника, поэтому расчет интенсивностей должен следовать за расчетом вероятностей.

#### **Пример эквивалентного преобразования «треугольник – звезда».**

Исходные данные приняты равными результирующим в предыдущем примере преобразования «звезда – треугольник» для того, чтобы убедиться в правильности алгоритмов и расчетов:

$$q_x = 0,3316; \quad p_x = 0,6684; \quad q_y = q_z = 0,3094; \quad p_y = p_z = 0,6906;$$

$$q_{xy} = q_{xz} = q_x + p_x q_y = 0,3316 + 0,6684 \cdot 0,3094 = 0,5384;$$

$$q_{yz} = q_y + p_y q_z = 0,3094 + 0,6906 \cdot 0,3094 = 0,5231.$$

Последовательные расчеты вероятностей следующие:

$$\alpha = p_x + p_y p_z q_x = 0,82655; \quad \beta = p_z + p_x p_y q_z = 0,8334;$$

$$\eta = p_y + p_x p_z q_y = 0,8334;$$

$$p_a = p_b = \sqrt{\alpha\beta/\eta} = 0,9091; \quad p_c = \sqrt{\beta\eta/\alpha} = 0,9167;$$

$$q_a = q_b = 0,09085 \approx 0,0909; \quad q_c = 0,08332 \approx 0,083...3.$$

Получены ПН, полностью совпадающие с исходными в предыдущем примере, что свидетельствует о правильности формул вероятностного преобразования.

Система уравнений для определения интенсивностей отказа:

$$0,5231 \lambda_x + 0,3316 \lambda_y + 0,3316 \lambda_z = \lambda_a + \lambda_b = 2;$$

$$0,3094 \lambda_x + 0,5384 \lambda_y + 0,3094 \lambda_z = \lambda_b + \lambda_c = 3;$$

$$0,3094 \lambda_x + 0,3094 \lambda_y + 0,5384 \lambda_z = \lambda_a + \lambda_c = 3.$$

Решая данную систему, получаем  $\lambda_x = -1,234$ ;  $\lambda_y = \lambda_z = 3,99$ .

В результате преобразования звезды в треугольник в общем случае, а также в рассматриваемом примере могут быть получены отрицательные значения интенсивности отказов эквивалентных ветвей, что никак не согласуется с физическими представлениями об отказах элементов. Данный факт вызывает негативное отношение инженеров-исследователей к методу эквивалентирования. Однако большое число реальных расчетов, выполненных автором, показывает, что в процессе дальнейшего эквивалентирования расчетной схемы знак минус устраняется и, несмотря на то что на промежуточных этапах получаются величины, далекие от реальных, результирующие показатели надежности близки к истинным.

Положительные интенсивности, как правило, имеют место при эквивалентном преобразовании из треугольника в звезду. Кроме того, здесь упрощается расчетная процедура. Запишем систему (2.28) в виде:

$$\lambda_a + \lambda_b = \alpha;$$

$$\lambda_b + \lambda_c = \beta;$$

$$\lambda_a + \lambda_c = \eta,$$

где  $\alpha, \beta, \eta$  – левые части соответствующих уравнений системы.

Отсюда следует:

$$\lambda_a = 0,5(\alpha + \beta - \eta);$$

$$\lambda_b = 0,5(\alpha + \beta - \gamma); \quad (2.29)$$

$$\lambda_c = 0,5(\beta + \eta - \alpha).$$

**Восстанавливаемые системы.** Для восстанавливаемых систем аналогом вероятности безотказной работы является коэффициент готовности, а вероятности отказа – коэффициент неготовности. При этом существуют ситуации, когда невозможны одновременные отказы последовательно соединенных элементов (выключатель и разъединитель). В этом случае не соблюдается условие равенства эквивалентного коэффициента готовности произведению коэффициентов готовности составляющих элементов. Здесь лучше применить эквивалентирование параметра  $\gamma = \lambda/\mu = \lambda t$ . Принимая во внимание

соотношения эквивалентирования при параллельном и последовательном соединении элементов, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\gamma_x(\gamma_y + \gamma_z)/\chi &= \gamma_a + \gamma_b; \\ \gamma_y(\gamma_x + \gamma_z)/\chi &= \gamma_b + \gamma_c; \\ \gamma_z(\gamma_x + \gamma_y)/\chi &= \gamma_a + \gamma_c,\end{aligned}\tag{2.30}$$

где 
$$\chi = 1 + \gamma_x + \gamma_y + \gamma_z.\tag{2.31}$$

Выполним замену переменных:

$$r = \gamma_x\gamma_y; \quad s = \gamma_x\gamma_z; \quad t = \gamma_y\gamma_z.\tag{2.32}$$

В результате получим:

$$\begin{aligned}r + s &= \chi(\gamma_a + \gamma_b); \\ r + t &= \chi(\gamma_b + \gamma_c); \\ s + t &= \chi(\gamma_a + \gamma_c).\end{aligned}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$r = \chi\gamma_b; \quad s = \chi\gamma_a; \quad t = \chi\gamma_c.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}\gamma_x^2 &= rs/t = \chi\gamma_a\gamma_b/\gamma_c; \\ \gamma_y^2 &= rt/s = \chi\gamma_b\gamma_c/\gamma_a; \\ \gamma_z^2 &= st/r = \chi\gamma_a\gamma_c/\gamma_b.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Полученные формулы по структуре похожи на (2.23). Этого следовало ожидать, поскольку  $\chi \approx q$ . Коэффициент определяется согласно (2.31) после подстановки  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ , исходя из (2.33). Результирующее квадратное уравнение для определения  $\chi$  имеет вид:

$$\chi^2 - (2 + \vartheta^2)\chi + 1 = 0,$$

где 
$$\vartheta = \sqrt{\gamma_a\gamma_b/\gamma_c} + \sqrt{\gamma_b\gamma_c/\gamma_a} + \sqrt{\gamma_a\gamma_c/\gamma_b}.$$

Решение данного квадратного уравнения дает два корня. Если один из них отрицателен, то выбирается тот, который положителен. Однако, как правило, оба корня положительны. В этом случае за основу следует взять тот корень, в соответствии с которым получаемые значения  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  будут более соответствовать условию (2.24).

Определение  $\chi$  по математической модели (2.33) целесообразно при расчетах на ЭВМ. При ручных расчетах можно принять  $\chi = 1$ , поскольку  $\vartheta \ll 1$ . В этом случае

$$\begin{aligned}r &= \gamma_b; \quad s = \gamma_a; \quad t = \gamma_c; \\ \gamma_x &= \sqrt{\gamma_a\gamma_b/\gamma_c}; \quad \gamma_y = \sqrt{\gamma_b\gamma_c/\gamma_a}; \quad \gamma_z = \sqrt{\gamma_a\gamma_c/\gamma_b}.\end{aligned}$$

При обратном преобразовании из треугольника в звезду система уравнений (2.30) представляется относительно  $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ :

$$\begin{aligned}\gamma_a + \gamma_b &= A; \\ \gamma_b + \gamma_c &= B; \\ \gamma_a + \gamma_c &= C,\end{aligned}\tag{2.34}$$

где  $A, B, C$  – левые части уравнений (2.30). Решение имеет вид (2.29).

Коэффициенты готовности и неготовности эквивалентных элементов определяются в соответствии с формулами

$$K_{\Gamma} = \frac{1}{1 + \gamma}; \quad K_{\text{H}} = \frac{\gamma}{1 + \gamma}.$$

**Интенсивности отказов.** Согласно формулам эквивалентирования для интенсивностей отказов последовательного и параллельного соединения элементов можно записать

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_x K_{\Gamma x} K_{\text{H} yz} + (\lambda_y + \lambda_z) K_{\Gamma yz} K_{\text{H} x}}{K_{\Gamma x} K_{\Gamma yz} + K_{\Gamma x} K_{\text{H} yz} + K_{\Gamma zy} K_{\text{H} x}} &= \lambda_a + \lambda_b; \\ \frac{\lambda_y K_{\Gamma y} K_{\text{H} xz} + (\lambda_x + \lambda_z) K_{\Gamma xz} K_{\text{H} y}}{K_{\Gamma y} K_{\Gamma xz} + K_{\Gamma y} K_{\text{H} xz} + K_{\Gamma xz} K_{\text{H} y}} &= \lambda_b + \lambda_c; \\ \frac{\lambda_z K_{\Gamma z} K_{\text{H} xy} + (\lambda_x + \lambda_y) K_{\Gamma xy} K_{\text{H} z}}{K_{\Gamma z} K_{\Gamma xy} + K_{\Gamma z} K_{\text{H} xy} + K_{\Gamma xy} K_{\text{H} z}} &= \lambda_a + \lambda_c,\end{aligned}\tag{2.35}$$

где  $K_{\Gamma ij}$  ( $K_{\text{H} ij}$ ) – коэффициент готовности (неготовности) системы из двух последовательных элементов  $i, j$ .

Данная система линейна как относительно  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ , так и относительно  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ . При замене звезды на треугольник решается система (2.35), а при обратном преобразовании решение имеет вид (2.34), где  $A, B, C$  – левые части уравнений системы (2.35).

При ручных или оценочных расчетах коэффициенты готовности целесообразно считать равными единице (если они действительно близки к единице), а коэффициенты неготовности — равными  $\gamma$ . В этом случае система (2.35) приводится к более простому виду:

$$\begin{aligned}\lambda_x(\gamma_y + \gamma_z) + \lambda_y \gamma_x &+ \lambda_z \gamma_x &= \lambda_a + \lambda_b; \\ \lambda_x \gamma_y &+ \lambda_y(\gamma_x + \gamma_z) + \lambda_z \gamma_y &= \lambda_b + \lambda_c; \\ \lambda_x \gamma_z &+ \lambda_y \gamma_z &+ \lambda_z(\gamma_x + \gamma_y) = \lambda_a + \lambda_c.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Полученная система линейных уравнений по своей структуре эквивалентна (2.28). Следовательно, аналогичны и ее решения. В частности, при преобразовании из треугольника в звезду решение имеет вид (2.29), где  $\alpha, \beta, \eta$  – левые части уравнений (2.36).

Оценивая полученные расчетные выражения с точки зрения их трудоемкости, следует отметить, что более предпочтительным является преобразование из треугольника в звезду. Здесь решение имеет вид аналитических формул. Преобразование звезды в треугольник связано с итерационными процессами. При этом, однако, вполне достаточно одной итерации метода Ньютона.

Замена треугольника звездой позволяет путем введения нового узла ранга 3 уменьшить ранги узлов исходного треугольника на единицу. Данная процедура может стать достаточно эффективной, если некоторые узлы треугольника имеют ранг 3, что при последующем понижении ранга позволяет выполнить последовательное преобразование схемы с узлами ранга 2. Дополнительным положительным свойством данной процедуры является фиктивный характер вновь вводимого узла ранга 3: не требуется определение его результирующих ПН.

### **3. РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР**

В результате исключения узлов ранга 1, 2 формируется сложная структура с узлами ранга не менее трех. Как было сказано выше (п. 2.2.3), достаточно эффективной процедурой дальнейшего эквивалентного преобразования являются преобразования «треугольник – звезда», «звезда–треугольник». Однако применение преобразования «звезда – треугольник» требует в дальнейшем определения ПН исключенного узла звезды (восстановление узла ранга 3). Здесь можно использовать процедуру вероятностного эквивалентирования. По аналогии с восстановлением узла ранга 2 вводятся три эквивалентных связи, ПН которых определяются из условия известных на данном этапе ПН трех смежных узлов. При этом должна быть решена система трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными. Это возможно только при использовании итерационных процедур. В то же время итерационные методы, как это будет показано ниже, могут применяться как самостоятельные при расчете ПН сколь угодно сложных схем. Поэтому в обобщенном алгоритме «исключение – восстановление узлов» выделение процедуры эквивалентирования звезды треугольником теряет смысл, поскольку после исключения узлов ранга 3 могут остаться узлы ранга 4 и выше, где итерационные методы являются единственно возможными для решения практических задач.

Для реальных ЭЭС вероятность одновременного отказа трех и более независимых элементов чрезвычайно мала ( $< 10^{-9}$ ), поэтому в качестве первого, и часто достаточного, приближения можно считать, что ПН узла ранга 3 и выше определяются при условии абсолютно надежного внешнего электроснабжения смежных узлов. Однако в сложной структуре с узлами ранга 3 и выше могут оказаться одно- и двухэлементные сечения, ПН которых могут стать определяющими. Расчетные процедуры должны учитывать данное обстоятельство.

### 3.1. Районирование

В практике возможны ситуации, когда целый район ЭЭС (узлы 5–8 на рис. 3.1) питается от одной подстанции 4, которая имеет относительно невысокую надежность (ограниченную связью 3–4). При этом ее ПН входят в состав ПН всех узлов района как элемент последовательной структуры. Следовательно, важным этапом расчетной процедуры является определение множества таких узлов и их учет в показателях надежности остальных узлов.

Отмеченная специфика ЭЭС, заключающаяся в том, что некоторый район узлов нагрузки питается от одного или двух узлов поставки электроэнергии, требует процедуры определения на многосвязном расчетном графе (с узлами ранга 3 и выше) одноэлементных или (и) двухэлементных сечений. При этом в состав множества таких сечений обязательно входят сечения, состоящие только из узлов, поскольку любая связь ограничена узлами, а при отказе любого узла ЭЭС отключаются и все инцидентные связи. Поэтому если некоторая связь образует одноэлементное или входит в состав двухэлементного сечения, то замена этой связи инцидентным узлом образует новое одноэлементное или двухэлементное сечение для того же участка электрической сети.

С целью определения одноэлементных сечений каждому узлу  $i$  ставится в соответствие ближайший по пути питания узел  $\beta_i$ , отказ которого неизбежно приводит к отказу узла  $i$ . Такие узлы условно идентифицируются как базовые (узел 4 на рис. 3.1 является базовым для узлов 5–8). Как частный случай в качестве базового узла (БУ) может выступать ИП (ИП на рис. 3.1 является базовым для узлов 1–3).

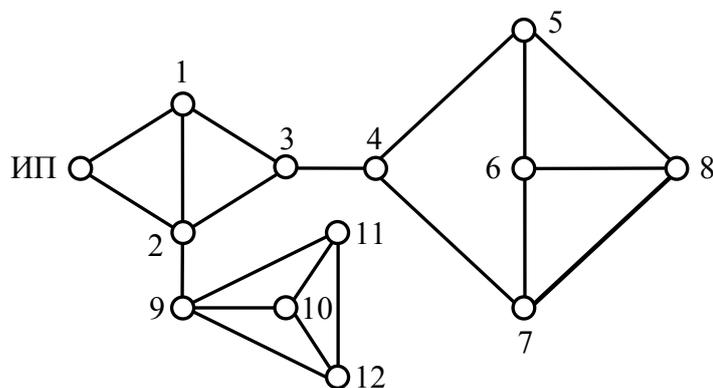


Рис. 3.1. Расчетный граф с узлами ранга 3 и выше

Понятно, что БУ может рассматриваться как ИП с ограниченными ПН. Кроме того, наличие БУ означает, что  $\beta_i$  является базовым не только для узла  $i$ , но и для всех узлов, входящих в состав путей от  $\beta_i$  до  $i$ . Действительно, если существует такой путь  $v$  от  $i$  до  $\beta_i$ , на котором имеется узел  $\alpha \in v$ , отказ которого не произойдет, если откажет только узел  $\beta_i$  ( $\beta_i$  не является БУ для  $\alpha$ ), то при отказе  $\beta_i$  будет существовать путь от ИП до узла  $i$  через узел  $\alpha$ , т. е. узел  $\beta_i$  не будет базовым для узла  $i$ , что противоречит статусу  $\beta_i$ .

Все узлы, имеющие один и тот же БУ, образуют некоторое множество (район) узлов локальной связности. ПН узлов района могут быть определены отдельно и лишь после того, как определены ПН БУ. При этом ПН БУ являются структурно последовательными для всех узлов района. Поскольку ПН узлов и связей района определяются ПН БУ, то они не влияют на ПН как БУ, так и всех узлов по пути от ИП до БУ. Следовательно, рассматриваемый район может быть выведен из этапа определения оставшихся узлов как эквивалентный узел первого ранга. Это делает возможным дальнейшее эквивалентное преобразование схемы с узлами ранга не более двух, как это имеет место на рис. 3.1 после удаления районов {узлы 4–8}, {узлы 9–12}. Как результат, начальным этапом при расчете ПСН сложноразветвленной ЭЭС должен стать процесс районирования.

Удаление БУ разделяет систему на не связанные между собой подсистемы (как правило, две, но может быть и больше). Это предопределяет алгоритм назначения БУ. Если удаление какого-либо узла ЭЭС разделяет ЭЭС на несвязные компоненты, то этот узел является базовым для тех районов, в которые не входит ИП.

Каждый БУ определяет свой район, ПН узлов которого могут быть рассчитаны автономно, например узел 4 для района узлов 5–8 на рис. 3.1. Однако один и тот же узел может быть базовым для нескольких районов одновременно. Так узлы 5–8 на рис. 3.1 в качестве базового имеют не только узел 4, но и узел 3, отказ которого неизбежно приводит к отказу электропитания указанного района, а ближайший БУ 4 имеет в качестве базового узел 3. Отсюда весь район с БУ 4 входит в состав района с БУ 3. Таким образом, район может состоять из ряда подрайонов, а система БУ (а следовательно, и районов) образует радиальную иерархическую структуру. На рис. 3.1 подрайон {4–8} с БУ 4 входит в состав района {3–8} с БУ 3, а подрайон {9–11} с БУ 9 входит в состав района {2; 9–11} с БУ 2. Район {ИП, 1–3} в качестве БУ имеет непосредственно узел питания. Иерархия БУ определяет иерархию расчетов ПН районов. В частности, для схемы на рис. 3.1 присуща следующая очередность расчета:

- район {ИП, 1, 2, 3}, ПН узлов которого определяются методом эквивалентных преобразований схемы с узлами ранга не более двух;
- ПН узлов 4, 9 определяются по схеме узлов ранга 1;
- ПН районов {4–8} с БУ 4 и {9–11} с БУ 9 (по 4 узла в районе) рассчитываются порознь как системы с узлами ранга 3 и выше.

Свойство иерархичности БУ позволяет получить все множество БУ путем полного перебора отключаемых узлов с последующим анализом целостности схемы – если в состав основной подсистемы связанных с ИП узлов входят не все узлы исходной схемы, то отключаемый узел является БУ для тех узлов, которые не вошли в состав основной подсистемы.

Иерархия БУ устанавливается путем расширения сферы вложенности районов. Нулевой уровень образует ИП. Первый уровень образуют те узлы, которые в качестве БУ имеют только ИП (узлы 1, 2, 3 на рис. 3.1). Второй уровень (узлы 4, 9) районов формируется из узлов с БУ, входящих в состав

узлов первого уровня (соответственно узлы 3, 2). У всех узлов второго уровня два БУ – ИП и некоторый узел из района первого уровня. Из этих двух БУ выбирается узел, определяющий район с единым БУ и не являющийся ИП (для узла 4 это узел 3, а для узла 9 – узел 2). Данный процесс расширения сферы районов продолжается до полного просмотра всех узлов. Процедура районирования формализуется следующим алгоритмом.

### Алгоритм районирования

1. Цикл по удаляемым узлам  $i = 1, n$ .
2. Удалить узел  $i$  (отключаются все связи с узлом  $i$ ). Идентификатор удаления  $u_i = 1$ .
3. Начиная с ИП, записать в массив  $M$  узлов района все отличающиеся от  $i$  смежные ИП  $k$  узлов. Присвоить  $n_{\max} = k, s = 1$ .
4. Записать в массив  $M$  все отличающиеся от  $i$  и не входящие в  $M$   $k_s$  узлов, смежных узлу  $M_s \in M$ . Присвоить  $n_{\max} = n_{\max} + k_s$ .
5. Если  $s < n_{\max}$ , то присвоить  $s = s + 1$  и вернуться к п. 4, иначе перейти к выполнению п. 6.
6. Если число записанных в  $M$  узлов  $n_{\max} < n$ , то узел  $i$  является БУ. Записать данный узел в массив  $BU$  базовых узлов. Всем узлам, не входящим в  $M$ , присвоить идентификатор района (например, по номеру узла  $i$ ).
7. Восстановить узел  $i$  ( $u_i = 0$ ). Очистить массив  $M$ .
8. Повторить пп. 2–7 для следующего  $i$ .

### 3.2. Декомпозиция схем с собственными отказами узлов

Ранее (п. 1.3.6) было показано, что действенным методом при анализе надежности сложных схем является метод декомпозиции, где при декомпозиции связи  $x$  исходная сложная схема представляется в виде двух более простых:  $x$  отсутствует и  $x$  – абсолютно надежный элемент.

В то же время реальные электрические схемы характеризуются не только отказом связей, но и возможностью отказов узлов по собственным причинам. Узлы являются относительно сложными техническими устройствами – система сборных шин с присоединенными к ней разъединителями, трансформаторами напряжения и другими элементами, отказ которых приводит к необходимости восстановительного ремонта с разрывом (отключением) всех связей, инцидентных отказавшему узлу. Простая декомпозиция (п. 1.3.6) по одному элементу ( $x$ ) здесь не дает решения, поскольку непонятно, как в схеме мостика (рис. 1.23, б) при работоспособной декомпозируемой связи будут объединяться узлы  $F$  и  $G$  с произвольными ПН.

Решением проблемы является декомпозиция по трем элементам: по связи  $x$  и узлам  $F, G$ . В зависимости от состояния каждого элемента (работа – отказ) для схемы мостика можно определить 8 состояний системы, представленных в табл. 3.1, где затененные узлы соответствуют их работоспособному состоянию, а точечные окружности – отключенному состоянию узлов. По-

сколькx отключение узла связано с полным разрывом всех соединений между связями, подключенных к отключаемому узлу, то при отключении любого узла состояние связи  $x$  не имеет значения.

Таблица 3.1

Декомпозиция по трем элементам

$x$	$F$	$G$	$p$	Схема	Расчетная схема
0	0	0	$q_x q_F q_G$		
		1	$q_x q_F q_G$		
	1	0	$q_x q_F q_G$		
		1	$q_x q_F q_G$		
1	0	0	$q_x q_F q_G$		
		1	$q_x q_F q_G$		
	1	0	$q_x q_F q_G$		
		1	$q_x q_F q_G$		

Анализируя первые семь состояний, можно отметить, что все они учитываются в первой расчетной схеме правого столбца, которая не содержит элемент  $x$ , а узлы  $F$ ,  $G$  входят как последовательные элементы параллельных структур. В результате декомпозиция по трем элементам сводится к декомпозиции по одному элементу  $x$ , но с вероятностями схем соответствен-

но  $p = p_x p_F p_G$  для работоспособного состояния  $x$  и  $q = 1 - p_x p_F p_G$  при отказе связи  $x$ .

### 3.2.1. Итерационные процедуры

Одним из перспективных направлений расчета показателей структурной надежности на ЭВМ для сложных (с узлами ранга не менее двух) и единственно возможным для сверхсложных структур (с узлами ранга четыре и выше, без контуров типа «треугольник») является использование итерационных процедур. Трудности в точном аналитическом представлении функциональных связей между показателями надежности элементов сложных схем явились объективной причиной задержки в развитии итерационных методов решения упомянутого класса задач. В то же время логические конструкции позволяют определить основные причины отказа электроснабжения узла нагрузки и тем самым выразить его ПН через ПН определяющего систему электроснабжения множества элементов системы. По существу, это отражение функциональной зависимости между ПН, что дает возможность сформировать рекуррентные соотношения итерационного процесса оценки показателей структурной надежности распределительных электрических сетей.

### 3.2.2. Монобазовая модель

Сущность вероятностного эквивалентирования на этапе определения результирующих ПН узла произвольного ранга заключается в представлении реальной электрической схемы локально для каждого узла некоторой эквивалентной расчетной схемой, позволяющей оценить искомые ПН.

Узел  $i$  эквивалентного по надежности графа рассматривается локально в совокупности с узлами, непосредственно связанными с  $i$  (множество смежных узлов  $\Gamma_i$ , рис. 3.2). Показатели надежности узла  $i$  на каждой итерации определяются на основании данных о надежности только тех узлов, которые принадлежат  $\Gamma_i$ , т. е. истинная структура той части расчетной схемы, которая находится вне зоны близлежащих узлов, учитывается лишь опосредованно и неточно. При этом принимается допущение о независимости отказов путей электроснабжения. Реально это не соответствует действительности. В частности, во внешней структуре могут присутствовать узлы или связи, являющиеся двухэлементными сечениями по отношению к рассматриваемому узлу (одноэлементные сечения исключены при наличии предварительной процедуры районирования). Именно допущение о независимости путей электроснабжения приводит к погрешностям итерационных расчетов ПН.

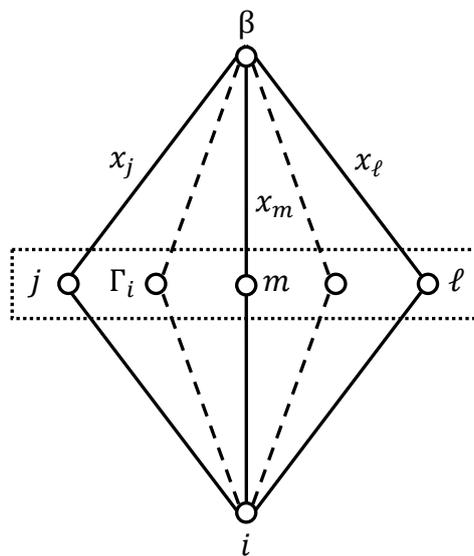


Рис. 3.2. Эквивалентная схема

В монобазовой модели (МБМ) принимается допущение, что все узлы расчетной схемы имеют один базовый узел, например тот, что получен в результате районирования. В итерационной процедуре при локальном анализе надежности текущего узла считается, что отказ электроснабжения узла  $i$  (событие  $A_i$ ) имеет место, если происходит одно из трех событий:

$A_B$  – отказ базового узла;

$A_{ii}$  – непосредственный отказ узла  $i$ ;

$B_i$  – одновременный отказ электроснабжения по всем ветвям, примыкающим к узлу  $i$ .

Все эти события считаются независимыми, связанными последовательно по надежности. В то же время событие  $B_i$  представляется в виде совокупности  $\Gamma_i$  параллельных по надежности событий  $B_{ij}$  (реально зависимых, но рассматриваемых как независимые), заключающихся в отказе электроснабжения узла  $i$  по направлению связи  $i - j$ ,  $j \in \Gamma_i$ .

При единственном и выведенном из расчета БУ района для определения ПН узла  $i$  может быть принято обобщение математической модели восстановления узла ранга 2 (п. 2.2.2). Предполагается, что каждый узел  $j \in \Gamma_i$  связан с БУ единственной фиктивной ветвью  $x_j$ . В этом случае ПН узла  $i$  определяются параллельной структурой (см. рис. 3.2), где каждая параллельная связь состоит из трех элементов:  $\{x_j, jj, ij\}$ . Данная логическая структура (в целях упрощения математических выражений базисный узел считается абсолютно надежным) описывается формулой:

$$A_i = A_{ii} + \prod_{j \in \Gamma_i} (A_{ij} + A_{jj} + A_{x_j}). \quad (3.1)$$

ПН эквивалентных связей могут быть определены, если известны ПН узлов  $j \in \Gamma_i$ , исходя из логической формулы:

$$A_j = A_{jj} + A_{x_j} \left( A_{ij} + A_{ii} + \prod_{k \in \Gamma_i, k \neq j} (A_{ik} + A_{kk} + A_{x_k}) \right). \quad (3.2)$$

Соотношения (3.1), (3.2) показывают, что собственные отказы узлов частично и временно могут быть выведены из итерационного расчета – они, как и ПН БУ, могут быть добавлены на этапе определения результирующих ПН узлов как элементы последовательной структуры. Принимая структурную формулу  $A_j = A_{jj} + A_j^*$ , получаем более простое логическое выражение:

$$A_j^* = A_{x_j} \left( A_{ij} + A_{ii} + \prod_{k \in \Gamma_i, k \neq j} (A_{ik} + A_{kk} + A_{x_k}) \right). \quad (3.3)$$

Частичность неучета собственных отказов проявляется в том, что в логических структурах (3.1), (3.2), заключенных в скобки, они присутствуют. Напомним, что в качестве исходных данных рассматриваются веро-

ятности безотказной работы ветвей  $p_{ij}$  и узлов  $p_{ii}$  графа, интенсивности отказов  $\lambda_{ij}$  и  $\lambda_{ii}$ , математические ожидания (МО) длительностей восстановления  $\tau_{ij}$  и  $\tau_{ii}$ . При заданных  $\lambda$ ,  $\tau$  вычисляются относительные длительности простоев  $\gamma_{ij} = \lambda_{ij}\tau_{ij}$  и  $\gamma_{ii} = \lambda_{ii}\tau_{ii}$  или вероятности  $q_{ij} = \gamma_{ij}/(1 + \gamma_{ij})$ ,  $q_{ii} = \gamma_{ii}/(1 + \gamma_{ii})$ . Результирующему отказу системы электроснабжения узла  $i$  соответствуют вероятность  $Q_i$ , интенсивность  $\lambda_i$ , МО длительности восстановления  $\tau_i$ , относительная длительность простоев  $\gamma_i$ . Применительно к вероятностям отказа логическое соотношение (3.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} Q_j^* &= q_{x_j} \left( 1 - p_{ij}p_{ii} \left( 1 - \prod_{k \in \Gamma_i, k \neq j} (1 - p_{ik}p_{kk}p_{x_k}) \right) \right) = \\ &= q_{x_j} \left( 1 - p_{ij}p_{ii} \left( 1 - \frac{Q_i^*}{1 - p_{ij}p_{jj}p_{x_j}} \right) \right), \quad j \in \Gamma_i, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$Q_i^* = \prod_{\forall k \in \Gamma_i} (1 - p_{ik}p_{kk}p_{x_k})$$

представляет вероятность отказа электроснабжения узла  $i$ , определяемую по эквивалентной схеме замещения.

Нетрудно увидеть, что система уравнений (3.4) является нелинейной относительно вероятностей отказов эквивалентных связей (в правой части (3.4) элемент  $p_{x_k} = 1 - q_{x_k}$ ). Ее решение возможно только с помощью итерационных процедур. Простейшим математическим методом, позволяющим получить решение системы нелинейных уравнений, является метод простой итерации, согласно которому искомые переменные выражаются относительно себя через некоторую векторную функцию  $\bar{X} = \varphi(\bar{X})$ . Решение определяется последовательным уточнением с помощью рекуррентного соотношения  $\bar{X}^{(k+1)} = \varphi(\bar{X}^{(k)})$ . В частности, при известных результирующих ПН смежных узлов вероятности отказа эквивалентных связей могут быть получены с помощью рекуррентного соотношения:

$$q_{x_k}^{(r+1)} = \frac{Q_j^*}{1 - p_{ij}p_{ii} \left( 1 - \frac{Q_i^{*(r)}}{1 - p_{ij}p_{jj}p_{x_k}^{(r)}} \right)}, \quad j \in \Gamma_i. \quad (3.5)$$

Представленная итерационная процедура является обобщением процедуры восстановления узла ранга 2 и может успешно применяться на этапе восстановления узла ранга 3 в методе эквивалентных преобразований после его исключения (преобразование звезды в треугольник с последующим восстановлением общего узла звезды) на предшествующих этапах. Однако если при восстановлении узла ранга 2 можно было получить аналитическое решение, то при восстановлении узла ранга 3 это становится уже затруднительно.

## Двойной итерационный цикл

Введение в расчетный процесс итерационного цикла позволяет отказаться от этапа исключения узлов ранга 3 и выше. При этом в качестве неизвестных будут рассматриваться не только ПН эквивалентных связей, но и результирующие ПН узлов. Безусловно, все искомые переменные могут рассматриваться как равнозначные, но соотношение (3.5) позволяет разделить расчетный процесс на два этапа: определение ПН эквивалентных связей при заданных результирующих ПН узлов и уточнение результирующих ПН узлов на базе полученных ПН эквивалентных связей.

Применительно к рассматриваемой задаче нелинейная функциональная зависимость представляется через алгоритм. Произвольно задаются начальные значения искомых вероятностей  $\bar{Q}^{(0)}$  отказов узлов расчетной схемы (итерация  $k = 0$ ). Достаточно хорошим приближением здесь являются вероятности инцидентных сечений:

$$Q_i^{(0)} = \prod_{j \in \Gamma_i} (1 - p_{ij} p_{jj}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Далее каждый узел рассматривается отдельно, и здесь снова вводится итерационная процедура (внутренний итерационный цикл с индексом  $r$ ) определения эквивалентных параметров  $\{q_{x_j}, j \in \Gamma_i\}$ . Для определения эквивалентных параметров условие (3.5) может быть записано в виде следующего рекуррентного соотношения:

$$q_{x_j}^{(r+1)} = \frac{Q_j^{*(k)}}{1 - p_{ij} p_{ii} \left( 1 - \frac{Q_i^{*(k)}}{1 - p_{ij} p_{jj} p_{x_j}^{(r)}} \right)}, \quad j \in \Gamma_i. \quad (3.6)$$

При выполнении критерия сходимости  $|q_{x_j}^{(r+1)} - q_{x_j}^{(r)}| \leq \varepsilon, j \in \Gamma_i$  определяется уточненная вероятность отказа электроснабжения текущего узла:

$$Q_i^{*(k+1)} = \prod_{j \in \Gamma_i} (1 - p_{ij} p_{jj} p_{x_j}^{(k)}). \quad (3.7)$$

Внешний итерационный цикл (определение  $\{Q_i^{*(k)}\}$ ) выполняется до тех пор, пока значения вероятностей отказа узлов двух смежных внешних итераций не станут с допустимой точностью одинаковыми.

**Пример 3.1.** В качестве иллюстрации внутреннего итерационного процесса рассмотрим схему, представленную на рис. 3.3.

*Итерационный расчет эквивалентных вероятностей.* Вероятности отказов связей (БУ имеет номер 4):  $q_{12} = q_{13} = 0,167$ ;  $q_{24} = q_{34} = 0,184$ ;  $q_{14} = q_{23} = 0,13$ . Собственные вероятности безотказной работы узлов:  $p_{11} = 0,95$ ;  $p_{22} = p_{33} = 0,99$ .

Начальные вероятности узлов определяются произведением вероятностей всех инцидентных ветвей. В частности,

$$Q_1 = q_{11} + p_{11}q_{12}q_{13}q_{14} = 0,05 + 0,95 \cdot 0,167 \cdot 0,167 \cdot 0,13 = 0,0534.$$

По аналогии  $Q_2 = Q_3 = 0,014$ .

В качестве исходных вероятностей  $q_{x_i}^{(0)}$  приняты нулевые значения (абсолютно надежные связи).

Для определения уточненных ПН первого узла необходимы ПН  $q_{x_2}$ ,  $q_{x_3}$  эквивалентных связей узлов 2, 3 с БУ (рис. 3.4). Они определяются согласно итерационной процедуре (3.6). Вероятность отказа связи (1 – 2 – БУ)  $q_{12Б} = q_{13Б} = 1 - p_{12}p_{22}p_{x_2} = 1 - 0,837 \cdot 0,99 \cdot 1 = 0,172$ . В результате, на первой итерации

$$\begin{aligned} q_{x_2}^{(1)} = q_{x_3}^{(1)} &= \frac{Q_2 - q_{22}}{p_{22}} + p_{12}p_{22}q_{x_2}^{(0)}q_{13Б}q_{1Б} = \\ &= \frac{0,014 - 0,01}{0,99} + 0,837 \cdot 0,99 \cdot 0 \cdot 0,172 \cdot 0,13 = 0,004. \end{aligned}$$

На второй итерации  $q_{x_2}^{(2)} = q_{x_3}^{(2)} = 0,07$ .

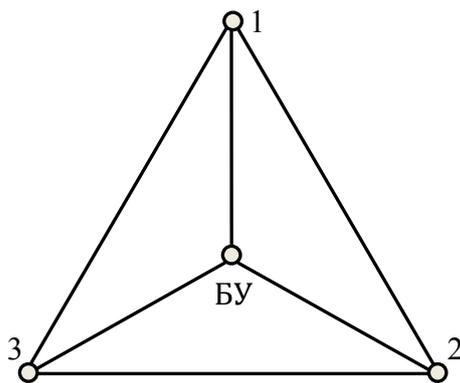


Рис. 3.3. Расчетный граф

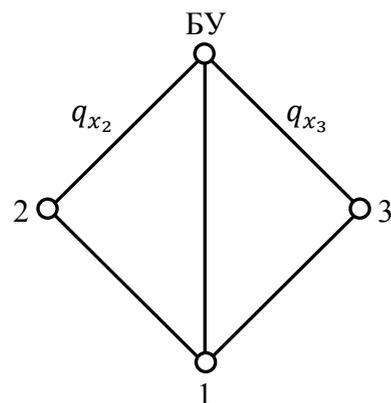


Рис. 3.4. Определение ПН узла 1

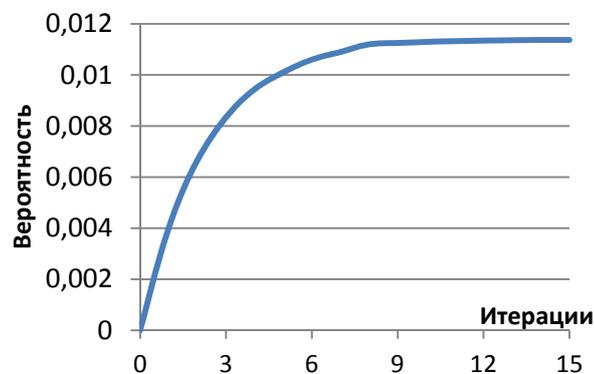


Рис. 3.5. Эквивалентная вероятность

Итерационное изменение  $q_{x_2}^{(k)} = q_{x_3}^{(k)}$  представлено на рис. 3.5. На 15-й итерации  $q_{x_2}^{(15)} = q_{x_3}^{(15)} = 0,0114$ .

На следующей итерации внешнего итерационного цикла

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_{11} + p_{11}(1 - p_{12}p_{22}p_{x_2})(1 - p_{13}p_{33}p_{x_3})q_{14} = \\ &= 0,05 + 0,95(1 - 0,833 \cdot 0,99 \cdot 0,9886)^2 \cdot 0,13 = 0,0542. \end{aligned}$$

Окончательно  $Q_1 = 0,055$ ,  $Q_2 = Q_3 = 0,0173$ .

### Матричный итерационный цикл

Представленная процедура двойного итерационного цикла допускает матричную запись. Вероятности эквивалентных связей меняются в зависимости от узла назначения ( $i = 1, \dots, n$ ). Обобщенно они могут быть записаны в виде матрицы  $Qx^t = \{qx_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$ , где элемент  $qx_{ij}$  определяет вероятность эквивалентной связи  $j$  – БУ при узле назначения  $i$  (номер строки матрицы соответствует узлу назначения). Алгоритмически в итерационной процедуре на внутренней итерации в зависимости от узла назначения меняются вероятности только одного соответствующего столбца матрицы  $Qx$  (строки матрицы  $Qx^t$ ). В конечном итоге стабилизируется вся матрица  $Qx$ . Отсюда итерационный процесс может быть представлен в виде единого цикла последовательного уточнения матрицы  $Qx^{(r+1)} = \varphi(Qx^{(r)})$ , где, как и раньше,  $\varphi(Qx^{(r)})$  означает алгоритмическую связь. При этом результирующие вероятности отказов узлов могут рассматриваться как некоторые промежуточные результаты.

В качестве основного соотношения при уточнении элементов матрицы  $Qx$  могут рассматриваться выражения (3.4), (3.6). С учетом того, что узлом назначения здесь является узел  $j$ , выражение (3.6) может быть записано в виде:

$$Qx_{ij}^{(r+1)} = \frac{Q_i^{*(k)}}{1 - p_{ij}p_{jj} \left(1 - \frac{Q_j^{*(k)}}{Qs_{ij}^{(r)}}\right)}, \quad i \in \Gamma_j, \quad (3.8)$$

где  $Qs_{ij}^{(r)} = 1 - p_{ij}p_{ii} (1 - Qx_{ij}^{(r)})$  определяет вероятность отказа пути электроснабжения узла  $j$  через узел  $i$  (расширение  $Qx_{ij}^{(r)}$  за счет вероятностей отказа последовательно соединенных узла  $i$  и связи  $i - j$ ). По аналогии с  $Qx$  совокупность  $\{Qs_{ij}\}$  может быть представлена в виде матрицы

$$Qs = [E] - Px * [P_{ij}] * \bar{P}_{ii}, \quad (3.9)$$

где  $Px = [Px_{ij}] = [1 - Qx_{ij}]$ ,  $[P_{ij}]$  – матрицы вероятностей безотказной работы соответственно эквивалентных и реальных связей расчетной схемы (при отсутствии связи соответствующий элемент матрицы  $p_{ij} = 0$ );  $\bar{P}_{ii}$  – вектор-столбец собственных вероятностей безотказной работы узлов;  $[E]$  – матрица, состоящая из единиц; операции « $\rightarrow$ », « $*$ » означают поэлементное (Адемарово) вычитание и умножение соответствующих элементов матриц.

Алгоритм преобразования матрицы.

1. По формуле (3.9) вычисляется матрица  $Qs$  вероятностей отказа расширенных эквивалентных связей  $\{j - i - Б\}$ .
2. Путем постолбцового произведения элементов матрицы  $Qs$  согласно (3.7) вычисляются текущие значения (вектор-строка  $\bar{Q}^{*t}$ ) вероятностей отказов узлов  $Q_j^* = \prod_{vi} Qs_{ij}$ .
3. Поэлементным делением вектора-строки  $\bar{Q}^{*t}$  на строки матрицы  $Qs$  вычисляется матрица  $Z = \{z_{ij}\} = \bar{Q}^{*t} / Qs$ , где элемент матрицы  $z_{ij}$  определяет вероятность отказа узла  $j$  при условии отсутствия его связи с БУ через узел  $i$ . Эта величина участвует в определении  $Qx_{ij}$  через последовательную связь  $j - i$ .
4. Формируется вспомогательная матрица, отражающая последовательную связь  $i - j - БУ$ :  $V = \{v_{ij}\} = [1] - ([1] - Z) * [P_{ij}] * \bar{P}_{ij}^t$ . Элемент матрицы  $v_{ij}$  определяет вероятность отказа электроснабжения узла  $i$  (узел  $i$  снова является узлом назначения) через узел  $j$  (одна из  $\Gamma_i$  параллельных ветвей).
5. Элемент  $Qx_{ij}$  новой матрицы  $Qx$  определяется делением вероятности узла  $i$  на условную вероятность  $v_{ij}$  отказа узла  $j$ :  $Qx = \bar{Q}^* / V$ .
6. Пункты 1–5 выполняются многократно до стабилизации матрицы  $Qx$ .
7. Результатом расчета пп. 1–6 являются не только матрица  $Qx$ , но и определяемый в п. 2 вектор  $\bar{Q}^*$ . Окончательные вероятности отказа электроснабжения узлов определяются с учетом собственных отказов узлов и отказа БУ  $\bar{Q} = \bar{1} - (\bar{1} - \bar{Q}^*) \cdot (\bar{1} - \bar{Q}_Б^*) \cdot \bar{P}_{ii}$ .

В качестве первой тестовой схемы рассматривалась одноконтурная электрическая схема с одним БУ (источник питания) и тремя нагрузочными узлами (узлы ранга 2). После четырех итераций получено исключительно точное (легко проверяемое ручными расчетами) решение.

Для иллюстрации алгоритма на более сложной электрической схеме рассмотрим первую итерацию в примере 3.1. В первом столбце табл. 3.2 указан номер узла. Во втором – вектор собственных вероятностей безотказной работы узлов. Далее представлены матрица  $\{p_{ij}\}$  вероятностей безотказной работы связей, матрица  $Qx^{(0)}$  начальных значений вероятностей отказов эквивалентных связей (на нулевой итерации) и расчетные матрицы  $Qs$ ,  $Z$ ,  $V$ ,  $Qx^T$ ,  $Qx^{(1)}$  ( $Qx$  на первой итерации).

Начальные значения вероятностей отказа эквивалентных связей (матрица  $Qx$ ) заданы произвольно.

Матрица  $Qs$  получена согласно (3.9). В частности,  $Qs_{12} = 1 - (1 - Qx_{12}) p_{12}p_{11} = 1 - (1 - 0,1) \cdot 0,833 \cdot 0,95 = 0,288$ . В нижней строке матрицы путем перемножения всех элементов столбца получены вероятности отказа электроснабжения узлов  $Q_j^{*t}$ . В частности,  $Q_1^* = 1 \cdot 0,258 \cdot 0,258 \cdot 0,13 = 0,00865$ .

Матричный итерационный цикл

№	$P_{ii}$	$\{p_{ij}\}$			$Qx^{(0)}$			$Qs$			$Z$		
1	0,95	0	0,83	0,83	0	0,1	0,1	1,0	0,29	0,288	0,009	0,04	0,04
2	0,99	0,83	0	0,87	0,1	0	0,1	0,258	1,0	0,225	0,034	0,01	0,05
3	0,99	0,83	0,87	0	0,1	0,1	0	0,258	0,22	1,0	0,034	0,05	0,01
4	1	0,87	0,82	0,82	–	–	–	0,13	0,18	0,184	0,066	0,07	0,07
								$Q^*$	0,009	0,01	0,012		

№	$V$			$Qx^T$			$Qx^{(1)}$		
1	1,000	0,209	0,209	0	0,057	0,057	0	0,037	0,037
2	0,235	1,000	0,184	0,037	0	0,065	0,057	0	0,065
3	0,235	0,184	1,000	0,037	0,065	0	0,057	0,065	0

Матрица вероятностей условных отказов узлов  $Z$  ( $Z_{ij}$  – вероятность отказа узла  $j$  при условии отсутствия связи с узлом  $i$ ) получена согласно формуле  $Z = Q^{*t}/Qs$ .

В частности,  $Z_{21} = Q_1^*/Qs_{21} = 0,00865 / 0,258 = 0,0335$ .

Вспомогательная матрица  $V = \{v_{ij}\} = [1] - ([1] - Z) * [P_{ij}] * \bar{P}_{jj}^t$  отражает последовательную связь  $i - j - \text{БУ}$ : Ее элемент  $v_{12} = 1 - (1 - z_{12}) \times \times p_{12}p_{22} = 1 - (1 - 0,041) \cdot 0,833 \cdot 0,99 = 0,209$ . Новая матрица  $Qx$  определяется по формуле  $x = \bar{Q}_2^*/V$ . Следующая матрица получена транспонированием предыдущей. В частности,  $Qx_{21} = Q_2^*/v_{12} = 0,0119 / 0,209 = 0,0569$ .

После трех итераций получено:  $Q^* = \{0,0055; 0,0073; 0,0073\}$ ;  $Q = \{0,0552; 0,0172; 0,0172\}$ . Вероятности  $Q^*$  больше вероятностей, полученных простым произведением вероятностей отказа инцидентных связей (с учетом отказа смежных узлов)  $\{0,00426; 0,00556; 0,00556\}$ , т. е. они действительно учитывают ненадежность внешней сети. Однако утверждать, что внешняя сеть учитывается в полной мере, нельзя, поскольку в математической модели заложено допущение о независимости путей от БУ до смежных узлов, которое не совсем соответствует реальности. Таким образом, предложенная расчетная процедура является улучшением нижней оценки вероятностей отказа узлов.

*Интенсивности отказов* вычисляются согласно структурной формуле (3.1) по аналогии с вероятностями, но после определения вероятностей отказов эквивалентных связей. Напомним некоторые основные соотношения между ПН элементов. Если известна вероятность отказа, то относительная длительность отказа  $\gamma = q/p$ . Также  $\gamma = \lambda/\mu$ . В последовательной структуре  $\lambda_\Sigma = \sum \lambda_i$ ,  $p_\Sigma = \prod p_i$ . В параллельной структуре  $\mu_\Sigma = \sum \mu_i$ ,  $q_\Sigma = \prod q_i$ .

Согласно параллельно-последовательной структуре эквивалентной схемы замещения (см. рис. 3.2) результирующая интенсивность отказов параллельной структуры

$$L_i^* = \gamma_i \mu_i = \gamma_i \sum_k \mu_{i(k)} = \gamma_i \sum_k \frac{\lambda_{i(k)}}{\gamma_{i(k)}},$$

где индекс  $i(k)$  означает путь от ИП до узла  $i$  через узел  $k$  (последовательно соединенные элементы: эквивалентная связь  $x_k$ , узел  $k$ , реальная связь  $ik$ ). Отсюда результирующая интенсивность отказа электроснабжения узла  $i$ :

$$L_i = \lambda_{ii} + L_i^* = \lambda_{ii} + \frac{Q_i^*}{P_i^*} \sum_{k \in \Gamma_i} (\lambda_{xk} + \lambda_{kk} + \lambda_{ik}) \frac{p_{ik} p_{kk} p_{xk}}{1 - p_{ik} p_{kk} p_{xk}}, \quad (3.10)$$

где  $p_{i(k)} = p_{ik} p_{kk} p_{xk}$  – вероятность безотказной работы упомянутой последовательной структуры.

Интенсивности эквивалентных связей, соответствующих узлу  $i$ , определяются из уравнений, отражающих структурные соотношения (3.3) для интенсивностей отказов смежных узлов. При этом за основу принимается эквивалентная схема (см. рис. 3.2) для узла  $i$ . Согласно этой схеме каждый узел  $j \in \Gamma_i$  связан с ИП через связь  $x_j$  и через узел  $i$ , который, в свою очередь, связан с ИП через упомянутую параллельную совокупность последовательных структур, за исключением пути через узел  $j$ :

$$L_j^* = \gamma_j^* (\mu_{xj} + \mu_{j(i)}) = \gamma_j^* \left( \frac{\lambda_{xj}}{\gamma_{xj}} + \frac{\lambda_{i/j} + \lambda_{ii} + \lambda_{ij}}{\gamma_{j(i)}} \right), \quad (3.11)$$

где относительная длительность отказа пути до узла  $j$  через узел  $i$   $\gamma_{j(i)} = q_{j(i)}/p_{j(i)} = (1 - p_{ij} p_{ii} p_{i/j}) / (p_{ij} p_{ii} p_{i/j})$ ;  $\lambda_{i/j}$ ,  $p_{i/j}$  – соответственно интенсивность отказа и вероятность безотказной работы узла  $i$  при условии отсутствия связи с узлом  $j$ .

На первый взгляд, интенсивности отказов эквивалентных связей могут быть просто определены из соотношения (3.11). Однако в данном выражении от  $\lambda_{xj}$  функционально зависят как  $\lambda_{i/j}$ , так и результирующие интенсивности отказов узлов. Следовательно, двойную итерационную процедуру можно применить не только к вероятностям, но и к интенсивностям отказов. Внешний итерационный цикл применяется к результирующим интенсивностям отказов узлов, а внутренний – к интенсивностям отказов эквивалентных связей.

Из соотношения (3.11) может быть выражена интенсивность эквивалентной связи, а следовательно, и получено рекуррентное соотношение метода простой итерации:

$$\lambda_{xj}^{(r+1)} = \left( \mu_j^{*(k)} - \mu_{j(i)}^{(r)} \right) \gamma_{xj} = \left[ \frac{L_j^{*(k)}}{\gamma_j^*} - \frac{\lambda_{i/j}^{(r)} + \lambda_{ii} + \lambda_{ij}}{\gamma_{j(i)}} \right] \gamma_{xj}; \quad (3.12)$$

$$L_i^{*(k)} = \gamma_i^* \sum_{k \in \Gamma_i} \mu_{i(k)} = \gamma_i^* \sum_{k \in \Gamma_i} \frac{\lambda_{xk}^{*(k)} + \lambda_{kk} + \lambda_{ik}}{\gamma_{i(k)}}.$$

Интенсивность отказа узла  $i$  при условии отсутствия пути через узел  $j$  определяется из выражения (3.10), которое можно записать через интенсивности восстановления параллельной структуры, т. е.

$$\mu_i^* = \mu_{i(j)} + \mu_{i/j} = \mu_{i(j)} + \frac{\lambda_{i/j}^*}{\gamma_{i/j}^*}, \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{i(k)} &= \frac{\lambda_{i(k)}}{\gamma_{i(k)}}; & \lambda_{i(k)} &= \lambda_{xk} + \lambda_{kk} + \lambda_{ik}; \\ \gamma_{i(k)} &= \gamma_{xk} + \gamma_{kk} + \gamma_{ik}; & \gamma_{i/j}^* &= \frac{q_{i/j}^*}{1 - q_{i/j}^*}; \\ q_{i/j}^* &= \prod_{k \in \Gamma_i, k \neq j} q_{i(k)}; & q_{i(k)} &= 1 - p_{xk} p_{kk} p_{ik}. \end{aligned}$$

Из выражения (3.13) определяется

$$\lambda_{i/j}^{*(r)} = \gamma_{i/j}^{*(k)} \left( \mu_i^{*(k)} - \mu_{i(j)}^{(r)} \right).$$

**Пример 3.2.** Для сравнения описанных методов рассмотрена электрическая схема (см. рис. 3.1) с исходными данными по связям, представленными в табл. 3.3, где  $N$ ,  $K$  – соответственно номера узлов, начала и конца связи,  $q$ ,  $\lambda$  – вероятность и интенсивность отказа связи. Исходные и результирующие данные по узлам представлены в табл. 3.4. Длительность расчетов рассматриваемого примера на ЭВМ с процессором Intel-i3 меньше 0,1 с для всех методов.

Таблица 3.3

Исходные данные по связям

$N$	1,0	1,0	1,0	2,0	2,0	2,0	3,0	4,0	4,0	5,0
$K$	13,0	2,0	3,0	13,0	3,0	9,0	4,0	5,0	7,0	6,0
$q$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$\lambda$	1,0	2,0	1,5	1,0	2,0	1,5	1,0	2,0	1,5	1,0
$N$	5,0	6,0	6,0	7,0	9,0	9,0	9,0	10,0	10,0	11,0
$K$	8,0	7,0	8,0	8,0	10,0	11,0	12,0	11,0	12,0	12,0
$q$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$\lambda$	2,0	1,5	1,0	2,0	1,5	1,0	2,0	1,5	1,0	2,0

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом примере отличие по результирующим вероятностям отказов не превышает 4 %, в то время как отличие по интенсивностям отказов более значительно — 8,5 % для узла 8 в методе декомпозиции и 13,8 % для узла 6 в итерационном методе. За основу для сравнения принят метод преобразования треугольника в звезду.

Во всех сравниваемых методах использовалась процедура исключения-восстановления узлов ранга 1, 2. Как отмечалось выше, восстановление узлов ранга 2 основано на эквивалентировании, поэтому погрешность эквивалентирования присутствует во всех расчетных процедурах.

Оценивая итоги расчетов, следует отметить, что все рассмотренные методы позволяют получить приемлемые для практического применения результаты. Наблюдаемое отличие не является критичным на фоне, как правило, большой неопределенности исходных данных (недостаточная статистика отказов реальных электротехнических устройств).

Таблица 3.4

Исходные и результирующие данные по узлам

Узел	Исходные данные		Треугольник-звезда		Декомпозиция		Итерационный	
	$q_{ii}$	$\lambda_{ii}$	$Q$	$L$	$Q$	$L$	$Q$	$L$
1	0,05	1,0	0,0673	1,59	0,067	1,59	0,067	1,591
2	0,07	2,0	0,0853	2,47	0,085	2,47	0,085	2,471
3	0,05	1,5	0,0881	3,12	0,088	3,12	0,088	3,123
4	0,07	1,0	0,2367	5,12	0,237	5,12	0,237	5,123
5	0,05	2,0	0,2878	7,90	0,289	8,24	0,277	7,341
6	0,07	1,5	0,3056	8,02	0,307	7,97	0,294	6,914
7	0,05	1,0	0,2878	6,97	0,285	7,01	0,277	6,334
8	0,07	2,0	0,3056	8,52	0,296	7,79	0,294	7,437
9	0,05	1,5	0,2179	5,47	0,218	5,47	0,218	5,471
10	0,07	1,0	0,2749	7,16	0,285	7,33	0,275	6,617
11	0,05	2,0	0,2594	8,21	0,270	8,33	0,259	7,613
12	0,07	1,5	0,2753	7,18	0,274	7,39	0,275	7,129

Как и ожидалось, в итерационном методе результирующие ПН меньше по сравнению с другими методами. Это объясняется принятым допущением о независимости путей электроснабжения узла по смежным связям, что не соответствует действительности. В частности, это замечание особенно значимо для узлов 5–8, каждый из которых имеет ранг 3, а следовательно, три независимых пути до ближайшего БУ (узел 4). В то же время в схеме для этих узлов существует значимое двухэлементное сечение (связи 4–5, 4–7), которое в итерационном методе не учитывается. Отсюда данный метод можно рассматривать как метод, дающий нижнюю оценку показателей отказа, и его можно рекомендовать для сильно связанных схем без двухэлементных сечений.

Метод декомпозиции достаточно точен, но может быть рекомендован только для практических расчетов относительно небольших схем – в общем случае в программной реализации этот метод приводит к переполнению стека (вложенные декомпозиции).

Монобазовая модель имеет ограниченную сферу применения, поскольку в общем случае допущение о независимости событий  $B_j$  приводит к

существенным ошибкам. Как показывают расчеты, удовлетворительные результаты имеют место для сильно развитых электрических схем, где каждый узел имеет по крайней мере два отличающихся всеми элементами пути до ИП (узлы с двусторонним питанием). Если принять, что МБМ имеет смысл применять только после предварительного исключения узлов ранга 1, 2 и (возможно) некоторых узлов ранга 3, то (с учетом районирования) расчетная схема принимает именно такой вид, и МБМ может быть рекомендована для практических расчетов.

Однако для многих расчетных схем (особенно с относительно большими вероятностями отказов элементов) МБМ имеет достаточно высокую погрешность расчета. Более общей и более точной, но и более сложной является описанная ниже полибазовая модель.

### 3.2.3. Полибазовая модель

В монобазовой модели есть некоторая нелогичность – исходные показатели надежности узлов из  $\Gamma_i$  определяются при условии отсутствия связи с узлом  $i$ , а базовый узел назначается при наличии этой связи. Развитием МБМ является полибазовая модель, согласно которой каждому узлу ставится в соответствие множество условных базовых узлов (УБУ). УБУ  $j/i$  – это базовый для узла  $j$  узел при условии отсутствия узла  $i$  (узел  $\beta$  на рис. 3.6). Отсюда следует, что одному и тому же узлу соответствует некоторое множество УБУ. Случай, когда совпадают все УБУ, сводится к МБМ.

Наряду с результирующими показателями надежности узла  $i$  здесь требуется определение условных показателей  $Q_{i/k}$ ,  $L_{i/k}$ ,  $\gamma_{i/k}$ . Это можно сделать повторением расчетной процедуры после отбрасывания той или иной связи, что для сильно связанной структуры приводит к большим затратам машинного времени. Существенную экономию времени дает процедура эквивалентирования полибазовой структуры к монобазовой. Так, например, граф на рис. 3.6 приводится к виду, представленному на рис. 3.7, где АБУ – абсолютный базовый узел.

Рассмотрим более детально данную процедуру эквивалентирования. По существу, она сводится к преобразованию последовательно-параллельного соединения к параллельной схеме. Для получения расчетных выражений рассмотрим подключение элемента  $x$  к обобщенному элементу  $c$  в исходной схеме (рис. 3.8) и элемента  $z$  к элементу  $d$  в эквивалентной схеме (рис. 3.9).

Критерием эквивалентности является равенство результирующих показателей надежности, что выражается логическим уравнением:

$$A_i = A_y + A_c A_x = A_d A_z.$$

Принимая во внимание, что  $A_d = A_c + A_y$ , получаем

$$A_y + A_c A_x = (A_c + A_y) A_z.$$

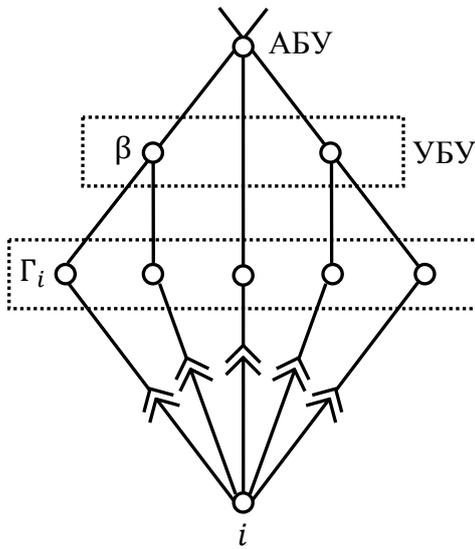


Рис. 3.6. Иерархическая структура УБУ

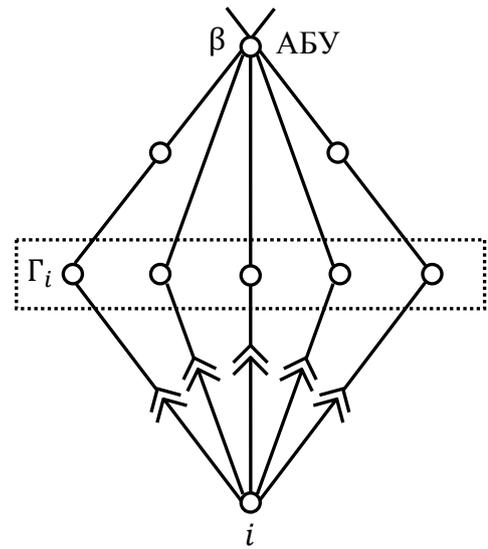


Рис. 3.7. Эквивалентный расчетный граф

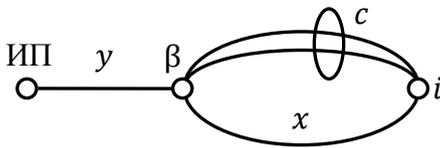


Рис. 3.8. Полибазовый граф

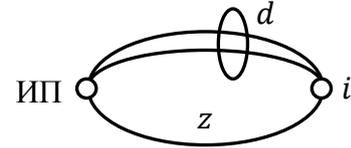


Рис. 3.9. Монобазовый граф

Для вероятности отказа последнее логическое соотношение представляется в виде:

$$q_y + p_y q_c q_x = (q_y + p_y q_c) q_z.$$

Отсюда

$$q_z = \frac{q_y + p_y q_c q_x}{q_y + p_y q_c}.$$

Интенсивность отказа

$$\lambda_y + \lambda_c q_x + \lambda_x q_c = (\lambda_c + \lambda_y) q_z + \lambda_z (q_c + p_c q_y).$$

Отсюда

$$\lambda_z = \frac{\lambda_x q_c + \lambda_y p_z + \lambda_c (q_x - q_z)}{q_c + p_c q_y}. \quad (3.14)$$

Относительная длительность восстановлений

$$\gamma_y + \frac{\gamma_c \gamma_x}{1 + \gamma_c + \gamma_y} = \frac{(\gamma_c + \gamma_y) \gamma_z}{1 + \gamma_c + \gamma_y + \gamma_z}.$$

Отсюда

$$\gamma_z = \frac{(1 + \gamma_c + \gamma_y) [\gamma_y (1 + \gamma_c + \gamma_x) + \gamma_c \gamma_x]}{\gamma_c (1 + \gamma_c)}. \quad (3.15)$$

Описанная процедура эквивалентирования позволяет на этапе определения  $Q_{i/k}$ ,  $L_{i/k}$ ,  $\gamma_{i/k}$  использовать формулы монобазовой модели. Для каждого узла из множества  $\Gamma_i$  можно построить генеалогическое дерево, где каждый родитель является БУ. Параметры надежности ветвей дерева определяются из составляющих последовательного соединения при известном результирующем показателе надежности второго составляющего. По отношению к рассматриваемому узлу генеалогическое дерево представляет собой параллельно-последовательную структуру, и определение искомых показателей надежности не является сложной процедурой. Однако для построения дерева требуется полная информация о родственных связях, поскольку наперед неизвестно, какие условные родители могут потребовать своего прародителя. Это вынуждает хранить матрицу БУ в полном объеме. Для реальных расчетных схем систем электроснабжения это становится затруднительным из-за большой размерности матрицы, а также из-за того, что наряду с полной матрицей УБУ требуются используемые в предыдущих математических моделях полные матрицы условных показателей надежности  $Q_{j/i}$ ,  $L_{j/i}$ ,  $\gamma_{j/i}$ .

Указанные факторы позволяют предложить упрощение полибазовой модели за счет того, что непосредственным условным родителям ставятся в соответствие не УБУ, а АБУ  $\beta$ , как в монобазовой модели. Поскольку между условными родителями имеется непосредственная связь через узел  $i$ , то все УБУ-родители имеют единственного абсолютного прародителя АБУ (необязательно ИП). В результате генеалогическое дерево можно представить состоящим из четырех уровней: ИП – прародитель; прародитель – условные родители; условные родители – узлы из  $\Gamma_i$ ; узлы из  $\Gamma_i$  – узел  $i$ . В представленной структуре для каждого узла необходимо хранить дополнительную информацию об УБУ, число которых равно числу связей данного узла.

Среди УБУ могут быть одинаковые, а также УБУ  $\beta$ . Обозначим множество УБУ, отличающихся от  $\Gamma_i$ , через  $s$ , а подмножество  $\Gamma_i$ , для которого УБУ совпадают с  $\Gamma_i$ , через  $K$ . Тогда условие отказа узла может быть записано в виде

$$A_i = A_{ii} + A_\beta + \prod_{s \in S} \left[ A_{s\beta} + \prod_{j \in \Gamma_i} (A_{ij} + A_{jj} + A_{js}) \right] \prod_{k \in K} (A_{ik} + A_{kk} + A_{k\beta}). \quad (3.16)$$

Случай, когда все УБУ, соответствующие  $\Gamma_i$ , совпадают, сводится к МБМ.

#### **Алгоритм расчета показателей надежности по полибазовой модели**

1. Ввод исходных данных и начальные присвоения.
2. Цепочечное отключение узлов ранга 1.
3. Исключение узлов ранга 2 с эквивалентированием последовательного соединения элементов.
4. Районирование с определением системы базовых узлов для каждого района.
5. Цикл по узлам района  $i = 1, \dots, n$

6. Выделение множества  $\Gamma_i$  узлов, непосредственно связанных с рассматриваемым.
7. Построение генеалогического дерева.
8. Вычисление результирующих ПН текущего узла по полибазовой модели с ее преобразованием в монобазовую и итерационным определением ПН эквивалентных связей.
9. Завершить итерационный процесс, если показатели надежности двух смежных итераций отличаются на величину, меньшую допустимой; в противном случае выполнить п. 8.
10. Пункты 8–9 выполнить для всех узлов района.
11. Методом эквивалентирования получить показатели надежности узлов ранга 2.
12. Вычислить показатели надежности исключенных узлов ранга 1.
13. Закончить процедуру расчета показателей структурной надежности ненаправленных графов с отказами элементов типа «обрыв».

Тестовые расчеты по полибазовой модели показали некоторое увеличение вероятности и интенсивности отказов узлов по сравнению с монобазовой моделью, что позволяет отдать ей предпочтение при разработке промышленных программных комплексов. Однако при этом существенно увеличивается сложность программных процедур. Поэтому для исследовательских целей ее применение нецелесообразно, поскольку остается основной недостаток итерационных процедур с эквивалентированием расчетных схем – допущение о независимости отказов смежных узлов.

### 3.2.4. Дополнительные расчетные процедуры

**Метод статистического моделирования**, как правило, используется в качестве эталонного при отсутствии иных, более точных математических моделей [17, 39, 40]. Здесь возможны два подхода: моделирование состояний элементов системы и моделирование процессов отказов элементов. И в том и другом случае используется генератор равномерно распределенных псевдослучайных чисел, который в зависимости от величины сгенерированного числа  $\eta$  идентифицирует либо состояние отказа (например, если  $\eta < q$ ), либо определяет момент  $T$  отказа (например, согласно условию  $1 - F(T) = \eta$ , где  $F(T)$  – функция распределения длительности безотказной работы элемента).

В первом случае на каждом из  $N$  испытаний моделируются состояния всех  $n$  элементов системы и выполняется анализ связности рассматриваемого узла  $i$  с ИП. Если связность нарушена, то фиксируется состояние отказа системы электроснабжения узла  $i$ . При достаточно большом числе испытаний можно считать, что результирующая вероятность отказа узла  $Q_i \approx K_i/N$ , где  $K_i$  – число отказов электроснабжения узла  $i$  при  $N$  испытаниях. Нетрудно увидеть, что точность расчетов тем больше, чем больше  $N$ .

При моделировании случайных процессов отказов на каждом испытании для всех элементов определяется последовательность моментов отказа и восстановления. При этом длительность восстановления также моделируется

согласно своей функции восстановления. Далее рассматриваемый период времени (например,  $T_p = 10$  лет) разбивается на элементарные участки неизменности состава работоспособных элементов (длительностью, например, 1 час) и на каждом участке анализируется связность электрической сети, фиксируется число  $K_i$  и длительность состояния отказа системы электроснабжения относительно каждого узла ЭЭС. Здесь  $Q_i \approx K_i / (NT_p)$ .

Поскольку для реальных элементов ЭЭС вероятность отказа  $q < 0,001$  и однократные отказы, как правило, не приводят к отказу электроснабжения (критерий  $n - 1$ ), то для появления события, связанного с единичным отказом электроснабжения, число испытаний  $N$  должно быть не меньше  $10^6$ . Для событий, определяемых отказами  $k$  элементов, число необходимых испытаний увеличивается до  $10^k$ . На современном этапе развития вычислительной техники это вызывает недопустимую для практических расчетов длительность расчетов.

Сделанное замечание относится и к моделированию случайных процессов. Однако здесь имеется возможность получить статистическую оценку всех остальных ПН (интенсивности отказов и восстановления, частоты отказов, длительности восстановления, коэффициенты готовности и неготовности). Значимым преимуществом данного метода является возможность прогноза отказов на ближайший период времени с учетом реального состояния элементов к началу интервала прогнозирования, что делает метод основным при анализе динамических процессов.

**Упрощенный метод пространства состояний** сводится к поиску стационарного решения на основе марковской модели случайных процессов [11, 27–32]. Полное пространство для системы из 8 элементов образуют  $2^8 = 256$  состояний. Пусть множество  $M$  образуют работоспособные состояния. Для получения результирующих ПН требуется составить систему уравнений стационарного состояния системы (см. п. 1.3) и определить вероятность работоспособности каждого элемента множества  $M$ . Однако решать систему из 256 уравнений представляется нецелесообразным [29]. Если принять допущение о том, что вероятность начального состояния  $P_0$  определяется произведением вероятностей работоспособного состояния всех элементов системы (что реально соответствует действительности), то вероятность любого состояния можно определить произведением  $P_0$  на относительные длительности отказов тех элементов, которые в рассматриваемом состоянии неработоспособны [1]. Результирующая вероятность отказов системы

$$Q = 1 - \sum P_i, \quad i \in M.$$

Результирующая интенсивность отказов анализируемой системы рассчитывается как интенсивность переходов из объединенного состояния работоспособности в состояния отказа:

$$L = \frac{\sum P_i \lambda_{ij}}{\sum P_i}, \quad i \in M.$$

Основная проблема здесь заключается в идентификации тех состояний, при которых возникает отказ системы электроснабжения. Кроме того, данный подход ориентирован на отдельный узел нагрузки. При его смене идентификацию состояний отказа системы придется выполнять заново. В результате описанный подход имеет узкую исследовательскую область применения и совершенно неприемлем для реальных электрических сетей большой размерности.

**Модифицированный метод минимальных сечений.** Выше было показано (см. п. 1.4.2), что основной проблемой использования метода минимальных путей и минимальных сечений является наличие общих элементов в совокупности сечений или путей, что приводит к многократным вложенным знакопеременным коррекциям определяемых вероятностей. Одним из простейших подходов для приближенной оценки надежности реальных технических устройств и систем является ограничение расчетного выражения в методе минимальных сечений только первой группой положительных составляющих. Отметим, что это совершенно недопустимо для метода минимальных путей, поскольку реально вероятность безотказной работы технических устройств во много раз больше, нежели вероятность их отказов. В результате первая группа положительных составляющих дает вероятность значительно больше единицы. Выражение для вероятности отказов в мостиковой структуре из четырех узлов, первый из которых является узлом питания, а четвертый – узлом нагрузки, относительно которого анализируется надежность системы электроснабжения, в упрощенном виде записывается структурной формулой:

$$Q_4 = q_{22}(q_{13} \oplus q_{33} \oplus q_{34}) \oplus q_{33}(q_{12} \oplus q_{22} \oplus q_{24}) \oplus \oplus q_{12}q_{13} \oplus q_{24}q_{34} \oplus q_{13}q_{23}q_{24} \oplus q_{12}q_{32}q_{34}.$$

В данном выражении параметры некоторых элементов, например ветвей 1–2, 2–4, входят одновременно в несколько слагаемых логической суммы. По этой причине численное значение  $Q_4$  выше действительного. Для того чтобы исключить зависимость между слагаемыми логической суммы, существует преобразование к неповторной форме [16]. Итоговое значение  $L_4$  здесь несколько точнее полученного простым суммированием интенсивностей отказов МС для исследуемой схемы. Дальнейшее снижение погрешности достигается следующим образом. Рассматриваются состояния отказа системы, соответствующие двухэлементным МС. Затем состояния работоспособности ограничиваются совокупностью состояний, которые непосредственно предшествуют отказу. Для сформированной таким образом диаграммы определяется интенсивность переходов в объединенное состояние неработоспособности (для схемы мостика):

$$L = [P_2(\lambda_{13} + \lambda_{33} + \lambda_{34}) + P_3(\lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{24}) + P_{12}(\lambda_{13} + \lambda_{33}) + P_{13}(\lambda_{12} + \lambda_{22}) + + P_{24}(\lambda_{33} + \lambda_{34}) + P_{34}(\lambda_{22} + \lambda_{24})] / (P_0 + P_2 + P_3 + P_{12} + P_{13} + P_{24} + P_{34}).$$

где  $P_i, P_{ij}$  – вероятности отсутствия отказа узлов и связей.

Результирующая частота отказов получается с учетом добавок от трехэлементных МС и собственных отказов узла 4. Полученные значения ПН соответствуют нижней оценке связности Эзари–Прошана [33].

### 3.3. Расчет ориентированных графов

Специфика ЭЭС определяется в основном действием системной автоматики, которая выполняет сложные коммутации схемы в зависимости от режима работы ЭЭС. Так, устройство автоматического ввода резерва (АВР) при исчезновении напряжения на шинах включает или шиносоединительный выключатель, или выключатель резервной магистрали. Таким образом, в нормальном режиме, например, секции *A* и *B* (рис. 3.10) не связаны между собой (выключатель *BC* отключен), а при определенной аварийной ситуации соединены. При этом по отношению к потребителю *C* подстанция с шинами *A*, *B* с точки зрения надежности ведет себя как система из двух параллельных связей (выключатель *BC* включен), в то время как по отношению к узлу *E* подстанция считается разомкнутой между узлами *A* и *B* (выключатель *BC* отключен). Такая неоднозначность функций вынуждает составлять свою расчетную схему для каждого узла ЭЭС, что приводит к большому объему подготовительных трудов и затрат машинного времени на выполнение расчетных работ.

Одним из путей, пригодных для учета некоторых специфических особенностей системной автоматики, является присвоение направленности ребрам расчетного графа. Действительно, если считать, что передача энергии в трансформаторе возможна только в одном направлении (от *E* к *A*, от *F* к *B*, от *G* к *D*), то при наличии связей между *A* и *B*, *C* и *D* это позволит учесть действие АВР по отношению к любому узлу расчетной схемы (рис. 3.11).

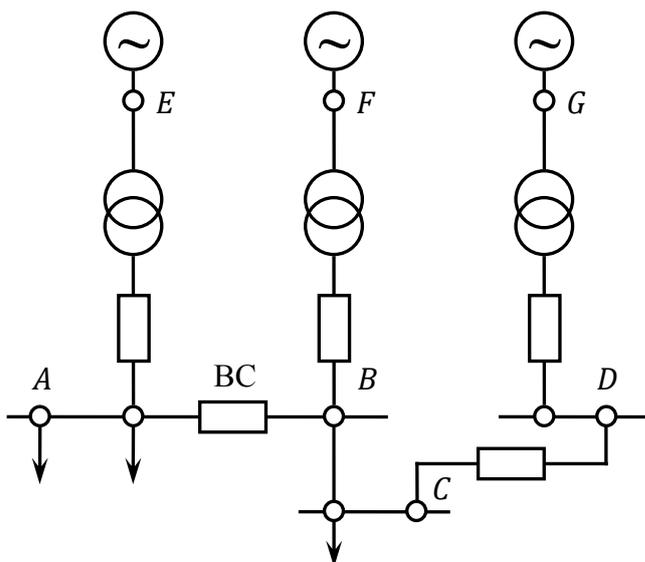


Рис. 3.10. Электрическая схема с резервированием

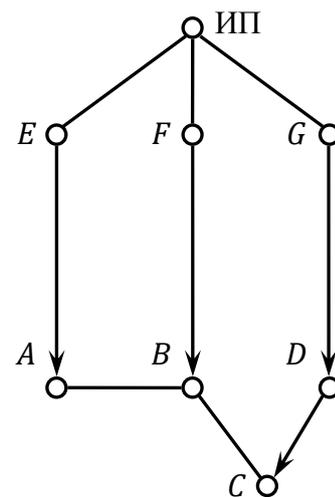


Рис. 3.11. Расчетный граф

Другим примером необходимости учета направленности связей является моделирование дополнительных ситуаций, например одновременных отказов нескольких узлов. Это реализуется введением некоторого фиктивно-

го узла, связанного с узлами анализируемой группы, направленными к фиктивному узлу, абсолютно надежными фиктивными связями. Направленность необходима для исключения влияния фиктивного узла на ПН узлов основной схемы – здесь не возможен транзит энергии через фиктивный узел.

**Определение показателей надежности ориентированного графа** по существу аналогично расчетам для неориентированного графа. Однако направленность ребер графа усложняет расчетную процедуру.

Если два последовательно или параллельно соединенных элемента графа одинаково направлены (рис. 3.12, а, в), то эквивалентный элемент имеет то же направление (рис. 3.12, б, г), а параметры его надежности определяются формулами последовательного или параллельного соединения для ненаправленных графов. Если последовательные элементы направлены в сторону соединяющего их узла и имеют противоположное направление (рис. 3.13, а), то в задачах электроэнергетики, где рассматриваются потоки электроэнергии, соединение двух противоположно направленных элементов с позиции транзита мощности, эквивалентно разрыву цепи (рис. 3.13, б).

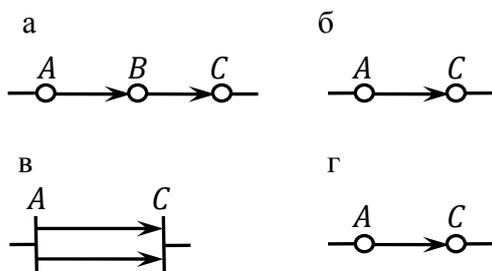


Рис. 3.12. Эквивалентирование однонаправленных связей

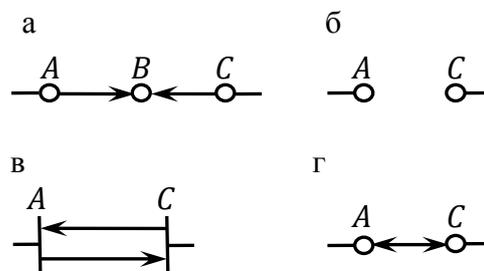


Рис. 3.13. Эквивалентирование разнонаправленных связей

Эквивалент параллельно соединенных противоположно направленных элементов (рис. 3.13, в) считается двухсторонне направленным (рис. 3.13, г), причем параметры надежности каждого из направлений совпадают с параметрами надежности соответственно направленной ветви. Отсюда ветвь графа двухсторонней направленности можно рассматривать как параллельное соединение двух ветвей противоположной направленности. Расчет параметров надежности двух параллельных ветвей двухсторонней направленности заключается в применении формул параллельного соединения для неориентированных графов к каждому из направлений в отдельности.

Двунаправленная структура (рис. 3.13, г) с отличающимися ПН в разных направлениях предполагает ее дальнейшее использование в последовательно-параллельных преобразованиях. При этом не должен исключаться частный случай, когда ее представляет абсолютно надежная однонаправленная ветвь. Спрашивается, какими должны быть ПН однонаправленной связи  $\alpha$  при ее представлении в виде двунаправленной структуры?

Если прямое направление не вызывает вопросов – теми же, что и ПН связи,  $\lambda_\alpha^p = \lambda_\alpha$ ,  $\mu_\alpha^p = \mu_\alpha$ ,  $\gamma_\alpha^p = \gamma_\alpha$ ,  $q_\alpha^p = q_\alpha$ ,  $p_\alpha^p = p_\alpha$ , – то для обратного направления, в котором передача энергии невозможна, требуются такие величины  $q_\alpha^n$ ,  $p_\alpha^n$ ,  $\lambda_\alpha^n$ ,  $\mu_\alpha^n$ ,  $\gamma_\alpha^n$ , которые бы не нарушали основные соотношения по-

следовательно-параллельных преобразований. Резонно предположить, что  $q_\alpha^n = 1$ ,  $p_\alpha^n = 1 - q_\alpha^n = 0$ . Действительно, при последовательном соединении с некоторой связью  $\beta$  произвольной направленности

$$p_e = p_\beta p_\alpha^n = 0; \quad q_e = q_\alpha^n + p_\alpha^n q_\beta = 1.$$

При параллельном соединении

$$q_e^n = q_\beta q_\alpha^n = q_\beta; \quad p_e^n = p_\alpha^n + p_\beta q_\alpha^n = p_\beta.$$

Принимая во внимание, что вероятностям отказа и безотказной работы соответствуют коэффициенты неготовности  $K_H = \gamma/(1 + \gamma)$  и готовности  $K_G = 1/(1 + \gamma)$ , при  $K_G = 0$  получаем  $\gamma_\alpha^n = \infty$ . При параллельном соединении эквивалентная интенсивность восстановления равна сумме составных интенсивностей восстановления. При этом в направлении, в котором передача энергии по связи  $\alpha$  невозможна, интенсивность восстановления должна остаться равной  $\mu_\beta$ . Отсюда  $\mu_\alpha^n = 0$ . Интенсивность отказов можно принять равной бесконечности  $\lambda_\alpha^n = \infty$ , поскольку это не противоречит условию  $\gamma_\alpha^n = \lambda_\alpha^n / \mu_\alpha^n = \infty$ . Однако непосредственный расчет по формуле  $\lambda_\alpha^n = \gamma_\alpha^n \mu_\alpha^n$  приводит к неопределенности типа  $\infty \cdot 0$ . Отсюда величина  $\lambda_\alpha^n = \infty$  должна назначаться алгоритмически, например, согласно условию:  $\lambda_\alpha^n = \infty$  при  $K_{G\alpha}^n = 0$ .

Введенные ПН обратного направления не противоречат соотношениям последовательно-параллельных преобразований. Действительно, при последовательном соединении элементов

$$\lambda_e = \lambda_\beta + \lambda_\alpha^n = \lambda_\beta + \infty = \infty; \quad \gamma_e = \gamma_\beta + \gamma_\alpha^n = \gamma_\beta + \infty = \infty.$$

При параллельном соединении элементов

$$\mu_e = \mu_\beta + \mu_\alpha^n = \mu_\beta + 0 = \mu_\beta; \quad K_{H\alpha} = K_{H\alpha}^n K_{H\beta} = 1 \cdot K_{H\beta} = K_{H\beta}.$$

Таким образом, при представлении однонаправленной связи двунаправленной структурой следует принять  $\lambda_\alpha^n = \gamma_\alpha^n = \infty$ ,  $\mu_\alpha^n = 0$ ,  $q_\alpha^n = 1$ ,  $p_\alpha^n = 0$ .

**Преобразования «звезда – треугольник», «треугольник – звезда».** Для рассматриваемого преобразования неориентированных графов параметры надежности эквивалентных схем определялись исходя из опытов: питание со стороны одного из трех узлов и сток в одном из оставшихся узлов. При этом отмечалось, что перемена мест «источник» – «сток» не вносит изменения в определяемые показатели. В ориентированных схемах перемена мест источника питания и стока приводит к новому опыту, а следовательно, и к новой группе показателей надежности. Здесь вместо трех групп расчетных параметров надежности требуется формирование шести групп, поскольку каждая ветвь может обладать отличающимися для разных направлений показателями надежности (рис. 3.14).

В рассматриваемом случае при построении расчетных систем уравнений точно так же, как и в случае неориентированных графов, используются

формулы последовательных и параллельных соединений. В частности, для вероятностей отказов имеем:

$$\begin{aligned}
 q_{ao} + q_{ob} - q_{ao}q_{ob} &= C_{ab} = q_{ab}(q_{ac} + p_{ac}q_{cb}); \\
 q_{bo} + q_{oc} - q_{bo}q_{oc} &= C_{bc} = q_{bc}(q_{ba} + p_{ba}q_{ac}); \\
 q_{co} + q_{oa} - q_{co}q_{oa} &= C_{ca} = q_{ca}(q_{cb} + p_{cb}q_{ba}); \\
 q_{bo} + q_{oa} - q_{bo}q_{oa} &= C_{ba} = q_{ba}(q_{bc} + p_{bc}q_{ca}); \\
 q_{co} + q_{ob} - q_{co}q_{ob} &= C_{cb} = q_{cb}(q_{ca} + p_{ca}q_{ab}); \\
 q_{ao} + q_{oc} - q_{ao}q_{oc} &= C_{ac} = q_{ac}(q_{ab} + p_{ab}q_{bc}).
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

В преобразовании «треугольник – звезда» (определена левая часть уравнений (3.17)) система уравнений плохо обусловлена – при линейной аппроксимации (3.17) определитель матрицы коэффициентов при переменных близок к нулю.

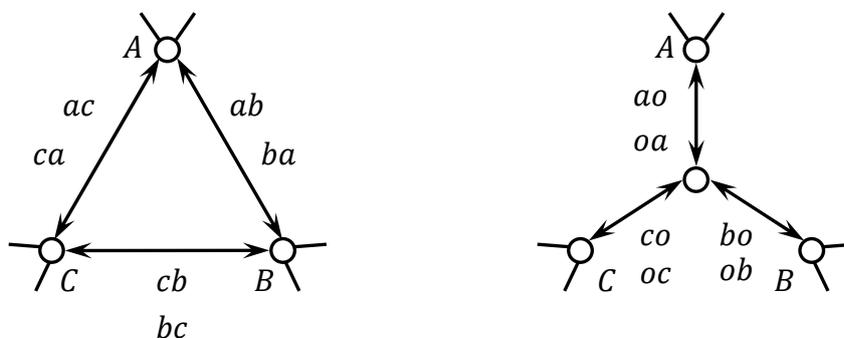


Рис. 3.14. Преобразование направленной структуры «треугольник – звезда»

Практические расчеты показывают, что при существенной несимметрии схемы наиболее эффективной для решения представленной системы уравнений является итерационная процедура метода Ньютона:

$$J^{(k)} \Delta q^{(k+1)} = -\Delta f^{(k)}, \tag{3.18}$$

где  $q = (q_{ao}; q_{bo}; q_{co}; q_{oa}; q_{ob}; q_{oc})^T$  – вектор искомых переменных;  $f$  – вектор невязок, представляющий разность левых и правых частей (3.17);  $J = \{\partial f_i / \partial q_j\}$  – матрица Якоби системы (3.17):

$$J = \begin{pmatrix} p_{ob} & 0 & 0 & 0 & p_{ao} & 0 \\ 0 & p_{oc} & 0 & 0 & 0 & p_{bo} \\ 0 & 0 & p_{oa} & p_{co} & 0 & 0 \\ 0 & p_{oa} & 0 & p_{bo} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{ob} & 0 & p_{co} & 0 \\ p_{oc} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{ao} \end{pmatrix}.$$

Однако при полной симметрии схемы определитель матрицы Якоби равен нулю (постолбцовая сумма одинакова для всех столбцов), в результате чего здесь также не существует решения системы уравнений (3.18). Даже при наличии относительно небольшой несимметрии вероятностей система (3.18)

является плохо обусловленной, поскольку реально вероятности отказов элементов малы (меньше 0,001, а вероятности безотказной работы практически равны единице) и определитель матрицы Якоби близок к нулю.

Одним из путей решения данной проблемы является отбрасывание в (3.18) одного из уравнений, например последнего, с последующим определением соответствующей переменной из системы (3.17). Следует заметить, что такой подход не гарантирует однозначности решения. При полной симметрии схемы следовало бы ожидать симметричного решения, но, как правило, оно не является симметричным. Не гарантируется здесь и получение решения: итерационный процесс часто является колебательно расходящимся. Поэтому процедура сокращения числа уравнений не может быть рекомендована для практических расчетов.

Проверочные расчеты показывают, что наиболее эффективными в решении (3.17) являются алгоритмы, основанные на применении методов нелинейного программирования. При этом уравнения (3.17) рассматриваются как система ограничений, что гарантирует симметрию решения при симметрии вероятностей сторон треугольника. В качестве целевой функции здесь можно принять максимальный абсолютный небаланс уравнений эквивалентности (или сумму квадратов невязок). Как правило, оптимизационная процедура обеспечивает достаточную надежность получения решения. Но и здесь при полной симметрии решение часто не может быть найдено с допустимой степенью точности за приемлемое число итераций.

Таким образом, при эквивалентном преобразовании «треугольник – звезда» необходима проверка на симметрию. Если вероятности отказа элементов треугольника одинаковы в обоих направлениях, то это свойство распространяется и на элементы звезды и для эквивалентирования следует использовать формулы, полученные для ненаправленных элементов (п. 2.2.3).

Плохая обусловленность системы уравнений распространяется и на интенсивности отказов, представленные в виде рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \lambda_{ao}^{(k+1)} + \lambda_{ob}^{(k+1)} &= L_{ab}^{(k)}, & \lambda_{oa}^{(k+1)} + \lambda_{bo}^{(k+1)} &= L_{ba}^{(k)}, \\ \lambda_{bo}^{(k+1)} + \lambda_{oc}^{(k+1)} &= L_{bc}^{(k)}, & \lambda_{ob}^{(k+1)} + \lambda_{co}^{(k+1)} &= L_{cb}^{(k)}, \\ \lambda_{co}^{(k+1)} + \lambda_{oa}^{(k+1)} &= L_{ca}^{(k)}, & \lambda_{oc}^{(k+1)} + \lambda_{ao}^{(k+1)} &= L_{ac}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В любом случае применимость преобразования «треугольник – звезда» для направленных расчетных схем требует дополнительного обоснования.

Более устойчивое решение (в тестовых расчетах отсутствия решения не наблюдалось) имеет место в преобразовании «звезда – треугольник». В частности, при несимметрии в лучах звезды и симметрии относительно узлов  $q_{ao} = q_{bo} = q_{co} = 0,1$ ,  $q_{oa} = q_{ob} = q_{oc} = 0,01$  вероятности отказа эквивалентных ветвей треугольника симметричны и равны  $q = 0,25$ . Однако при  $q_{ao} = 0,01$  симметрия нарушается и  $q_{ac} = q_{ab} = 0,037$ ;  $q_{ba} = q_{ca} = 0,18$ ;  $q_{bc} = q_{cb} = 0,516$ .

Решение имеет место и в том случае, когда невозможна передача энергии в одном из направлений (при  $q_{a0} = 1$  вероятности отказа ветвей треугольника  $q_{ac} = q_{ab} = 1$ ;  $q_{ba} = q_{ca} = 0,294$ ;  $q_{bc} = q_{cb} = 0,109$ ). Даже при двух запрещенных направлениях ( $q_{a0} = q_{b0} = 1$ ) существует решение  $q_{ac} = q_{ab} = 1$ ;  $q_{ba} = q_{ca} = 1$ ;  $q_{bc} = q_{cb} = 0,109$ . Таким образом, преобразование «звезда – треугольник» может быть рекомендовано для эквивалентных преобразований сложных направленных расчетных схем.

### Расчет направленной мостиковой структуры

На промежуточных этапах восстановления узлов второго ранга, как правило, выполняется определение ПН в мостиковой структуре (рис. 3.15–3.17). Погрешность результатов, полученных на данном шаге, определяющим образом влияет на итоговые ПН. Предварительные оценки, полученные с помощью традиционных в теории надежности электрических систем методов, не позволили определить приемлемые по точности значения искомых параметров. Это потребовало модификации существующих методов расчета.

Для сравнения результатов расчета была разработана тестовая схема с ветвями односторонней направленности (см. рис. 3.15). Исходные показатели надежности элементов тестовой схемы представлены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Исходные данные тестовой схемы

Узел	$q$	$\lambda$	Ветвь ( $\alpha\beta$ )	$q_{\alpha\beta}$	$\lambda_{\alpha\beta}$	$q_{\beta\alpha}$	$\lambda_{\beta\alpha}$
2	0,2	0,6	1–2	0,1	0,4	–	–
3	0,2	0,6	1–3	0,1	0,4	–	–
4	0,1	0,4	2–4	0,2	0,5	1,0	–
5	0,1	0,4	3–5	0,2	0,5	1,0	–
	–	–	2–3	0,1	0,5	0,1	0,5
	–	–	4–5	0,1	0,5	0,1	0,5

Тестовая схема:

- 1) является симметричной для пар узлов (2, 3) и (4, 5);
- 2) содержит ветви с односторонним пропуском электроэнергии (2–4) и (3–5).

Свойство симметрии может быть использовано для сравнения контрольных значений ПН для узлов 4, 5. В процессе вероятностных эквивалентных преобразований первым исключается узел 5, как узел ранга 2. В результате простого (ненаправленного) эквивалентирования последовательных элементов формируется новая связь 3–4, которой приписывается направленность связи 3–5, т. е. от узла 3 к узлу 4. Исключение узла 4 с разнонаправленными (в последовательной структуре 2–4–3) инцидентными ветвями и как конечного в цепи электрического питания узла согласно рис. 3.13, а, б выполняется его

простым отбрасыванием. Оставшаяся структура (узлы 1–3) образует неориентированный граф, в котором расчет ПН узлов не представляет затруднений.

На этапе восстановления узла 4 формируется мостиковая структура с направленными связями (см. рис. 3.16). При этом направленность связей 2–4, 3–4 для узла 4 не является значимой. Здесь могут быть успешно применены, например, метод декомпозиции (по связи 2–3) или преобразования треугольника (1–2–3) в звезду.

Некоторого пояснения требует метод эквивалентных вероятностных преобразований (с введением эквивалентных связей  $x$ ,  $y$ ), который можно применить как на этапе восстановления узла 4, так и (что более обосновано) на этапе восстановления узла 5 (см. рис. 3.17). Специфика ориентированного графа проявляется в том, что при определении ПН эквивалентных ветвей, которые можно считать неориентированными, отсутствует транзит энергии через восстанавливаемый узел 5. Это может потребовать некоторого дополнительного алгоритмического анализа.

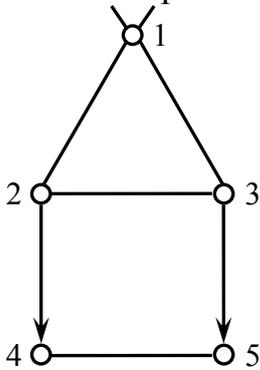


Рис. 3.15. Тестовая схема

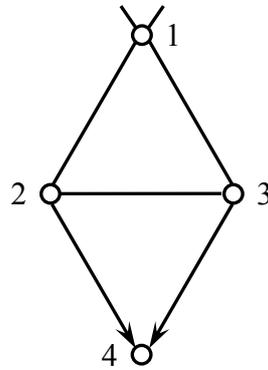


Рис. 3.16. Восстановление узла 4

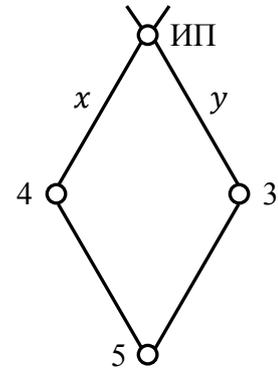


Рис. 3.17. Восстановление узла 5

Проблема заключается в том, что в неориентированном графе на этапе определения ПН эквивалентных связей ( $x$ ,  $y$ ) всегда присутствует связь между смежными узлами (в том числе через восстанавливаемый узел). В результате эквивалентирования в ПН эквивалентных связей ( $x$ ,  $y$ ) пусть с некоторой погрешностью, но будет учтена вся структура внешней сети, в том числе и одноэлементные, и двухэлементные сечения.

В ориентированном графе при отсутствии непосредственной связи между смежными узлами в качестве ПН эквивалентных связей ( $x$ ,  $y$ ) придется принимать результирующие ПН соответствующих смежных узлов. Эти ПН могут содержать существенную общую составляющую из-за возможных во внешней сети одноэлементных сечений. В результате внешние одноэлементные сечения не будут учтены в ПН восстанавливаемого узла. Это может привести к существенным погрешностям результирующих ПН. В рассматриваемом примере при восстановлении узла 4 этот фактор не проявляется, поскольку между узлами 2, 3 существует непосредственная неориентированная связь, а на этапе восстановления узла 5 проявляется лишь частично, поскольку существует односторонний ( $3 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ ) транзит энергии через восстанавливаемый узел 5. В результате расчета тестовой схемы с исходными данными, представленными в табл. 3.5, были получены следующие ПН узлов 4, 5:  $Q_4 = Q_5 = 0,272$ ;  $L_4 = L_5 = 1,436$  (1/год).

## Итерационная процедура расчета ПН направленного графа

Как было показано выше (п. 3.3), при расчете ПН сложной электрической схемы с узлами ранга 3 и выше достаточно эффективным является итерационный метод, согласно которому ПН текущего узла определяются при условии, что известны результирующие ПН смежных узлов. При этом реальная электрическая схема эквивалентуется к виду эквивалентных минимальных путей (см. рис. 3.2). Для схем с направленными связями можно принять ту же структуру – с симметричными эквивалентными связями  $x_j, \dots, x_\ell$  и реально направленными инцидентными связями  $i - j, \dots, i - \ell$ .

### Ранги узлов с инцидентными ветвями односторонней направленности

Если из узла  $i$  нет выхода (исключена возможность транзита мощности через рассматриваемый узел), то на этапе исключения данный узел рассматривается как узел ранга 1. Критерием идентификации такого узла может служить условие

$$\max \{direction_{ij}, j \in S_i\} < 0,$$

где  $S_i$  – множество смежных узлов; идентификатор  $direction_{ij}$  равен 1, если ветвь направлена от  $i$  к  $j$ ;  $-1$ , если направлена от  $j$  к  $i$ ; 0, если связь не односторонняя. Специфической особенностью направленных схем является то, что узлы, исключенные как узлы ранга 1, восстанавливаются как узлы реального ранга. В результате порядок восстановления узлов здесь не является обратным порядку их исключения.

### Моделирование элементов ЭЭС направленными связями

Одним из основных элементов ЭЭС, требующих введения направленности, является трансформатор. Теоретически трансформатор может передавать энергию в обоих направлениях как со стороны высокого, так и со стороны низкого напряжений. Однако трансформаторы, как правило, работают либо как повышающие, либо как понижающие, т. е. передают энергию только в одном направлении. Исключение составляют автотрансформаторы, которые могут работать в инверсном режиме.

Свойство однонаправленности потоков энергии в трансформаторах проявляется в том, что в номинальном коэффициенте трансформации учитываются потери напряжения в трансформаторе. Например, если понижающий трансформатор имеет номинальный коэффициент трансформации  $k_{тр} = 115/11$ , то при номинальной нагрузке, напряжении  $U_B = 115$  кВ, напряжении короткого замыкания  $u_k = 10\%$  вторичное напряжение составит  $U_H = (1 - u_k/100)U_B/k_{тр} = 0,9 \cdot 115/(115/11) = 9,9$  кВ, а при тех же  $U_H$ ,  $k_{тр}$  и обратной передаче электроэнергии  $U_B = (1 - u_k/100)U_H k_{тр} = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 115/11 = 93,1$  кВ, что совершенно неприемлемо для сети 110 кВ. Следовательно, для работы в реверсивном режиме коэффициент трансфор-

мации должен быть регулируемым и меняться в широких пределах. Это существенно удорожает трансформатор.

Другим фактором, определяющим энергетическую однонаправленность трансформаторов, является невозможность по сети пониженного напряжения пропускать те потоки энергии, которые характерны для сетей повышенного напряжения (линии электропередачи проектируются в зависимости от величины передаваемой энергии). Суммируя, можно констатировать, что трансформаторы режимно не предназначены для реверсивной работы и в расчетной схеме они должны рассматриваться как направленные связи.

**Трехобмоточные трансформаторы** (рис. 3.18–3.20) связывают электрические сети трех уровней напряжений, поэтому в расчетной схеме они должны быть представлены не менее чем трехузловой структурой. Приемлемой является схема замещения звезды, широко используемая в электрических схемах. В зависимости от направления потоков энергии возможны различные варианты схемы замещения. В частности, если энергия передается со стороны одного напряжения (например, 110 кВ) в электрические сети двух уровней напряжения (35, 10 кВ), то возможна схема замещения на рис. 3.19. Ветвь звезды со стороны питания (связь В) обладает всеми ПН, присущими трехобмоточному трансформатору в целом. Две другие ветви являются абсолютно надежными и направленными в сторону питаемых электрических сетей. Однако если питание потребителей осуществляется не только со стороны высокого, но и среднего напряжения, то в этом случае схема замещения должна иметь вид рис. 3.20. Здесь связь С является ненаправленной, а связь В направленной. Все связи абсолютно надежны. Показатели надежности трансформатора приписываются общему узлу звезды.

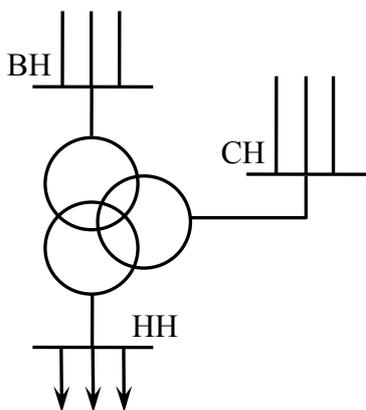


Рис. 3.18. Трехобмоточный трансформатор

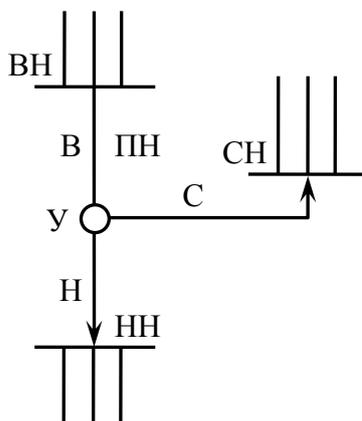


Рис. 3.19. Схема замещения 1

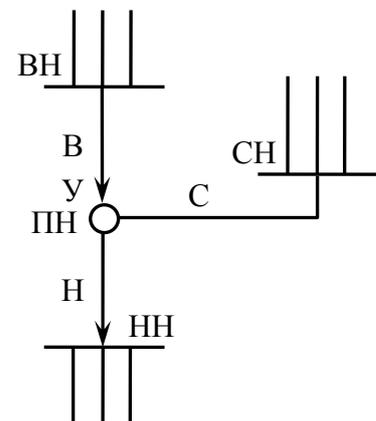


Рис. 3.20. Схема замещения 2

### Автотрансформаторы

Как было отмечено выше, автотрансформаторы (рис. 3.21) могут использоваться в реверсивном режиме. Отсюда связи, имитирующие общую и последовательную обмотки, должны быть ненаправленными. ПН автотрансформатора присваиваются общему узлу. В зависимости от режима обмотки низкого напряжения связь Н может быть направлена в сторону сети низкого

напряжения, если в этой сети нет источника питания (рис. 3.22), или в сторону общего узла, если к обмотке НН подключен генератор (рис. 3.23).

Трансформаторы, имеющие одностороннюю направленность, разделяют объединенную ЭЭС на подсистемы разного напряжения. При этом надежность электроснабжения питающей электрической сети не зависит от структуры питаемой сети. В результате возникают благоприятные условия для районирования (см. п. 3.1). Точки присоединения питаемой электрической сети к питающей сети могут рассматриваться как источники питания ограниченной надежности. Отсюда электрические сети разных напряжений могут рассматриваться отдельно. Это существенно снижает сложность структуры и повышает точность расчетов за счет меньшего использования приближенных процедур.

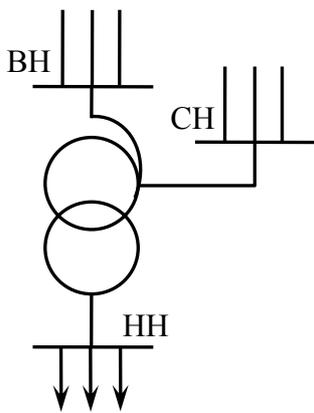


Рис. 3.21. Автотрансформатор

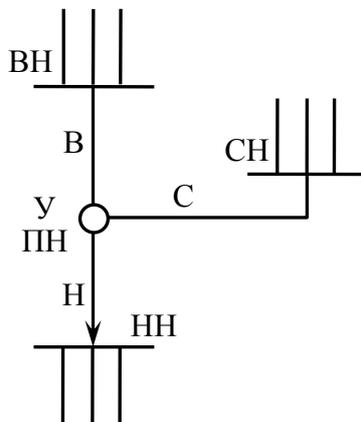


Рис. 3.22. Схема замещения 1

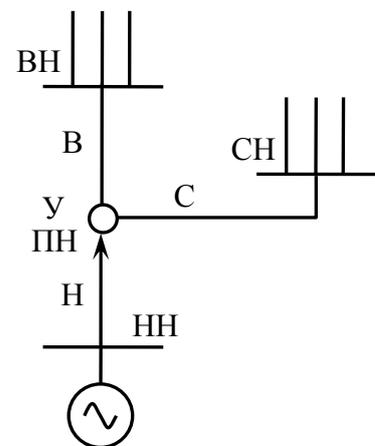


Рис. 3.23. Схема замещения 2

**АВР.** Электрическая сеть системы электроснабжения потребителей работает, как правило, в режиме радиальной структуры с отключенными секционными выключателями (рис. 3.24, а). Их включение осуществляется системой автоматического ввода резерва, которая срабатывает при исчезновении напряжения (отказ электроснабжения) на одной из секций. Поскольку длительность оперативных переключений здесь чрезвычайно мала, то это эквивалентно наличию пути до источника питания через соседнюю секцию. Отсюда отключенный секционный выключатель при наличии АВР в расчетной схеме может рассматриваться как включенный (рис. 3.24, б), обеспечивающий резервирование системы электроснабжения.

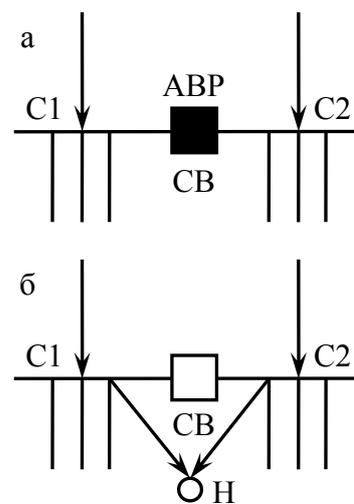


Рис. 3.24. Моделирование АВР и одновременных отказов

**Одновременные отказы.** Часто инженера интересуют не только индивидуальные, но и совместные отказы узлов системы электроснабжения. Введение фиктивных узлов, связанных с анализируемыми узлами ветвями односторонней направ-

ленности, позволяет решить поставленную задачу. На рис. 3.24, б таким узлом является узел Н, моделирующий одновременный отказ двух секций распределительного устройства.

### **Сопоставление расчетных процедур для ориентированного расчетного графа**

Для сопоставления были выбраны следующие методы: статистическое моделирование; пространства состояний; модифицированных минимальных сечений; декомпозиции. В качестве тестовой рассматривалась схема с ориентированными связями, представленная на рис. 3.15. Упомянутые методы рассмотрены в п. 3.4. Результирующие ПН узла 4 для тестовой схемы содержатся в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Сопоставление математических методов расчета ПН узла 4

Метод расчета	$Q_4$	$L_4$	Погрешность, %	
			по $Q$	по $L$
Контрольный результат	0,2721	1,4363	–	–
Статистическое моделирование	0,2763	1,4331	1,5	0,4
Пространства состояний	0,2783	1,4924	2,2	3,7
Минимальных сечений	0,2843	1,3702	4,3	4,6
Декомпозиции	0,2843	1,5321	4,3	6,2
Эквивалентных преобразований	0,2802	1,5118	3,0	5,2

Метод статистических испытаний, самый точный априори, вряд ли может быть рекомендован к применению из-за значительного времени счета. Оставшиеся три метода имеют практически равнозначные характеристики по точности, но в силу большей универсальности и наименьшей длительности расчетов к программной реализации рекомендуется метод эквивалентных вероятностных преобразований.

### **3.4. Плановые отключения элементов ЭЭС**

Наряду с внезапными, непредвиденными отказами элементов ЭЭС типа «обрыв» в энергосистеме существуют преднамеренные отключения для проведения ремонтов, осмотров, ревизий, испытаний и других работ. Несмотря на то что и в том и в другом случае происходит отключение элемента, т. е. в структурном отношении данные события эквивалентны, по своим социально-экономическим последствиям и функционально-математическим свойствам аварийные и плановые отключения неодинаковы. Действительно, при плановом отключении принимаются меры по максимальному уменьшению возможного народно-хозяйственного ущерба, в то время как при аварийном отключении этого сделать нельзя. Кроме того, с целью уменьшения суммарного времени простоя последовательной цепи из элементов, не вклю-

чающих узлы питания или нагрузки (например, линия электропередачи и предназначенные для ее отключения выключатели), плановый ремонт всех элементов последовательной цепи, как правило, выполняется одновременно. Напомним, что аварийный отказ двух и более элементов последовательной цепи без узлов нагрузки считается невозможным и при повреждении одного из элементов отключается вся цепь.

Для увеличения надежности функционирования ЭЭС одновременный плановый ремонт параллельных связей не выполняется, в то время как одновременный аварийный отказ параллельных цепей возможен (например, падение опоры двухцепной линии электропередачи, взрыв выключателя с повреждением другого оборудования распределительного устройства). Все это требует учета специфики преднамеренных отключений элементов расчетной схемы при расчетах структурной надежности.

Дискуссия по вопросу учета профилактических ремонтов в расчетах надежности электроснабжения на страницах журнала «Электрические станции» обозначила два мнения о природе и способах моделирования данной особенности электрических систем. Авторы статьи, положившей начало дискуссии [57], высказали утверждение о детерминированности потока профилактических ремонтов. В свою очередь, многие считают, что преднамеренные отключения элементов электрических систем можно считать случайными событиями и учитывать данный фактор в расчетах надежности вероятностными методами [41].

Как это часто бывает, истина находится где-то посередине. Безусловно, необходимо учитывать специфику плановых отключений элементов, заключающуюся в том, что план разрабатывается, а не формируется спонтанно. При этом существуют критерии эффективности плана и учитываются реально существующие ограничения: допустимые сочетания планово отключаемых элементов, возможности ремонтной базы, обеспеченность запасными частями и др. В то же время, объем, а следовательно, и длительность ремонта имеют уже вероятностный характер. Кроме того, в задачах перспективного развития, где в большей степени необходим учет надежности структуры ЭЭС, из-за случайного характера многих ограничений, например той же обеспеченностью запасными частями, снижается определенность и увеличивается вероятностная сущность плана.

В методах вероятностного эквивалентирования за основу целесообразно принять второй из перечисленных подходов, но с учетом неизменности базовых плановых принципов, в частности, *устройство, отключение которого неизбежно при ремонте любого из его элементов, должно ремонтироваться целиком, а не поэлементно.*

Длительность плановых отключений элементов и периоды между обслуживаниями имеют случайный характер. В силу большого числа случайных факторов, определяющих эти величины, можно предположить (и статистический анализ это подтверждает), что они подчиняются нормальному распределению вероятностей. Однако при анализе структурной надежности ЭЭС они считаются распределенными по экспоненциальному закону. Допус-

тимостью такой замены принимается практически всеми исследователями [41]. Поскольку время безотказной работы элементов значительно больше времени ремонта, то многие стационарные показатели надежности практически не зависят от типа функции распределения длительности ремонта [42]. Поэтому предположение об экспоненциальности функции распределения длительности ремонта вполне приемлемо.

Существующие методы и алгоритмы расчета показателей надежности ЭЭС используют в основном два подхода к учету состояний системы. При первом аварийные и плановые отключения по существу равноценны по своей алгоритмической значимости и в преобразовании расчетной схемы участвуют совместно, без функционального различия. При этом специфика плановых ремонтов проявляется в расчетных формулах для определения параметров надежности элементов ЭЭС. При втором подходе плановые отключения моделируются отдельно – при плановом отключении каждого элемента определяются ПН аварийных отказов, которые затем комбинируются по некоторому алгоритму, учитывающему специфику плановых ремонтов. Второй подход связан с несоразмерно большими затратами машинного времени и его использование целесообразно лишь для относительно небольшого класса задач. Однако по мере увеличения потребности в расчетах надежности ЭЭС значимость второго подхода возрастает.

### 3.4.1. Последовательная организация учета плановых ремонтов

**Диаграмма состояний.** Выше было рассмотрено определение показателей надежности сложных схем с заданной структурой. Такая расчетная процедура может быть использована для каждой ремонтной схемы. При этом формируется некоторое множество ПН (по числу ремонтных схем). В данном параграфе рассматривается последний этап расчетов, где на основе полученных показателей с учетом вероятностей ремонтных режимов определяются интегральные результирующие показатели надежности узлов ЭЭС. Для этой цели построим промежуточную диаграмму состояний некоторого узла  $i$  в зависимости от ремонтного состояния элемента  $j$ .

Плановый ремонт элемента  $j$  (состояние П на рис. 3.25) в общем случае уменьшает надежность ЭЭС по отношению к узлу  $i$ , вследствие чего увеличивается вероятность аварийного отказа электроснабжения узла  $i$  (состояние АП: {АПН, АПП, АПА}). В результате выполнения восстановительных работ система переходит либо в состояние П, если аварийный ремонт оканчивается раньше планового, либо в состояние Н – состояние нормальной работы, если более раннее восстановление элемента  $j$  приводит к восстановлению системы электроснабжения по отношению к узлу  $i$ , либо в состояние АА, если восстановление элемента  $j$  не приводит к восстановлению узла  $i$ . В соответствии с указанными переходными состояниями состояние АП условно можно разделить на три несовместных состояния: АПП, АПН, АПА. Из состояния АА возможен переход только в состояние Н, поскольку плановый ремонт элемента закончен и устранена причина, вызвавшая отказ узла  $i$ . Диа-

грамма состояний, соответствующая описанной логической схеме переходов системы, изображена на рис. 3.25.

Интенсивности переходов системы из одного состояния в другое, как правило, априори неизвестны, но они могут быть определены, если известны математические ожидания и вероятности пребывания системы в каждом из упомянутых состояний. Для решения поставленной задачи рассмотрим разделение некоторого совокупного состояния  $A$  на множество подсостояний  $\{A_i\}$  с известными длительностями  $\tau_i$  и их последующее объединение с целью получения интенсивностей  $\mu_i$  перехода из объединенного состояния (рис. 3.26).

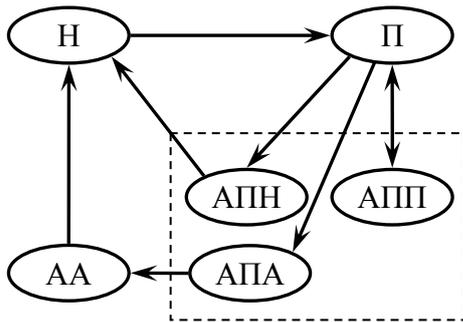


Рис. 3.25. Диаграмма переходов при плановых ремонтах

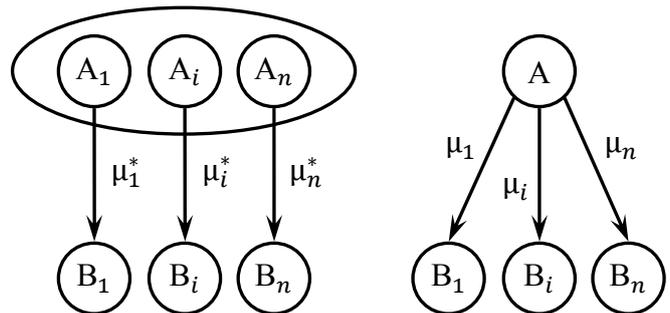


Рис. 3.26. Объединение состояний

Интенсивность выхода системы из подсостояния  $A_i$  обратно пропорциональна его длительности:  $\mu_i^* = 1/\tau_i$ . Согласно методу пространства состояний интенсивность перехода из объединенного состояния в состояние  $B_i$ :

$$\mu_i = \frac{\mu_i^* P_i}{\sum_{j \in A} P_j} = \frac{C_i}{\tau_i}, \quad (3.20)$$

где  $C_i = P_i / \sum_{j \in A} P_j$ .

Таким образом, для определения множества  $\{\mu_i\}$  интенсивностей перехода из объединенного состояния в некоторое множество внешних состояний следует знать распределение вероятностей по компонентам  $A$ . Отсюда для решения задачи об определении интенсивностей перехода из состояния АП в состояния П, Н, АА (соответственно  $\mu_{АПП}$ ,  $\mu_{АПН}$ ,  $\mu_{АПА}$ ) требуется вычислить средние длительности  $T_{АПП}$ ,  $T_{АПН}$ ,  $T_{АПА}$  подсостояний АП, АПН АПА и определить распределение вероятностей между ними.

**Длительности состояний.** В зависимости от момента  $x$  возникновения отказа системы при плановом ремонте элемента  $j$  возможны разные сочетания длительностей отдельных состояний. Если длительность планового ремонта равна  $z$ , а длительность аварийного восстановления  $s$  (рис. 3.27), то длительность состояния АП составляет либо  $z - x$ , если  $x$  меньше  $z$  и  $s$  больше  $z - x$  (аварийный отказ возник во время планового ремонта, и плановый ре-

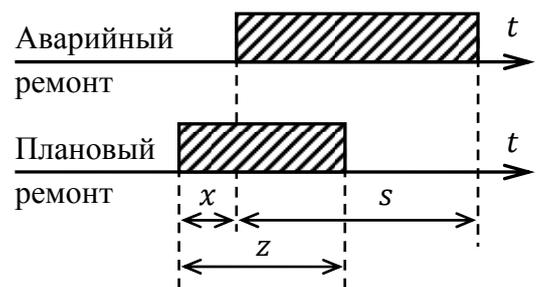


Рис. 3.27. Наложение аварийного и планового ремонтов

монт закончился до окончания аварийного восстановления), либо  $s$ , если  $s$  меньше  $z$  и  $x$  меньше  $z - s$  (период аварийного восстановления целиком вложен в период планового ремонта). Считая длительности планового и аварийного восстановления случайными величинами с заданными функциями распределений, можно определить математическое ожидание длительности состояния АП:

$$T_{АП} = \int_0^{\infty} f_{\Pi}(z) dz \int_0^z (z-x)P\{s \geq z-x\}f_0(x) dx + \int_0^{\infty} f_{\Pi}(z) dz \int_0^{\infty} sP\{s < z-x\}f_a(s) ds, \quad (3.21)$$

где  $f_{\Pi}(z)$ ,  $f_0(x)$ ,  $f_a(s)$  – плотности распределений случайных величин  $z$ ,  $x$ ,  $s$ . Плотности экспоненциальных распределений характеризуются соответственно параметрами  $\lambda$ ,  $\mu_{\Pi}$ ,  $\mu_a$ .

Первое слагаемое в (3.21), обозначим его  $J_1$ , связано с переходом системы из состояния АП в состояние Н, если плановое восстановление возобновляет работу системы электроснабжения потребителей, или АА, если не возобновляет. Отсюда  $J_1$  определяет сумму математических ожиданий  $J_1 = T_{АПН} + T_{АПА}$ . Подставляя экспоненциальные представления плотностей распределения, а также принимая во внимание, что  $P\{s \geq z-x\} = e^{-\mu_a(z-x)}$ , получаем

$$J_1 = \int_0^{\infty} \mu_{\Pi} e^{-\mu_{\Pi}z} dz \int_0^{\infty} (z-x)e^{-\mu_a(z-x)} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda \mu_{\Pi} (\lambda - \mu_{\Pi})}{(\lambda - \mu_a)^2 (\mu_{\Pi} + \mu_a)^2}.$$

Второй интеграл в (3.21) связан с переходом системы из состояния АП в состояние П, поскольку аварийное восстановление заканчивается раньше момента окончания планового ремонта ( $s < z - x$ ). Поэтому  $J_2$  определяет  $T_{АПП}$ :

$$J_2 = T_{АПП} = \int_0^{\infty} \mu_{\Pi} e^{-\mu_{\Pi}z} dz \int_0^z (z-x)e^{-\mu_a(z-x)} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda \mu_{\Pi}}{(\lambda - \mu_a)^2} \left[ \frac{\lambda - \mu_a}{(\mu_a + \mu_{\Pi})^2} + \frac{1}{\lambda + \mu_{\Pi}} - \frac{1}{\mu_a + \mu_{\Pi}} \right].$$

В результате длительность объединенного состояния:

$$T_{АП} = \frac{\lambda \mu_{\Pi}}{(\lambda - \mu_a)^2} \left[ \frac{2\lambda - \mu_a - \mu_{\Pi}}{(\mu_a + \mu_{\Pi})^2} + \frac{1}{\lambda + \mu_{\Pi}} - \frac{1}{\mu_a + \mu_{\Pi}} \right]. \quad (3.22)$$

Длительность состояния АА (см. рис. 3.27) составит  $x + s - z$  при условии, что  $x$  меньше  $z$  и  $s$  больше  $z - x$ . Отсюда

$$T_{АА} = \int_0^{\infty} d\Phi_{\Pi}(z) \int_0^z d\Phi_a(x) \int_{z-x}^{\infty} (x+s-z) d\Phi_a(s) = \int_0^{\infty} \mu_{\Pi} e^{-\mu_{\Pi}z} dz \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} dx \int_{z-x}^{\infty} \mu_a (x+s-z) e^{-\mu_a s} ds = \frac{\mu_{\Pi} \lambda}{\mu_a (\mu_a + \mu_{\Pi}) (\mu_{\Pi} + \lambda)}. \quad (3.23)$$

**Вероятности состояний.** Вероятность состояния АП определяется как условная вероятность того, что момент отказа  $x$  меньше  $z$  (см. рис. 3.27):

$$P_{\text{АП}} = \int_0^{\infty} \Phi_a(z) d\Phi_{\text{п}}(x) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda z}) \mu_{\text{п}} e^{-\mu_{\text{п}} z} dz = \frac{\lambda}{\mu_{\text{п}} + \lambda}. \quad (3.24)$$

Вероятность состояния АПП определяется как условная вероятность того, что  $x + s < z$ :

$$P_{\text{АПП}} = \int_0^{\infty} d\Phi_{\text{п}}(z) \int_0^z P\{s < z - x\} d\Phi_a(x) = \int_0^{\infty} \mu_{\text{п}} e^{-\mu_{\text{п}} z} dz \times \\ \times \int_0^z (1 - e^{-\mu_a(z-x)}) \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda \mu_a}{(\lambda + \mu_{\text{п}})(\mu_{\text{п}} + \mu_a)}. \quad (3.25)$$

Вероятность объединенного состояния АПН и АПА определяется как условная вероятность того, что  $x < z$  и  $s > z - x$ :

$$P_{\text{АПН}} + P_{\text{АПА}} = \int_0^{\infty} d\Phi_{\text{п}}(z) \int_0^z P\{s > z - x\} d\Phi_a(x) = \int_0^{\infty} \mu_{\text{п}} e^{-\mu_{\text{п}} z} dz \times \\ \times \int_0^z e^{-\mu_a(z-x)} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\mu_{\text{п}} \lambda}{(\mu_a + \mu_{\text{п}})(\mu_{\text{п}} + \lambda)}. \quad (3.26)$$

Нетрудно убедиться, что вычисленные вероятности удовлетворяют условию  $P_{\text{АПП}} + P_{\text{АПА}} + P_{\text{АПН}} = P_{\text{АП}}$ .

**Интенсивности переходов.** Полученные значения вероятностей позволяют вычислить коэффициенты  $C_{\text{АПП}}$ ,  $C^*$ , представляющие по существу условные вероятности пребывания системы в двух состояниях – АПП и объединенном {АПН и АПА} (см. рис. 3.25) – при условии появления события АП:

$$C_{\text{АПП}} = \frac{P_{\text{АПП}}}{P_{\text{АП}}} = \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_{\text{п}}}; \quad C^* = 1 - C_{\text{АПП}} = \frac{\mu_{\text{п}}}{\mu_a + \mu_{\text{п}}}.$$

Принимая во внимание, что интенсивность исхода из некоторого состояния обратно пропорциональна его длительности, получаем

$$\mu_{\text{АПП}} = \frac{1}{T_{\text{АПП}}} C_{\text{АПП}} = \frac{\mu_a}{(\mu_a + \mu_{\text{п}}) T_{\text{АПП}}}; \\ \mu_{\text{АПН}} + \mu_{\text{АПА}} = \frac{C^*}{T_{\text{АП}} - T_{\text{АПП}}} = \frac{\mu_{\text{п}}}{(\mu_a + \mu_{\text{п}})(T_{\text{АП}} - T_{\text{АПП}})}. \quad (3.27)$$

Получить интенсивности  $\mu_{\text{АПН}}$  и  $\mu_{\text{АПП}}$ , так же как и  $\mu_{\text{АПА}}$ , не представляется возможным, поскольку невозможно предопределить, произойдет ли восстановление электроснабжения рассматриваемого узла  $i$  при восстановлении элемента  $j$ . В то же время в процессе расчетов ПН можно определить вероятности  $Q_i$  и  $Q_{i/j}$  отказа электроснабжения узла при наличии и отсутствии элемента  $j$ , которые характеризуют влияние элемента  $j$  на надежность электроснабжения узла  $i$ . Разность вероятностей  $\Delta Q_i = Q_{i/j} - Q_i$  характеризует

влияние элемента  $j$  на надежность узла  $i$ . Учитывая, что  $\gamma_i = Q_i/(1 - Q_i)$ , относительное увеличение надежности узла  $i$  можно представить в виде:

$$\Delta Q_* = \frac{\Delta Q_i}{1 - Q_i} = \frac{Q_{i/j} - Q_i}{1 - Q_i} = \gamma_i \left( \frac{Q_{i/j}}{Q_i} - 1 \right),$$

что может служить оценкой условной вероятности перехода системы из состояния АП в состояние Н (считается, что переход осуществляется либо в состояние Н, либо в состояние АА). В предельном случае  $Q_{i/j} = Q_i$  (элемент  $j$  не оказывает влияния на узел  $i$ ),  $\Delta Q_* = 0$  и система неизбежно переходит в состояние АА. При  $Q_{i/j} = 1$  надежность узла  $i$  определяется состоянием элемента  $j$  ( $\Delta Q_* = 1$ ) и система неизбежно переходит в состояние Н. Принимая во внимание, что  $\mu_{АПН}$  составляет долю  $\Delta Q_*$  от суммы  $(\mu_{АПН} + \mu_{АПА})$  (3.27), получаем

$$\mu_{АПН} = \frac{\mu_{\Pi} \Delta Q_*}{(\mu_a + \mu_{\Pi})(T_{АП} - T_{АПП})}; \quad (3.28)$$

$$\mu_{АПА} = \frac{\mu_{\Pi}(1 - \Delta Q_*)}{(\mu_a + \mu_{\Pi})(T_{АП} - T_{АПП})}. \quad (3.29)$$

Поскольку состояние АА не является составным, то

$$\mu_{ААН} = \frac{1}{T_{АА}} = \frac{\mu_a(\mu_a + \mu_{\Pi})(\mu_{\Pi} + \lambda)}{\lambda \mu_{\Pi}}. \quad (3.30)$$

**Объединение состояний.** Диаграмма состояний после объединения событий АПП, АПН, АПА в единое АП представлена на рис. 3.28.

Состояния АП и АА одинаковы по своей физической сущности – они связаны с отказом рассматриваемого узла, поэтому вполне резонно объединить их в единое состояние А (рис. 3.29). Из диаграммы на рис. 3.28 следует

$$P_{АА} = \frac{\mu_{АПА}}{\mu_{ААН}} P_{АП}.$$

Интенсивность перехода из объединенного состояния А в состояние Н:

$$\mu_{АН} = \frac{\mu_{АПН} P_{АП} + \mu_{ААН} P_{АА}}{P_{АП} + P_{АА}} = \frac{\mu_{АПН} + \mu_{АПА}}{\mu_{ААН} + \mu_{АПА}} \mu_{ААН}. \quad (3.31)$$

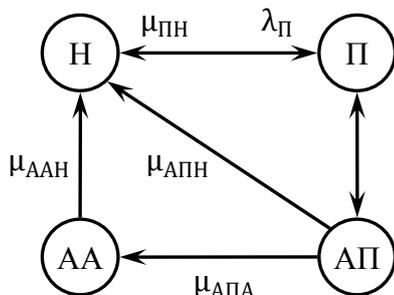


Рис. 3.28. Диаграмма с выделением аварийно-планового состояния

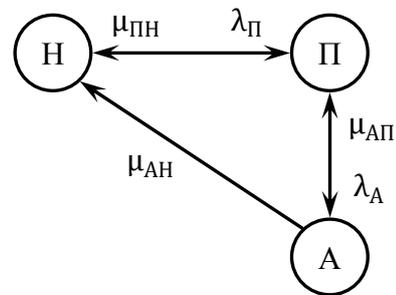


Рис. 3.29. Преобразованная диаграмма

Аналогично корректируется интенсивность перехода в состояние П:

$$\mu_{АП} = \frac{\mu_{АПП}P_{АП}}{P_{АП} + P_{АА}} = \frac{\mu_{ААН}\mu_{ААП}}{\mu_{ААН} + \mu_{АПА}}. \quad (3.32)$$

В результате система уравнений стационарного состояния, относящаяся к состояниям П, А, имеет вид:

$$P_A = \frac{\lambda_A}{\mu_{АП} + \mu_{АН}} P_{\Pi} = v_A P_{\Pi}; \quad P_{\Pi} = \frac{\lambda_{\Pi} P_H + \mu_{АП} P_A}{\mu_{\Pi H} + \lambda_A},$$

где  $v_A = \lambda_A / (\mu_{АП} + \mu_{АН})$ . Подстановка первого уравнения во второе позволяет выразить  $P_{\Pi}$  через  $P_H$

$$P_{\Pi} = v_{\Pi} P_H = \frac{\lambda_{\Pi}}{\mu_{\Pi H} + \lambda_A - v_A \mu_{АП}} P_H.$$

Диаграмму состояний (см. рис. 3.29) можно еще более упростить, если принять, что переход из состояния А в Н отсутствует (рис. 3.30). Критерием эквивалентности является равенство вероятностей состояний. Это потребует замены интенсивностей перехода. Согласно уравнениям стационарного состояния переход из состояния А в состояние П связан с интенсивностью  $\mu_A^* = \mu_{АП} + \mu_{АН}$ , а из П в А — с интенсивностью  $\lambda_A$ . Эквивалентная интенсивность перехода из Н в П остается прежней, равной  $\lambda_{\Pi}$ , а из П в Н

$$\mu_{\Pi}^* = \mu_{\Pi H} + \lambda_A - v_A \mu_{АП} = \mu_{\Pi H} + \frac{\lambda_A \mu_{АН}}{(\mu_{АП} + \mu_{АН})}.$$

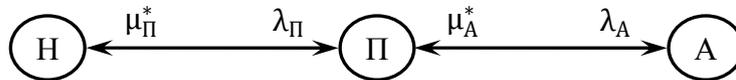


Рис. 3.30. Цепочная диаграмма с плановым состоянием

Для цепочной структуры диаграммы состояний процедура определения вероятностей состояний существенно упрощается. Это особенно ценно на этапе построения диаграммы состояний при большом числе плановых ситуаций. В частности,

$$P_H = 1 / (1 + \gamma_{\Pi} + \gamma_{\Pi} \gamma_A); \quad P_{\Pi} = \gamma_{\Pi} P_H; \quad P_A = \gamma_{\Pi} \gamma_A P_H,$$

где  $\gamma_{\Pi} = \lambda_{\Pi} / \mu_{\Pi}^*$ ;  $\gamma_A = \lambda_A / \mu_A^*$ .

На основании полученной упрощенной диаграммы можно построить результирующую, в которой отражена полная совокупность плановых отключений элементов (рис. 3.31).

Для каждого расчетного узла  $i$  указанные состояния целесообразно разделить на четыре группы — в зависимости от характера ограничения потребителя. Наиболее тяжелыми для потребителя отказами являются вне-

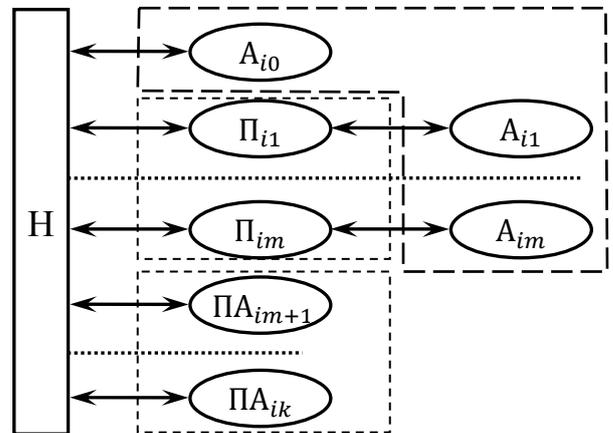


Рис. 3.31. Диаграмма состояний многоэлементных систем

запные отключения (множество  $A_i = A_{i0} \cup A_{ij}, j = 1, \dots, m$ ). Менее тяжелыми — отключения с заблаговременным предупреждением (множество  $PA_i = \bigcup_{j=m+1}^k PA_{ij}$ ). В следующую группу можно отнести состояния, уменьшающие в результате планового отключения элементов ЭЭС надежность электроснабжения узла  $i$ , но не приводящие к отказу рассматриваемого узла (множество  $\Pi_i = \bigcup_{j=1}^m \Pi_{ij}$ ). В четвертую группу выделяется исходное состояние, при котором нет отключений элементов ЭЭС (состояние Н).

Следует заметить, что отключение одного и того же элемента ЭЭС по-разному влияет на разные узлы. Поэтому диаграмма, имея характер структурной общности, относится к отдельному узлу. Кроме того, если плановое отключение некоторого элемента ЭЭС не изменяет вероятностных показателей рассматриваемого узла, то такое состояние относится к множеству Н.

Применение теории марковских процессов для стационарного состояния системы позволяет записать систему алгебраических уравнений, из которой легко могут быть найдены вероятности всех отмеченных состояний:

$$\begin{aligned} P_{i0} &= \gamma_{i0} P_H; \\ P_j &= \gamma_{\Pi j} P_H; \quad j = 1, \dots, m; \\ P_{ij} &= \gamma_{Aij} \gamma_{\Pi j} P_H; \quad j = 1, \dots, m; \\ P_s &= \gamma_{\Pi s} P_H; \quad s = m + 1, \dots, k, \end{aligned}$$

где  $\gamma_{i0}$ ,  $\gamma_{\Pi j}$ ,  $\gamma_{Aij}$ ,  $\gamma_{\Pi s}$  определяются в соответствии с выражениями, записанными выше.

Используя уравнение полной вероятности, получаем

$$P_H = \left( 1 + \gamma_{i0} + \sum_{j=1}^m \gamma_{\Pi j} + \sum_{j=1}^m \gamma_{\Pi j} \gamma_{Aij} + \sum_{s=m+1}^k \gamma_{\Pi s} \right)^{-1}.$$

Результирующие вероятности  $P_A$ ,  $P_{\Pi}$ ,  $P_{\Pi A}$  представляются в виде сумм:

$$P_A = P_H \left( \gamma_{i0} + \sum_{j=1}^m \gamma_{\Pi j} \gamma_{Aij} \right); \quad P_{\Pi} = P_H \left( \sum_{j=1}^m \gamma_{\Pi j} \right); \quad P_{\Pi A} = P_H \left( \sum_{s=m+1}^k \gamma_{\Pi s} \right).$$

При расчетах показателей структурной надежности ЭЭС большой интерес представляют не только и не столько вероятности определенных состояний ЭЭС, сколько частоты отказов и математические ожидания длительностей восстановления электроснабжения узлов ЭЭС.

Результирующая интенсивность  $L_{Ai}$  отказов узла определяется как средняя интенсивность переходов из состояний множеств  $\Pi$  и Н в состояния множества А. При этом усреднение выполняется с весами, равными вероятностям состояний, из которых выполняются переходы:

$$L_{Ai} = \frac{P_H \lambda_{i0} + \sum_{j=1}^m P_j \lambda_{ij}}{P_H + \sum_{j=1}^m P_j} = \frac{\lambda_{i0} + \sum_{j=1}^m \gamma_j \lambda_{ij}}{1 + \sum_{j=1}^m \gamma_j}. \quad (3.33)$$

По аналогии определяется интенсивность аварийного восстановления  $\mu_{Ai}$ . Отсюда средняя длительность аварийного восстановления (время пребывания узла в состоянии А)  $T_{Ai} = 1/\mu_{Ai}$ .

Формулы для определения  $L_{\Pi i}$ ,  $L_{\Pi Ai}$ ,  $T_{\Pi i}$ ,  $T_{\Pi Ai}$  имеют подобную (3.33) структуру:

$$L_{\Pi i} = \frac{P_H \sum_{j=1}^m \lambda_{\Pi i} + \sum_{j=1}^m P_{Aj} \mu_{ij}}{mP_H + \sum_{j=1}^m P_{Aj}}; \quad L_{\Pi Ai} = \sum_{s=m+1}^k \lambda_{\Pi As};$$

$$T_{\Pi i} = \frac{\sum_{j=1}^m \gamma_j}{\sum_{j=1}^m (\lambda_j + \lambda_{ij} \gamma_j)}; \quad T_{\Pi Ai} = \frac{\sum_{s=m+1}^k \gamma_s}{\sum_{s=m+1}^k \lambda_s}.$$

Полученные расчетные выражения позволяют записать следующий алгоритм определения результирующих показателей структурной надежности сложных ЭЭС с плановыми отключениями элементов:

1. Выполнить расчет показателей надежности электроснабжения узлов ЭЭС для исходной структуры  $(\lambda_{i0}, \mu_{i0}, \tau_{i0}, \forall i)$ .
2. Отключить очередной (из заданного множества) элемент  $j$  для выполнения планового восстановления. Определить показатели надежности для измененной структуры ЭЭС  $(\lambda_{ij}, \mu_{ij})$ . Вычислить расчетные значения  $\gamma_{\Pi}$ ,  $\gamma_A$ ,  $\{\gamma_j, \gamma_{ij}\}$ .
3. Для узлов с изменившимися ПН выполнить суммирование показателей с целью дальнейшего преобразования сумм:

$$SL_i := SL_i + \gamma_i \lambda_{ij};$$

$$S\gamma_i := S\gamma_i + \gamma_j;$$

$$S\gamma\gamma_i := S\gamma\gamma_i + \gamma_i \gamma_{ij},$$

причем для узлов с безусловным отказом (вероятность отказа равна единице) выполнить:

$$SL_i^* := SL_i^* + \lambda_j;$$

$$S\gamma_i^* := S\gamma_i^* + \gamma_j.$$

Процедуры 2, 3 выполняются для всех состояний ЭЭС, связанных с плановым отключением элементов, т. е. для всех вариаций плановых структур ЭЭС.

4. Используя полученные величины  $SL$ ,  $S\gamma$ ,  $S\gamma\gamma$ , выполнить расчет результирующих ПН для всех узлов ЭЭС:

$$P_{Hi} = \frac{1}{1 + S\gamma_i + S\gamma_i^* + \gamma_{i0} + S\gamma\gamma_i};$$

$$P_{\Pi i} = S\gamma_i P_{Hi};$$

$$P_{\Pi Ai} = S\gamma_i^* P_{Hi};$$

$$P_{Ai} = P_{Hi}(\gamma_{i0} + S\gamma\gamma_i);$$

$$L_{Ai} = \frac{\lambda_{i0} + SL_i}{1 + S\gamma_i};$$

$$T_{Ai} = \frac{P_{Ai}}{L_{Ai}};$$

$$L_{\text{ПА}i} = SL_i^*;$$

$$T_{\text{ПА}i} = \frac{S\gamma_i^*}{SL_i^*}.$$

Описанная расчетная процедура может быть использована не только при рассмотрении плановых ремонтов отдельных элементов, но и при любых других плановых отключениях (совместные отключения ряда элементов). При этом в качестве исходных данных должны быть заданы интенсивность появления и средняя длительность или вероятность данной плановой ситуации. В последнем случае расчеты упрощаются, поскольку параметры состояний отказа зависят только от вероятности предшествующего планового состояния.

Из недостатков подхода, связанного с последовательной организацией учета плановых ремонтов, следует отметить возрастающее пропорционально числу плановых ремонтов время расчетов. Кроме того, не всегда допустимо считать независимыми события преднамеренного отключения элементов последовательных цепей, так как на практике их обслуживание обычно выполняется одновременно. Преодоление последнего недостатка в рамках последовательной организации вычислений, в принципе, возможно, но требует дополнительной ручной работы на этапе подготовки расчетной схемы.

### 3.4.2. Параллельная организация учета плановых ремонтов

В случае параллельной организации расчетов все итоговые ПН вычисляются за один ход основной процедуры [13]. Данный подход свободен от недостатков последовательного способа учета преднамеренных отключений и поэтому чаще используется в расчетных моделях. При этом, как правило, принимается допущение о неограниченном ресурсе ремонтной базы [15, 26 и др.].

В основу описанных далее расчетных алгоритмов положено последовательно-параллельное эквивалентирование элементов расчетной схемы с учетом преднамеренных отключений. Разработано достаточно большое число аналитических моделей последовательно-параллельного эквивалентирования элементов с параметрами преднамеренных отключений. В то же время, применение их в составе автоматизированных процедур расчета оказалось недостаточно эффективным. В этой связи потребовалась определенная их доработка и модификация.

**Последовательное соединение элементов.** Рассматривается последовательная цепь элементов, каждый из которых характеризуется показателями преднамеренных отключений. Существует подход, когда в качестве эквивалентных показателей цепи предлагается использовать сумму аварийных час-

тот отказов всех элементов и одной, наибольшей по значению, интенсивности плановых отключений [13]. По аналогии определяется и эквивалентное среднее время восстановления цепи. Данный подход не всегда является удовлетворительным по следующим причинам:

- в результате вычисления по такому принципу определяется верхняя (максимально возможная) оценка эквивалентного времени восстановления. На самом деле в некоторых случаях этот показатель должен иметь меньшее значение. Примером может служить ситуация, когда наибольшие интенсивность и продолжительность преднамеренных отключений относятся к отличным элементам последовательной цепи;
- суммирование частот аварийных и плановых отключений последовательной цепи в некоторых случаях затрудняет учет специфики преднамеренных отключений элементов электрической системы на последующих этапах расчета.

Известна методика, основанная на понятиях «базисного» и «максимального» элемента [15]. Базисным считается элемент  $b$  последовательной цепи с наибольшим значением интенсивности преднамеренных отключений  $\lambda_{пл,b} = \max\{\lambda_{пл,j}\}$ , а максимальным – элемент  $m$  с наибольшим временем обслуживания  $\tau_{пл,m} = \max\{\tau_{пл,j}\}$ . Эквивалентная интенсивность плановых отключений определяется здесь сложением интенсивности отключений базисного элемента и суммы частот ремонтных состояний всех элементов последовательной цепи, умноженных на коэффициент  $k_{c,j}$  совпадения плановых отключений  $\lambda_{пл,e} = \lambda_{пл,b} + \sum_{j \neq b} k_{c,j} \lambda_{пл,j}$ . В качестве последнего выступает отношение числа отключений элемента, совпадающих с периодами обслуживания базисного, к общему числу преднамеренных отключений элемента. Эквивалентное время обслуживания цепи определяется как средневзвешенное с весами, равными частотам плановых отключений. При этом дается приоритет базисному и максимальному элементам.

Данная модель характеризуется прежде всего более достоверным моделированием планового обслуживания элементов. В то же время она получила весьма ограниченное применение. Дело в том, что при определении коэффициента совпадения необходимо всякий раз выполнять трудно формализуемый инженерный анализ допустимости относительных сдвигов тех или иных плановых отключений элементов.

Заслуживает внимания методика, основанная на понятии «ремонтного цикла» – наименьшего интервала времени, в течение которого производится целое число плановых ремонтов каждого элемента последовательной цепи [43]. Эквивалентные интенсивность и продолжительность преднамеренных отключений цепи определяются, соответственно, с учетом продолжительности ремонтного цикла и общего количества ремонтов в нем.

На базе идей ремонтного цикла разработана аналитическая модель, характеризующая большей степенью формализации и приспособленностью к автоматизированным расчетам. Изложение для простоты выполняется для случая двух элементов. Эквивалентная интенсивность плановых отключений

последовательной цепи из двух элементов определяется как максимальная из соответствующих элементов:

$$\lambda_{\text{экв,пл}} = \max\{\lambda_{1,\text{пл}}, \lambda_{2,\text{пл}}\}, \quad (3.34)$$

где  $\lambda_{1,\text{пл}}, \lambda_{2,\text{пл}}$  – интенсивности плановых отключений первого и второго элементов цепи (пусть в качестве примера  $\lambda_{1,\text{пл}} = 1, \lambda_{2,\text{пл}} = 0,8$ ).

Отсюда  $\lambda_{\text{экв,пл}} = \lambda_{1,\text{пл}}$ . На следующем шаге определяются межремонтные циклы элементов:  $T_1 = 1/\lambda_{1,\text{пл}}; T_2 = 1/\lambda_{2,\text{пл}}$  ( $T_1 = 1, T_2 = 1,25$ ). Поскольку  $T_1 < T_2$ , то выбирается такой интервал времени  $T$ , который удовлетворяет выражению  $T = kT_1$ , где  $k$  – наименьшее целое число, при котором  $T$  делится на цело на  $T_2$  ( $T = 5, k = 4$ ). В итоге, эквивалентное время планового обслуживания последовательной цепи из двух элементов рассчитывается по выражению

$$T_{\text{экв,пл}} = \frac{T_{\text{max}}(k - 1) + \max\{T_1, T_2\}}{k}, \quad (3.35)$$

где  $T_{\text{max}}$  – это длительность межремонтного периода элемента с максимальным значением интенсивности плановых отключений ( $T_{\text{экв,пл}} = (1 \cdot 3 + 1,25)/4 = 1,06$ ). Нетрудно убедиться, что для однотипных элементов  $T_{\text{экв,пл}} = T$ .

В ходе проверочных расчетов было установлено, что выражения (3.21), (3.35) обладают свойством ассоциативности. В частности, эквивалентные параметры цепи не зависят от количества однотипных элементов в ее составе. Это обстоятельство позволяет использовать полученные формулы для цепей, состоящих из произвольного количества элементов.

**Параллельное соединение элементов.** Известна модель параллельного эквивалентирования элементов с учетом плановых ремонтов [44].

Эквивалентная интенсивность отказов системы двух параллельно соединенных элементов с учетом преднамеренных отключений рассматривается как сумма частот следующих событий:

- одновременный отказ сразу двух элементов;
- отказ первого элемента во время планового обслуживания второго;
- отказ второго элемента во время планового обслуживания первого.

По этому же принципу определяется и средняя продолжительность неработоспособного состояния системы.

Более приемлемой для расчетов на ЭВМ представляется модель учета преднамеренных отключений системы параллельных элементов, построенная на основе марковских случайных процессов. Этот подход был использован, например, в [13]. Нами получено более точное решение системы уравнений, описывающих диаграмму состояний системы [45].

Рассматривается система из двух параллельно соединенных элементов, каждый из которых может находиться в трех состояниях: работоспособность, отказ и плановое обслуживание. Считаются известными интенсивности аварийных отказов ( $\lambda$ ), плановых отключений ( $\lambda^{\text{пл}}$ ), а также аварийного и планового восстановлений ( $\mu, \mu^{\text{пл}}$ ).

Диаграмма состояний элементов представлена на рис. 3.32. Здесь индекс Н соответствует нормальному режиму эксплуатации системы (в работе оба элемента), А – аварийному отказу, П – преднамеренному отключению элемента. Отказ системы наступает в состояниях  $\Pi_1 A_2$ ,  $\Pi_2 A_1$ ,  $A_1 A_2$ . Диаграмма более полно моделирует переходы системы из состояния отказа. Это отражает нередко реализуемую на практике возможность завершения планового обслуживания элемента (часто с сокращенным временем) при аварийных отказах резервирующих элементов.

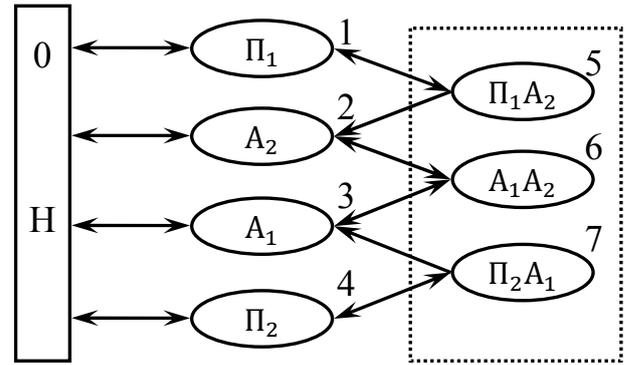


Рис. 3.32. Диаграмма состояний системы из двух параллельных элементов

Вероятности состояний 5 и 6 согласно диаграмме непосредственно не зависят от состояний 2 и 3 соответственно. Обобщая, можно считать, что результирующее состояние отказа системы из  $n$  параллельных элементов состоит из совокупности состояний с плановым ремонтом одного элемента и отказом системы без каких-либо плановых ремонтов. Определяя вероятность планового ремонта элемента как  $P_i^{пл} = \gamma_i^{пл} / (1 - \gamma_i^{пл})$ , а вероятность послеаварийного восстановления  $P_i^{ав} = \gamma_i^{ав} / (1 - \gamma_i^{ав})$ , получаем результирующую вероятность отказа системы:

$$Q_c = P^{ав} + \sum_{i=1}^n \left( P_i^{пл} \cdot \prod_{j \neq i} P_j^{ав} \right) = P^{ав} \left( 1 + \sum_{i=1}^n P_i^{пл} / P_i^{ав} \right), \quad (3.36)$$

где  $P^{ав} = \prod_{j=1}^n P_j^{ав}$ .

Результирующая интенсивность восстановления:

$$\mu_c = \frac{\mu^{ав} + \sum_{i=1}^n (\mu_i^{пл} + \mu^{ав} - \mu_i^{ав}) P_i^{пл} / P_i^{ав}}{1 + \sum_{i=1}^n P_i^{пл} / P_i^{ав}}, \quad (3.37)$$

где  $\mu^{ав} = \sum_{i=1}^n \mu_i^{ав}$ .

Частота отказов, равная частоте восстановлений:

$$f_c = \mu_c Q_c = \mu_c P^{ав} \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{P_i^{пл}}{P_i^{ав}} \right). \quad (3.38)$$

Интенсивность отказов целесообразно определять через частоту или интенсивность восстановлений:

$$\lambda_c = \frac{f_c}{(1 - Q_c)} = \mu_c \frac{Q_c}{(1 - Q_c)} = \mu_c \gamma_c. \quad (3.39)$$

### 3.5. Одновременный отказ ветвей расчетной схемы

В рамках вероятностного эквивалентирования разработаны специальные приемы для учета одновременных отказов ветвей расчетной схемы. Одной из возможных форм хранения и использования информации об элементах, входящих в состав группы одновременного отказа, являются коллекции или списки. Списки представляют собой перечень идентификаторов элементов, входящих в состав группы. Каждый список характеризуется своими вероятностными параметрами (интенсивность отказа и длительность восстановления).

Упомянутый массив коллекций часто называется матрицей одновременных отказов (МОО). Часто коллекции удобно представлять в виде обычной матрицы. Но и в этом случае в силу большой разреженности МОО наиболее предпочтительной формой ее организации являются связные списки. Связный список для некоторой ветви содержит идентификаторы связей, для которых характерен одновременный отказ с данной ветвью, и соответствующие ПН.

Важным моментом при организации процесса расчета ПН с учетом одновременных отказов является форма учета показателей одновременных отказов в статистических данных элементов, которые используются как исходные данные при расчете ПН сложной структуры. Здесь возможны два варианта – «в том числе» и «дополнительно». Например, интенсивность отказов ЛЭП 1 составляет 2, в том числе 0,5 при одновременных отказах с ЛЭП 2. Или же интенсивность одиночных отказов ЛЭП 1 составляет 2 и (дополнительно) 0,5 при одновременных отказах с ЛЭП 2. Учет специфики представления исходных данных необходим для избежания двойного учета одновременных отказов.

Существует два возможных подхода к учету фактора одновременных отказов – последовательный и параллельный. При последовательном подходе расчет ПСН рассматриваемой схемы выполняется столько раз, сколько имеется групп (списков, коллекций) одновременных отказов. Здесь при каждом отдельном расчете предварительно отключаются все элементы, входящие в состав группы. Полученные ПСН суммируются с весами, равными вероятностям отказа группы, по аналогии со схемой полной вероятностной группы (п. 1.3.5).

Последовательный подход используется преимущественно для учета таких множественных событий, как одновременный отказ проходящих по одной трассе линий электропередачи (пожар на просеке, гололед с ураганным ветром и др.); пожар на подстанции; пожар в кабельном канале; неправильные действия оперативного персонала, релейной защиты и системной автоматики; отключение нескольких агрегатов электрической станции, например, из-за прорыва плотины или пожара в машинном зале; диверсионные акты и др.

При параллельном подходе учет одновременных отказов осуществляется в рамках единой расчетной процедуры. Наиболее распространенным приемом здесь является замена реального фрагмента электрической схемы (рис. 3.33, *а*) некоторым эквивалентом, где одновременный отказ отражается в ПН некоторой дополнительной ветви (рис. 3.33, *б*) или узла. Однако если характеризующиеся одновременным отказом ветви не имеют общего узла,

например подключены к разным системам сборных шин, то подобное эквивалентирование может привести к существенной погрешности расчетов.

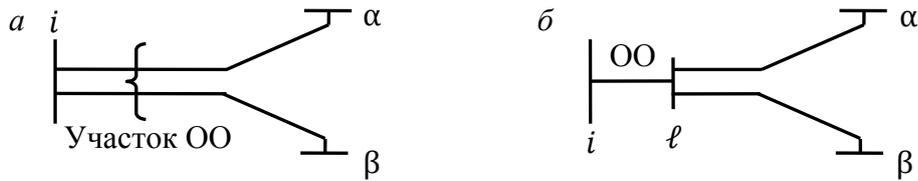


Рис. 3.33. Моделирование одновременных отказов элементов

В методе вероятностного эквивалентирования имеется возможность учета одновременного отказа элементов схемы путем модификации расчетных выражений на этапах исключения и восстановления узлов. При исключении узла ранга 2 одновременный отказ инцидентных ветвей можно рассматривать как дополнительное событие, приводящее к отказу последовательной цепи. В частности, при исключении узла  $i$  со смежными узлами  $\alpha$  и  $\beta$  интенсивность и относительная длительность отказов эквивалентной ветви  $\alpha - i - \beta$  (ПН которой затем будет суммироваться с ПН связи  $\alpha - \beta$ ):

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha i \beta} &= \lambda_{\alpha i} + \lambda_{\beta i} + \lambda_{ii} + \lambda_{(\alpha i, i \beta)}; \\ \gamma_{\alpha i \beta} &= \gamma_{\alpha i} + \gamma_{\beta i} + \gamma_{ii} + \gamma_{(\alpha i, i \beta)},\end{aligned}\tag{3.40}$$

где  $\lambda_{(\alpha i, i \beta)}$  и  $\gamma_{(\alpha i, i \beta)}$  – соответственно интенсивность и относительная длительность одновременного отказа ветвей  $\alpha - i$  и  $\beta - i$ .

При восстановлении узла ранга 2 одновременный отказ рассматривается как дополнительное событие, приводящее к отказу узла  $i$ . В частности, при эквивалентировании схемы с помощью связей  $x$ ,  $y$  (п. 2.2.2) к результирующим ПН добавляются (вероятностная процедура) ПН одновременного отказа:

$$\lambda_{i, \text{рез}} := \lambda_{i, \text{рез}} + \lambda_{(\alpha i, i \beta)}; \quad q_{i, \text{рез}} := q_{i, \text{рез}} \oplus q_{(\alpha i, i \beta)}.$$

Если одновременным отказом обладают связь  $\alpha - i$  (или  $\beta - i$ ) и связь  $\alpha - \beta$ , непосредственно соединяющая узлы  $\alpha, \beta$ , то при исключении узла  $i$  ПН эквивалентной связи  $\alpha - i - \beta$  определяются без учета одновременности отказов, а при последующем эквивалентировании параллельного соединения  $\alpha - i - \beta$  и  $\alpha - \beta$  одновременные отказы рассматриваются как последовательно соединенная составляющая:

$$\lambda_{\alpha}^* = \lambda_{\alpha} + \lambda_{(\alpha i, \alpha \beta)}; \quad \gamma_{\alpha}^* = \gamma_{\alpha} + \gamma_{(\alpha i, \alpha \beta)},$$

где  $\lambda_{\alpha}$  и  $\gamma_{\alpha}$  – соответственно интенсивность и относительная длительность эквивалентной связи, полученные без учета одновременного отказа ветвей  $\alpha - \beta$  и  $\alpha - i$  (или  $\beta - i$ ).

Ранее (см. п. 2.2.2) отмечалось, что при восстановлении узла  $i$  ранга 2 в модели эквивалентных связей  $x$ ,  $y$  возможны две расчетные схемы – мостик (с диагональной связью  $\alpha - \beta$ ) и четырехугольник (без диагональной связи). При этом относительно небольшим преимуществом обладает вторая

схема в силу ее простоты. Данное положение распространяется и на схемы с одновременным отказом. Однако вероятность и интенсивность отказов связи  $\alpha - i$  (или  $\beta - i$ ), входящей в состав группы, на этапе определения эквивалентных параметров  $x, y$  должны быть увеличены на величины соответствующих показателей одновременных отказов.

В случае, когда ветвь  $\alpha - i$  (или  $\beta - i$ ) описана в МОО в паре с некоторой не принадлежащей рассматриваемому участку ветвью  $\omega$ , показатели одновременных отказов полностью или частично переходят на эквивалентную связь. При последовательном эквивалентировании связи  $\alpha - i - \beta$  происходит полная передача, а при параллельном преобразовании, например  $\alpha - \beta$  и  $\alpha - i - \beta$ , показатели одновременных отказов переходят частично с коэффициентом, определяемым вероятностью отказа той цепи ( $\alpha - \beta$ ) из параллельной структуры, которая не связана одновременными отказами с ветвью  $\omega$ .

Более точно данный коэффициент вычисляется согласно условиям эквивалентирования. Принимая во внимание, что фактор одновременных отказов представляется в виде последовательно соединенной связи, условие эквивалентности параллельного соединения для вероятности отказа может быть представлено в виде:

$$q_{\omega} = (q_{\alpha\beta}q_{\alpha i\beta}) \oplus q_{\omega\omega}^* = q_{\alpha\beta}(q_{\alpha i\beta} \oplus q_{\omega\omega}), \quad (3.41)$$

где  $q_{\omega\omega}^*, q_{\omega\omega}$  – соответственно скорректированная и исходная вероятности одновременных отказов.

Расписывая (3.41), получаем

$$q_{\omega} = q_{\alpha\beta}q_{\alpha i\beta} + (1 - q_{\alpha\beta}q_{\alpha i\beta})q_{\omega\omega}^* = q_{\alpha\beta}(q_{\alpha i\beta} + p_{\alpha i\beta}q_{\omega\omega}),$$

откуда

$$q_{\omega\omega}^* = kq_{\omega\omega} = \frac{q_{\alpha\beta}p_{\alpha i\beta}}{(1 - q_{\alpha\beta}q_{\alpha i\beta})}q_{\omega\omega}. \quad (3.42)$$

Нетрудно заметить, что коэффициент  $k$  в (3.42) в реальных технических системах практически совпадает с вероятностью  $q_{\alpha\beta}$ .

#### 4. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ОТКАЗОВ ТИПА «КЗ»

В отличие от ОТО, отказы типа «короткое замыкание» (ОТКЗ) связаны с появлением в сети КЗ и его последующей локализацией коммутационной аппаратурой (выключатели, разъединители, отделители и пр.). До полной локализации КЗ часть узлов ЭЭС имеет напряжение, равное нулю, что характеризует состояние отказа их системы электроснабжения.

Наряду с ОТО и ОТКЗ коммутационная аппаратура подвержена также отказам типа «отказ в срабатывании», которые являются определяющими в модели ОТКЗ. Например, при появлении КЗ в некотором узле схемы происходит отказ выключателя в отключении этого КЗ. В результате КЗ «переходит» в смежный узел (напряжение равно нулю). Таким образом, математическая модель ОТКЗ в некотором смысле рассматривает процесс каскадного развития аварии.

Отказавшие элементы должны быть отключены для выполнения восстановительного ремонта. После их отключения и локализации часть коммутационных аппаратов включается снова, восстанавливая систему электроснабжения. Однако для повторных коммутаций требуется некоторое время, которое называется временем оперативных переключений (0,5–1 ч). В силу относительно небольшой длительности ОТКЗ вероятность таких состояний практически равна нулю и ее значимость как ПН, характеризующего систему электроснабжения, заметно снижается. В то же время частота появления ОТКЗ возрастает из-за каскадного развития аварии. Поэтому развитые электрические сети с многократным структурным резервированием и имеющие практически нулевую вероятность отказа типа «обрыв» могут иметь существенную величину частоты отказов типа «КЗ».

ОТКЗ имеют и самостоятельное для оценки надежности системы электроснабжения значение. Дело в том, что в электрических сетях отключение питания даже на очень малое время (доли секунд) может привести к нарушению статической или динамической устойчивости как энергосистемы в целом, так и отдельных элементов ЭЭС (синхронные двигатели). Отсюда частота нарушения устойчивости во многом определяется частотой ОТКЗ. В целом ОТКЗ имеют бóльшую значимость в системообразующих (магистральных) электрических сетях, в то время как ОТО – в распределительных сетях среднего напряжения. Поскольку вероятность работоспособного состояния системы при ОТКЗ практически равна единице, то частоту отказов можно считать равной интенсивности. Следовательно, в модели ОТКЗ понятия частоты и интенсивности идентичны.

При ОТКЗ возможны такие отказы, которые, как правило, не рассматриваются в модели ОТО. К их числу относится так называемое шунтирование участка электрической сети. Действительно, пусть некоторый район электрической сети питается от двух соединенных секционным выключателем (СВ) секций подстанции. В модели ОТО СВ либо есть (СВ работоспособен), либо нет (восстановительный ремонт СВ). В любом случае секции подстанции рассматриваются как два независимых ИП, и при работоспособности

остальных элементов электрической сети отказ выключателя не приводит к отказу системы электроснабжения потребителей. В модели ОТКЗ двухполюсное КЗ в СВ приводит к нулевому напряжению на обеих секциях. Обе секции отключаются (одновременный отказ ИП) на время оперативных переключений (поврежденный выключатель локализуется разъединителями).

#### **4.1. Расчетная схема, основные допущения**

При анализе структурной надежности реальных электрических систем с использованием существующих вычислительных процедур, как правило, выполняется построение двух расчетных схем, соответствующих моделям ОТО и ОТКЗ. Первая из них (схема ОТО) практически повторяет схему электрических соединений, вторая же (схема ОТКЗ), будучи логически инверсной по отношению к первой, требует предварительной логической обработки схемы электрической сети. В условиях промышленной эксплуатации подобное требование приводит к значительным затратам квалифицированного ручного труда и появлению логических ошибок. Возможным решением является автоматизированное построение расчетной схемы ОТКЗ. В настоящее время это направление требует дополнительных исследований [20]. Здесь следует отметить, что при отдельных расчетных схемах затруднен учет отказов, связанных с возникновением и развитием отказов типа «короткое замыкание» во время плановых ремонтов элементов ЭЭС (частично учитываемых в модели ОТО). Одним из путей решения отмеченных проблем ЭЭС является адаптация математического метода расчета ПН ОТКЗ к электрической схеме ЭЭС и вычисление ПСН обеих моделей по одной расчетной схеме. Для этого необходимо получить:

- адекватные математические модели основного оборудования и устройств РЗА;
- аналитическое описание процедур расчета ПН на базе единой расчетной схемы;
- математические модели схем с элементами односторонней направленности потоков мощности (понижающие трансформаторы, выключатели с АВР и др.);
- вероятностные характеристики одновременного отказа ряда узлов ЭЭС;
- процедуры исключения и восстановления узлов расчетной схемы для модели ОТКЗ (за основу предлагается принять метод эквивалентных вероятностных преобразований);
- механизм учета ОТКЗ в послеаварийных (в том числе из-за отказов типа «обрыв») и ремонтных режимах работы электрической системы.

Принимается, что модель ОТКЗ анализирует множество аварийных ситуаций, связанных с КЗ, последствия которых ликвидируются персоналом ЭЭС за время оперативных переключений. Возможно дальнейшее расширение типизации отказов, в частности, выделение класса, в который объединяются отказы с перерывами электроснабжения, на время действия систем РЗА. Данный класс отказов также может быть описан моделью ОТКЗ и является ее

развитием. Безусловно, здесь есть своя специфика, требующая дополнительных теоретических исследований.

#### 4.1.1. Унифицированная ветвь расчетной схемы

Расчетная схема для анализа надежности представляет граф с единственным узлом – источником питания. Требование минимального объема данных при максимальной формализации расчетной процедуры определяет целесообразность введения единой унифицированной ветви (УВ) [3, 42]. УВ должна удовлетворять требованиям моделей ОТО и ОТКЗ для всех элементов ЭЭС. Поэтому набор характеристик, описывающих УВ, определяется всей совокупностью функциональных признаков различных типов электрооборудования.

Унифицированная ветвь по существу представляет обобщенный выключатель и описывается следующим набором показателей надежности:

- $\lambda_y$  – интенсивность устойчивых отказов (1/год);
- $\lambda_n$  – интенсивность неустойчивых отказов (1/год);
- $\lambda_o$  – интенсивность односторонних отказов (1/год);
- $\lambda_{пл}$  – интенсивность вывода в плановый ремонт (1/год);
- $\tau_a$  – средняя длительность аварийного восстановления (лет/отказ);
- $\tau_{пл}$  – средняя длительность планового ремонта (лет);
- $Q_{ij}$  – вероятность отказов коммутационного аппарата при заявке на отключение (о.е.) (вероятность пропуска тока КЗ в направлении от узла  $i$  в узел  $j$ );
- $k$  – коэффициент, характеризующий кратность АПВ.

В табл. 4.1 поясняется механизм моделирования конкретных типов электрооборудования на основе УВ. Знак «+» означает наличие данного параметра в модели элемента. Вероятность отказов при заявке на отключение  $q = 1$  моделирует нереализуемость у данного элемента ЭЭС функций оперативной локализации аварии.

Таблица 4.1

Показатели СН различных элементов ЭЭС

Элемент ЭЭС	Показатели							
	$\lambda_y$	$\lambda_n$	$\lambda_o$	$\lambda_{пл}$	$\tau_a$	$\tau_{пл}$	$Q_{ij}$	$k$
Трансформатор	+			+	+	+	1	
Линия электропередачи	+	+		+	+	+	1	
Выключатель	+		+	+	+	+	+	+
Отделитель, разъединитель	+			+	+	+	1	

Узлы расчетной схемы могут быть двух видов. Первый вид – это образы некоторых реальных элементов электрической системы (например система шин, трехобмоточный трансформатор и др.). Данный вид характеризуется интенсивностями аварийных отказов и плановых отключений, а также соответствующими средними длительностями восстановлений. Второй вид

узлов – это не относящиеся к первому типу точки соединения ветвей расчетной схемы. Здесь все исходные показатели отказов, за исключением  $q = 1$ , обнуляются, т. е. узел считается абсолютно надежным.

Направленность ветвей расчетной схемы можно учесть следующим образом:

- все ветви имеют различные ПН в каждом направлении;
- с целью наиболее эффективного учета свойства симметрии помечаются односторонне направленные ветви расчетной схемы, и на каждом этапе расчетной процедуры предусматривается проверка этих меток.

В дальнейшем изложении расчетная схема с ветвями, ПН которых зависят от направления, как и в модели ОТО, будет называться *направленной расчетной схемой* (в отличие от ненаправленной, ветви которой удовлетворяют условиям взаимности [46]).

#### 4.1.2. Математические модели элементов ЭЭС

Двухобмоточные трансформаторы характеризуются, прежде всего, заданным направлением транзита мощности [46]. Моделирование именно этого типа электрооборудования ветвью с равновероятностным отказом в различных направлениях пропуска энергии в ряде случаев было причиной появления избыточно оптимистичных результатов в первых версиях программы, основанной на методе вероятностного эквивалентирования [1, 47].

В общем случае двухобмоточный трансформатор может быть представлен направленной ветвью с отличающимися во встречных направлениях ПН. При этом в направлении возможного транзита мощности ПН имеют табличные (статистические) значения, в противоположном – ПН моделируют отсутствие связи. Трансформаторы, работающие в реверсивном режиме, представляются симметричной ветвью или узлом. Учитывая возможный реверсивный режим работы, *автотрансформатор* моделируется симметричной ветвью или узлом расчетной схемы.

**Трехобмоточный трансформатор** моделируется трехлучевой звездой, один луч которой представлен ветвью с табличными ПН, два других – абсолютно надежные, но с односторонним в сторону пониженного напряжения пропуском электроэнергии. Если между средним и низким напряжениями возможен переток мощности, то луч высокого напряжения принимается направленным, а лучи среднего и низшего напряжений ненаправленными. В этом случае табличные ПН присваиваются узлу звезды. В модели ОТКЗ трехобмоточный трансформатор чаще всего моделируется узлом.

**Линия электропередачи** моделируется ветвью без особой специфики. Особого внимания заслуживают одновременные отказы нескольких (обычно двух) цепей либо линий электропередачи, проходящих по одной трассе. Подобная аварийная ситуация может быть смоделирована несколькими способами. Один из них – это представление двух линий трех- или многолучевой звездой [44]. Однако более предпочтительной представляется организация информации (и вычислительного процесса) в виде матрицы одновременных отказов.

**Выключатели.** Статистическим аналогом вероятности  $q$  отказов выключателя при заявке на отключение короткого замыкания (вероятность пропуска КЗ (ВПКЗ)) является относительная частота пропуска КЗ. ВПКЗ рассчитывается для каждого выключателя в соответствии с кратностью устройства АПВ. Если задано распределение интенсивности устойчивых и неустойчивых КЗ (например 25 и 75 % для однократного АПВ), то эквивалентная ВПКЗ определяется следующим образом [6]:

- для однократного АПВ:  $q_3 = q(2 \cdot 0,25 + 0,75)$ ;
- для двукратного АПВ  $q_3 = q(k_1 + 2k_2 + 3(1 - k_1 - k_2))$ , где  $k_1, k_2$  – доля успешных АПВ в первом и втором цикле соответственно.

В том случае, когда соотношение между интенсивностью устойчивых и неустойчивых отказов непостоянно для одной и той же исследуемой схемы (например линии разных классов напряжений, воздушные и кабельные ЛЭП и др.), возможное случайное несрабатывание выключателя при заявке на отключение рациональнее учитывать при помощи двух различных ВПКЗ: ВПКЗ для первого срабатывания коммутационного аппарата  $q_1 = q$  и  $q_2 = q(1 + k_{АПВ})$  для второго. В дальнейшем расчетные процедуры будут ориентированы на  $q_3$ , хотя все выкладки после некоторой корректировки справедливы и для представления ВПКЗ в виде  $q_1$  и  $q_2$ .

При наличии АВР одностороннего действия ветвь, моделирующая выключатель, представляется направленной. При этом вероятность отказа срабатывания в направлении, противоположном вводу резерва, равна единице. Вероятность отказа связи в прямом направлении увеличивается на вероятность несрабатывания АВР. В случае двухстороннего АВР связь считается направленной [48].

#### 4.1.3. Моделирование одновременного отказа узлов

Расчетная схема с направленными ветвями позволяет эффективно в рамках одного расчета получить вероятностные характеристики одновременного отказа того или иного сочетания узлов нагрузки анализируемой электрической системы. В качестве последних обычно выступают системы или секции сборных шин, с которых осуществляется питание какого-либо потребителя. Обозначенные узлы расчетной схемы соединены на ней фиктивными ветвями с некоторым фиктивным узлом. Фиктивные связи имеют одностороннюю направленность, чем обеспечивается исключение влияния этого участка на любые другие характеристики надежности исследуемой системы. Результирующие ПН фиктивного узла характеризуют одновременный отказ обозначенных узлов расчетной схемы.

#### 4.1.4. Отказы устройств релейной защиты

В настоящее время существует два основных подхода к учету отказов устройств релейной защиты. Первый, упрощенный, подход состоит в корректировке ПН выключателя на величины, отражающие ненадежность устройств релейной защиты [6, 15, 29, 49, 50], и применяется преимущественно

в проектной практике. Вторым подходом учета характеризуется детальным моделированием устройств релейной защиты [51].

При расчетах ОТКЗ часто используется структурная модель, при которой вводятся дополнительные, шунтирующие выключатели связи, которые имеют собственную частоту отказов, равную нулю. Относительная частота пропуска КЗ соответствует вероятности отказа всего комплекта РЗ в прямом и нулевое значение в обратном направлении. Недостатком предлагаемого способа учета ненадежности релейной защиты является дополнительная работа на этапе формирования расчетной схемы. Следует отметить, что уточненное моделирование РЗ в расчетах надежности ЭЭС обычно требуется в эксплуатационной практике, где расчетные схемы составляются нечасто и используются с небольшими коррекциями в многочисленных расчетах.

Отказ РЗ в отключении внешних КЗ эквивалентен переходу КЗ в смежный узел. В результате каскадного отказа РЗ и выключателей эффект короткого замыкания наблюдается одновременно более чем в двух узлах. Данный режим может быть эквивалентирован введением дополнительных шунтирующих ветвей, представляющих фиктивные выключатели. Дополнительные ветви имеют собственную частоту отказов, равную нулю.

#### 4.2. Упрощенный расчет интенсивности ОТКЗ

Специфика расчетов структурной надежности с ОТКЗ нагляднее всего проявляется в упрощенных расчетных процедурах. По аналогии с одно- и двухэлементными минимальными сечениями, которые часто вполне достаточны для инженерной оценки надежности, в модели ОТКЗ также можно определить упрощенные оценочные процедуры.

Нижнюю оценку интенсивности ОТКЗ некоторого узла расчетной схемы можно получить следующим образом. Предположим, что между ИП и рассматриваемым узлом  $i$  существует единственный путь  $\pi_i$ . Все элементы на этом пути не входят в сферу анализа ОТКЗ, поскольку отказ любого элемента пути приводит к отказу электроснабжения рассматриваемого узла на время восстановительного ремонта и анализируется в модели ОТО. Однако отказ любого из выключателей (или его моделирующего коммутационного аппарата), примыкающего к  $\pi_i$ , вызывает отказ электроснабжения на время оперативных переключений и определяет интенсивность ОТКЗ узла  $i$ .

Поскольку выключатель  $i - j$  обладает двумя типами отказов – собственные отказы (с КЗ), условно обозначаемые как события  $B_{ij}$ , и отказы в отключении внешнего КЗ (события  $A_{ij}$  при пропуске КЗ из узла  $i$  в  $j$  и  $A_{ji}$  – в обратном направлении), то результирующие ОТКЗ узла  $i$  (событие  $C_i$ ) могут быть представлены логической формулой:

$$C_i \approx \sum_{j \rightarrow \pi_i} (B_{ij} + A_{ij}C_j),$$

где  $j \rightarrow \pi_i$  означает, что рассматриваются все узлы, примыкающие к пути  $\pi_i$ , а индекс  $i$  в  $B_{ij}$  и  $A_{ji}$  имеет обобщенный характер для всего пути  $\pi_i$ .

Из приведенной логической формулы следует

$$\lambda_i \approx \sum_{j \rightarrow \pi_i} (\lambda_{ij} + \lambda_j \rho_{ji}).$$

Таким образом, в результирующую интенсивность ОТКЗ узла  $i$  входят интенсивности собственных отказов всех примыкающих к пути  $\pi_i$  выключателей, а также интенсивности отказов всех смежных к пути  $\pi_i$  узлов, умноженные на вероятности пропуска КЗ инцидентных выключателей.

Если для рассматриваемого узла  $i$  можно определить несколько частично отличающихся путей, то в качестве  $\pi_i$  необходимо рассматривать их пересечение.

**Пример.** Определить показатели отказов типа КЗ для узлов потребителей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Исходная электрическая схема представлена на рис. 4.1, а. Параметры отказов элементов приведены в табл. 4.2.

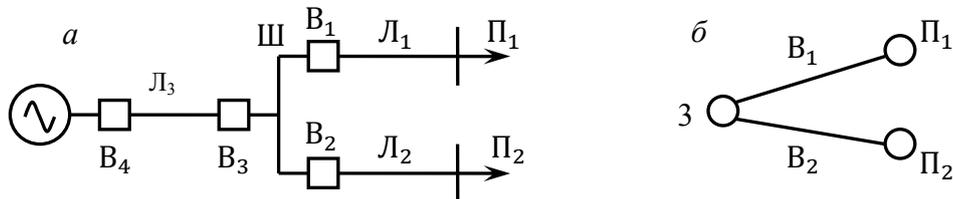


Рис. 4.1. Исходная электрическая и расчетная схемы сети

Таблица 4.2

Параметры отказов элементов электрической схемы

Элемент	Обозначение	$\lambda$ , 1/год	$q$ , о. е.
Присоединение	$\Pi_1$	1,0	—
	$\Pi_2$	2,0	—
Линия электропередачи	$L_1$	0,5	—
	$L_2$	0,6	—
Выключатель	$B_1$	0,5	0,1
	$B_2$	0,5	0,2

**Разработка расчетной схемы.** Поскольку элементы  $B_3$ ,  $B_4$ ,  $L_3$  и Ш последовательны по отношению к  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , то именно они образуют часть пути от ИП до  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Но на данном участке нет примыкающих узлов, поэтому в расчетную схему они не входят, так как их отказы учитываются в модели типа «обрыв». Ветвями расчетной схемы являются выключатели, а узлами все то, что находится между ними. В результате расчетная схема имеет упрощенный вид, приведенный на рис. 4.1, б.

**Решение.** Внешними для потребителя  $\Pi_2$  являются отказы типа КЗ элементов  $\Pi_1$  или  $L_1$  с последующим несрабатыванием  $B_1$ , а также собственные отказы  $B_1$ . Отсюда

$$\lambda_{\Pi_2, \text{рез}} = (\lambda_{\Pi_1} + \lambda_{L_1}) \rho_1 + \lambda_{B_1} = (1 + 0,5) \cdot 0,1 + 0,5 = 0,65 \text{ (1/год)}.$$

Аналогично

$$\lambda_{\Pi_1, \text{рез}} = (\lambda_{\Pi_2} + \lambda_{L_2})\rho_2 + \lambda_{B_2} = (2 + 0,6) \cdot 0,2 + 0,5 = 1,02 \text{ (1/год)}.$$

**Пример.** Требуется определить показатели отказов типа КЗ для узлов потребителей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  на электрической схеме, представленной на рис. 4.2, а. Параметры отказов элементов приведены в табл. 4.3.

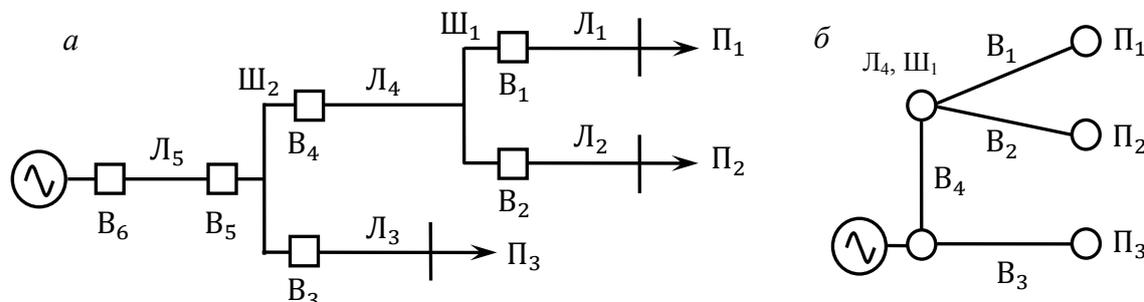


Рис. 4.2. Исходная электрическая и расчетная схемы сети

Таблица 4.3

Параметры отказов элементов электрической схемы

Элемент	Обозначение	$\lambda$ , 1/год	$\rho$ , о. е.
Присоединение	$\Pi_1$	1,0	
	$\Pi_2, \Pi_3$	2,0	
Линия электропередачи	$L_1$	0,5	
	$L_2, L_3$	0,6	
	$L_4$	0,4	
Выключатель	$B_1, B_4$	0,5	0,1
	$B_2, B_3$	0,5	0,2
Система шин	$\text{Ш}_1$	0,1	

**Разработка расчетной схемы.** Как и в предыдущей задаче, последовательные элементы  $B_5, B_6, L_5$  и  $\text{Ш}_2$  в расчетную схему не входят, так как их отказы учитываются в модели типа «обрыв». В результате расчетная схема имеет вид, представленный на рис. 4.2, б.

Как и в предыдущей задаче, внешними для потребителя  $\Pi_2$  являются отказы типа «КЗ» элементов  $\Pi_1$  или  $L_1$  с последующим несрабатыванием  $B_1$ , а также собственные отказы  $B_1$ . Кроме того, как для первого, так и второго потребителей внешними являются отказы типа КЗ элементов  $\Pi_3$  или  $L_3$  с последующим несрабатыванием  $B_3$ , а также собственные отказы  $B_3$ .

**Решение.** Учитывая равенство показателей надежности второго и третьего присоединений, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{\Pi_2, \text{рез}} &= \lambda_{B_1} + (\lambda_{\Pi_1} + \lambda_{L_1})\rho_1 + \lambda_{B_3} + (\lambda_{\Pi_3} + \lambda_{L_3})\rho_3 = \\ &= 0,5 + (1 + 0,5) \cdot 0,1 + 0,5 + (2 + 0,6) \cdot 0,2 = 1,67 \text{ (1/год)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\lambda_{\Pi_1, \text{рез}} = \lambda_{B_2} + (\lambda_{\Pi_2} + \lambda_{L_2})q_2 + \lambda_{B_3} + (\lambda_{\Pi_3} + \lambda_{L_3})q_3 = 2,04 \text{ (1/год)}.$$

Для третьего потребителя внешними являются отказы первого и второго присоединений нагрузок с интенсивностями ОТКЗ соответственно

$$\lambda_{\Pi\Pi_1} = (\lambda_{\Pi_1} + \lambda_{L_1})q_1 = (1 + 0,5) \cdot 0,1 = 0,15 \text{ (1/год)};$$

$$\lambda_{\Pi\Pi_2} = (\lambda_{\Pi_2} + \lambda_{L_2})q_2 = (2 + 0,6) \cdot 0,2 = 0,52 \text{ (1/год)}.$$

Эти отказы, как и отказы Ш<sub>1</sub>, Л<sub>4</sub>, В<sub>1</sub>, В<sub>2</sub>, отключаются выключателем В<sub>4</sub>. Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda_{\Pi_3, \text{рез}} &= \lambda_{B_4} + (\lambda_{\Pi\Pi_1} + \lambda_{\Pi\Pi_2} + \lambda_{B_1} + \lambda_{B_2} + \lambda_{Ш_1} + \lambda_{L_4})q_4 = \\ &= 0,5 + (0,15 + 0,52 + 0,5 + 0,5 + 0,1 + 0,4) \cdot 0,1 = 0,717 \text{ (1/год)}. \end{aligned}$$

### Многогенераторная радиальная расчетная схема

Пусть требуется оценить надежность (показатели ОТКЗ) электропередачи с двухсторонним питанием относительно узла нагрузки, например, П<sub>1</sub> (рис. 4.3). Ранее рассматривалась структурная схема с одним ИП и несколькими узлами нагрузки, ПН которых оценивались по принципу: отказы элементов, принадлежащих основному пути от ИП до присоединения в модели ОТКЗ, не рассматриваются, поскольку они входят в модель ОТО. В качестве источников КЗ рассматриваются все элементы, примыкающие к основному пути через выключатели, которые обладают отказами типа «неотключение (пропуск) внешнего КЗ».

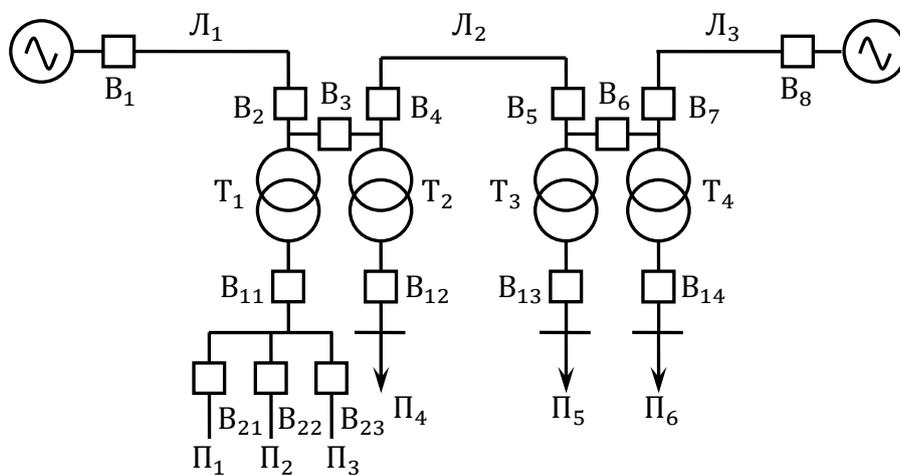


Рис. 4.3. Схема с двухсторонним питанием

В рассматриваемой схеме имеются два источника питания. Однако рассмотренный алгоритм определения интенсивности ОТКЗ можно распространить и на этот случай. При этом точку разветвления путей до ИП необходимо рассматривать как узел, для которого приходящие к нему КЗ являются значимыми. На основании этого пути до индивидуальных ИП могут рассматриваться как обычные радиальные пути, поскольку ток КЗ к элементам этих путей от других ИП проходит через общий узел разветвления схемы и шунтирует питание рассматриваемого узла нагрузки на время оперативных переключений.

В схеме (см. рис. 4.3) ОТКЗ присоединения  $\Pi_1$  (событие С):

$$C = B_2 + B_3 + B_{22} + B_{23} + A_{22}\Pi_2 + A_{23}\Pi_3 + A_2(L_1 + B_1) + \\ + A_3\{B_4 + T_2 + B_{12} + A_{12}\Pi_4 + A_4[L_2 + B_5 + A_5(B_6 + T_3 + B_{13} + \\ + A_{13}\Pi_5 + A_6(B_7 + T_4 + B_{14} + A_{14}\Pi_6 + A_7(B_8 + L_3))]\},$$

где  $B_i$  – собственный отказ (двухполюсное или однополюсное КЗ, примыкающее к стороне ИП) выключателя  $i$ , а  $A_i$  – отказ выключателя  $i$  в отключении внешнего КЗ,  $L_i$ ,  $T_i$ ,  $\Pi_i$  – отказ (с появлением КЗ) линии электропередачи, трансформатора или присоединения соответственно.

Глубина (число выключателей, отказавших в отключении внешнего КЗ) не ограничивается одним выключателем. Она может быть сколь угодно большой, но реально достаточно ограничиться двумя выключателями, поскольку значимость КЗ из-за относительно небольшой вероятности пропуска КЗ резко снижается по мере удаления КЗ от стержневого пути от ИП до рассматриваемого узла. При глубине более двух выключателей в обобщенной расчетной схеме число ИП может быть более двух (рис. 4.4). Однако описанный алгоритм может быть распространен и на этот случай.

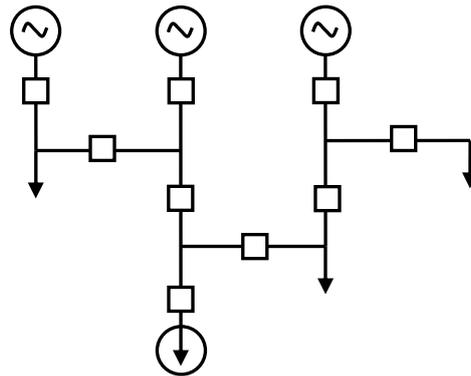


Рис. 4.4. Многогенераторная радиальная расчетная схема

### 4.3. Эквивалентирование ОТКЗ для узлов ранга 1, 2

Описанный упрощенный подход является замечательным средством инженерной оценки надежности конкретного узла нагрузки. Однако он практически не применим для анализа сложноразветвленной электрической схемы с большим числом узлов и ветвей. Здесь более приемлемыми являются унифицированные алгоритмы, не привязанные к какому-либо узлу назначения. К числу таких алгоритмов относится алгоритм вероятностного эквивалентирования расчетной схемы, успешно применяемый в модели ОТО (разделы 2, 3).

Из набора показателей универсальной ветви единой расчетной схемы для модели ОТКЗ используются:

- $\lambda$  – интенсивность собственных отказов ветви или узла;
- $q$  – относительная частота (вероятность) пропуска КЗ (направленная по направлению тока КЗ, которое противоположно направлению развития КЗ).

При этом для ветви, моделирующей выключатель, относительная частота пропуска КЗ  $q$  рассчитывается с учетом кратности АПВ. Для ЛЭП  $\lambda$  определяется суммированием частот устойчивых и неустойчивых отказов. Узлы в расчетной модели ОТКЗ представлены единственной характеристикой – интенсивностью отказов.

Одной из задач вероятностного эквивалентирования является разработка таких механизмов преобразования, которые позволят получить тождественные результирующие показатели в исходной и преобразованной структурах. Для модели ОТКЗ это условие сводится к формированию системы дополнительных показателей, которые адекватно учитывают влияние исключенной части расчетной схемы на оставшуюся часть.

#### 4.3.1. Исключение и восстановление узлов первого ранга

Процедура исключения узлов начинается поиском и эквивалентированием радиальных связей. Рассматривается участок схемы, состоящий из исключаемых узлов  $i, j, k$  и смежного им узла  $\alpha$  (рис. 4.5). Напомним, что каждая связь представляет собой псевдовыключатель, который может отключить или не отключить КЗ в инцидентном узле. Приставка «псевдо» (которая для простоты изложения часто исключается) приводится поскольку, во-первых, в качестве выключателя может рассматриваться какой-либо другой коммутационный аппарат (разъединитель, отделитель и др.), и, во-вторых, исключение узла ранга 1 может последовать за исключением узлов ранга 2, в результате чего между смежными узлами появляется несуществующий эквивалентный коммутационный аппарат.

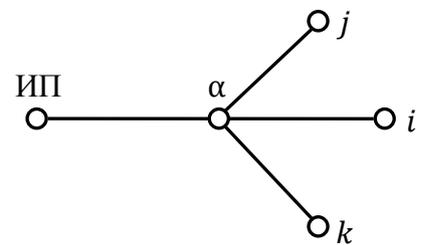


Рис. 4.5. Исключение узлов первого ранга

Задача заключается в определении показателя, который в условиях отсутствия узлов  $i, j, k$  моделирует иницируемый ими поток ОТКЗ. Таким показателем может быть интенсивность дополнительных отказов узла  $\alpha$ . Исключаемый узел  $i$  вызывает отказ типа КЗ смежного со стороны ИП узла  $\alpha$  (ток КЗ – от узла  $\alpha$ ), если одновременно происходит непосредственный отказ узла  $i$  (событие  $C_i$ ) и отказ выключателя  $\alpha - i$  в отключении КЗ в узле  $i$  (событие  $A_{\alpha i}$ ). Аналогичные выводы относятся к узлам  $j, k$ . Принимая во внимание наличие собственных отказов реальных или эквивалентных (псевдо) выключателей  $i - \alpha, j - \alpha, k - \alpha$ , события  $B_{i\alpha}, B_{j\alpha}, B_{k\alpha}$ , которые согласно исходным допущениям связаны с появлением КЗ, получаем структурное логическое выражение:

$$C_{\alpha} = (B_{\alpha i} + A_{\alpha i}C_i) + (B_{\alpha j} + A_{\alpha j}C_j) + (B_{\alpha k} + A_{\alpha k}C_k).$$

Применительно к интенсивностям отказов данное выражение представляется в виде:

$$\lambda_{\alpha}^* = \lambda_{\alpha i} + q_{\alpha i}\lambda_{ii} + \lambda_{\alpha j} + q_{\alpha j}\lambda_{jj} + \lambda_{\alpha k} + q_{\alpha k}\lambda_{kk}, \quad (4.1)$$

где  $\lambda_{ii}$ ,  $\lambda_{jj}$ ,  $\lambda_{kk}$  – интенсивности собственных отказов узлов;  $\lambda_{\alpha i}$ ,  $\lambda_{\alpha j}$ ,  $\lambda_{\alpha k}$  – интенсивности собственных отказов ветвей (псевдовыключателей);  $\rho_{\alpha i}$ ,  $\rho_{\alpha j}$ ,  $\rho_{\alpha k}$  – вероятности пропуска КЗ в направлении узла  $\alpha$  (ток КЗ от узла  $\alpha$ ).

Для оставшейся части расчетной схемы  $\lambda_{\alpha}^*$  несет в себе информацию о связях узла  $\alpha$  с подсистемой исключенных узлов ( $i, j, k$ ). В силу аддитивности (4.1) формально процедура исключения узла ранга 1, связанного с узлом  $\alpha$  элементом  $i - \alpha$ , заключается в накоплении дополнительной частоты ОТКЗ:

$$\lambda_{\alpha}^* := \lambda_{\alpha}^* + \lambda_{\alpha i}^{**} + \rho_{\alpha i}^{**}(\lambda_{ii} + \lambda_i^*),$$

где  $\lambda_{\alpha i}^{**}$ ,  $\rho_{\alpha i}^{**}$  – собственная интенсивность отказа и вероятность пропуска КЗ эквивалентного (полученного на предшествующих этапах исключения узлов) выключателя  $i - \alpha$ ;  $\lambda_i^*$  – дополнительная, полученная в результате исключения узлов на предшествующих этапах, интенсивность отказов (с появлением КЗ) узла  $i$ .

Здесь следует заметить, что параметры эквивалентного выключателя определяются с учетом параметров реальной связи  $i - \alpha$ :

$$\lambda_{\alpha i}^{**} = \lambda_{\alpha i} + \lambda_{\alpha i}^*; \quad (4.2)$$

$$\rho_{\alpha i}^{**} = \rho_{\alpha i} \oplus \rho_{\alpha i}^* = \rho_{\alpha i} + \rho_{\alpha i}^* - \rho_{\alpha i}\rho_{\alpha i}^*. \quad (4.3)$$

Здесь операция  $\oplus$ , как это было отмечено выше, соответствует вероятностному сложению (вероятность объединения случайных событий). В обозначениях (4.2), (4.3) после каждого исключения узла необходимо менять идентификатор обновления (звездочка). Это приводит к излишней громоздкости. Поэтому звездочка, как правило, нами будет использоваться только для указания результирующей эквивалентной величины, понимая при этом, что определяющие величины могут быть, в свою очередь, эквивалентными, например

$$\lambda_{\alpha\beta}^* = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta(j)},$$

где  $\lambda_{\alpha\beta(j)}$  – эквивалентная интенсивность отказа связи  $\alpha - \beta$ , полученная при исключении узла  $j$ .

На этапе восстановления узлов ранга 1, например узла  $i$  (рис. 4.5), с одной стороны, требуется учесть влияние на него узлов  $j$  и  $k$ , а с другой – необходимо помнить, что в результирующих ПН головного узла  $\alpha$  есть часть, относящаяся непосредственно к узлу  $i$  и связи  $i - \alpha$ . Поэтому на этапе восстановления узла  $i$  следует изъять из результирующих отказов узла  $\alpha$  составляющие, определяемые отказом элементов связи  $i - \alpha$  (событие  $C_{\alpha(i)}$ ). Дело в том, что эти отказы приводят либо к перерыву в электроснабжении узла  $i$  на время восстановительного ремонта (например выключателя  $i - \alpha$ ), т. е. учитываются в модели ОТО, либо могут быть учтены дважды (например, событие  $C_i^*$ ). Организационно расчетная процедура становится прозрачнее с введением еще одного показателя – дополнительной интенсивности отказов по причине связи со смежным узлом. Для связи  $\alpha - i$

$$\lambda_{\alpha(i)} = \lambda_{\alpha i} + \rho_{\alpha i}(\lambda_{ii} + \lambda_i^*). \quad (4.4)$$

В простейшем случае при отсутствии дополнительных шунтирующих выключателей между узлами  $i$ ,  $\alpha$ , результирующую частоту отказов узла  $i$  на этапе восстановления можно определить согласно выражению:

$$L_i = L_\alpha - \lambda_{\alpha(i)} + \lambda_i^*$$

где  $L_i$ ,  $L_\alpha$  – результирующие интенсивности отказов соответствующих узлов;  $\lambda_i^* = \sum_{s \in Si} \lambda_{i(s)}$  – упомянутая выше дополнительная интенсивность отказов узла  $i$ , эквивалентная влиянию подсистемы  $Si$ , питание которой осуществляется через узел  $i$  (подсистема более низкого иерархического уровня).

При наличии шунтирующей ветви характеризующий связь  $\alpha - i$  эквивалентный выключатель следует рассматривать как два параллельно соединенных псевдовыключателя (рис. 4.6): реальный ( $K_{\alpha i}$ ) с параметрами  $\lambda_{\alpha i}$ ,  $q_{\alpha i}$  и полученный в результате исключения узлов ( $K_{\alpha i}^*$ ) с параметрами  $\lambda_{\alpha i}^*$ ,  $q_{\alpha i}^*$ . В этом случае отказ любого из выключателей, например  $K_{\alpha i}$ , будет связан с перерывом электроснабжения только на время оперативных переключений. Поэтому его отказ (с КЗ) должен входить в модель ОТКЗ. При этом

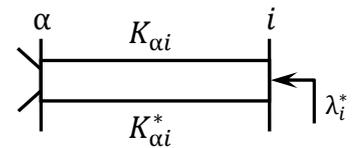


Рис. 4.6. Восстановление узла ранга 1

$$L_i = \begin{cases} L_\alpha - \lambda_{\alpha(i)} + \lambda_i^* + \lambda_{\alpha i}^*, & \lambda_{\alpha i}^* \neq \lambda_{\alpha i} \\ L_\alpha - \lambda_{\alpha(i)} + \lambda_i^*, & \lambda_{\alpha i}^* = \lambda_{\alpha i} \end{cases}$$

### 4.3.2. Исключение узлов второго ранга

Поскольку результатом эквивалентирования при исключении узла  $i$  второго ранга будет некоторый эквивалентный выключатель  $\alpha - \beta$  (рис. 4.7), то воздействие потока КЗ узла  $i$  и связанных с ним ветвей должно быть отражено в ПН эквивалентного выключателя, а именно в эквивалентной частоте  $\lambda_{\alpha\beta}^*$  собственных отказов и относительных частотах пропуска короткого замыкания  $q_{\alpha\beta}^*$ ,  $q_{\beta\alpha}^*$ . Дополнительно к этому в смежные узлы вводятся эквивалентные потоки КЗ (с интенсивностями  $\lambda_{\alpha(i)}$ ,  $\lambda_{\beta(i)}$ ), которые следует рассматривать как результат воздействия всех исключаемых элементов схемы (рис. 4.8).

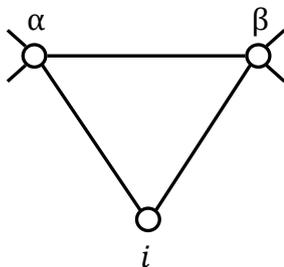


Рис. 4.7. Узел ранга 2

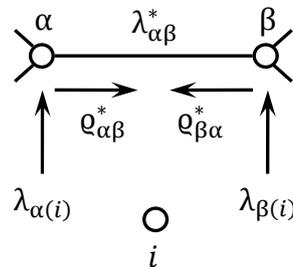


Рис. 4.8. Исключение узла ранга 2

Для определения искомых эквивалентных параметров необходимо составить пять уравнений, удовлетворяющих критериям эквивалентности. Такими критериями могут быть равенства:

- вероятностей пропуска внешних КЗ в направлениях  $\alpha - \beta$  и  $\beta - \alpha$ ;

- интенсивностей ОТКЗ только одного из узлов  $\alpha$ ,  $\beta$  при отсутствии ОТКЗ в другом;
- интенсивностей ОТКЗ одновременного ОТКЗ обоих узлов  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Эквивалентные вероятности пропуска КЗ  $q_{\alpha\beta}^*$  и  $q_{\beta\alpha}^*$  определяются из условия пропуска некоторого внешнего по отношению к рассматриваемому участку потока коротких замыканий. Переход КЗ из узла  $\alpha$  в узел  $\beta$  возможен, если в исходной схеме его обеспечивают либо выключатель  $\alpha - \beta$ , либо два последовательно соединенных через узел  $i$  выключателя в цепи  $\alpha - i - \beta$ . Аналогичное логическое заключение можно сделать относительно пропуска КЗ в обратном направлении. При этом вероятности пропуска КЗ:

$$\begin{aligned} q_{\alpha\beta}^* &= q_{\alpha\beta} \oplus q_{\alpha i} q_{i\beta}; \\ q_{\beta\alpha}^* &= q_{\beta\alpha} \oplus q_{\beta i} q_{i\alpha}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

**Замечание.** Поскольку рассматривается процесс исключения произвольного узла, то следует допустить, что ранее были исключения иных узлов, в том числе и тех, что связаны с узлами  $\alpha$ ,  $\beta$ . Поэтому связь  $\alpha - \beta$  может представлять не исходный, а эквивалентный коммутационный аппарат (псевдовыключатель), и для отличия от реального элемента электрической схемы ему следует приписать какой-либо символ. Однако с целью упрощения математической записи, как это предлагалось выше, мы не будем этого делать. В результате символ «\*» следует рассматривать как символ коррекции ПН.

**Добавочные интенсивности**  $\lambda_{\alpha(i)}$ ,  $\lambda_{\beta(i)}$  определяются из уравнений эквивалентности, построенных на основании исходной и эквивалентной схем замещения согласно двум целевым условиям: при возникновении отказа исключаемых элементов КЗ переходит соответственно либо в узел  $\alpha$  ( $\lambda_{\alpha(i)}$ ), либо в узел  $\beta$  ( $\lambda_{\beta(i)}$ ), но не в тот и другой одновременно. В частности, появление КЗ в узле  $\alpha$  будет иметь место, если при безотказной работе выключателя  $\beta - i$  (см. рис. 4.7) произойдет одно из событий:

- отказ выключателя  $\alpha - i$ ;
- КЗ в узле  $i$  с последующим его переходом в узел  $\alpha$  через связь  $i - \alpha$ .

В результате, соотношения эквивалентности для интенсивности ОТКЗ узлов  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha(i)} &= (\beta + q_{\alpha i} \lambda_i) \bar{q}_{\beta i}; \\ \lambda_{\beta(i)} &= (\lambda_{\beta i} + q_{\beta i} \lambda_i) \bar{q}_{\alpha i}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $\lambda_i$  в общем случае представляет суммарный поток коротких замыканий, инициируемый узлом  $i$ , включая как собственные, так и вторичные (связанные с пропуском выключателей внешних КЗ) отказы;  $\bar{q} = 1 - q$  определяет вероятность отсутствия пропуска КЗ.

Интенсивность собственных отказов эквивалентного выключателя определяется из условия одновременного появления КЗ в смежных узлах  $\alpha$  и  $\beta$  из-за отказов исключаемых элементов (но без учета пропуска внешних КЗ,

что учитывается в  $Q_{\alpha\beta}^*, Q_{\beta\alpha}^*$ ). В исходной схеме данное событие описывается следующим логическим выражением:

$$B_{\alpha\beta} + A_{\beta i}B_{i\alpha} + A_{\alpha i}B_{i\beta} + (A_{\alpha i}A_{\beta i})C_i.$$

Данному выражению соответствует интенсивность отказов

$$\lambda_{\alpha\beta} + Q_{\beta i}\lambda_{i\alpha} + Q_{\alpha i}\lambda_{i\beta} + Q_{\alpha i}Q_{\beta i}\lambda_i.$$

Описанное событие в эквивалентной схеме идентифицируется как  $B_{\alpha\beta}^*$ .

Интенсивность отказа эквивалентного выключателя зависит от всех определенных ранее эквивалентных параметров

$$\lambda_{\alpha\beta}^* = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta(i)} = \lambda_{\alpha\beta} + Q_{\beta i}\lambda_{i\alpha} + Q_{\alpha i}\lambda_{i\beta} + Q_{\alpha i}Q_{\beta i}\lambda_i. \quad (4.7)$$

**Смежный узел – ИП.** Особого внимания требует частный случай, когда один из узлов, например  $\alpha$ , является источником питания. Расчетные условия одновременного отказа узлов здесь иные, поскольку априори считается невозможной передача тока в ИП, который представляет один из смежных узлов (узел  $\alpha$ ). В качестве критерия, определяющего интенсивность  $\lambda_{\alpha\beta}^*$  эквивалентного выключателя, в рассматриваемом случае можно рассматривать эквивалентность результирующего ОТКЗ второго смежного узла  $\beta$  (интенсивность  $\lambda_{\beta}^*$ ) в исходной и эквивалентных схемах:

$$\lambda_{\beta}^* = \lambda_{\alpha\beta}^* + \lambda_{\alpha(i)} + \lambda_{\beta(i)} = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta i} + \lambda_{\alpha i} + \lambda_i Q_{\beta i} \bar{Q}_{\alpha i} + \lambda_i Q_{\alpha i} \bar{Q}_{\beta i}.$$

Подставляя (4.6), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta}^* + (\lambda_{\alpha i} + Q_{\alpha i}\lambda_i)\bar{Q}_{\beta i} + (\lambda_{\beta i} + Q_{\beta i}\lambda_i)\bar{Q}_{\alpha i} = \\ = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta i} + \lambda_{\alpha i} + \lambda_i Q_{\beta i} \bar{Q}_{\alpha i} + \lambda_i Q_{\alpha i} \bar{Q}_{\beta i}. \end{aligned}$$

После некоторых преобразований получается достаточно простое выражение для интенсивности отказа эквивалентного выключателя, т. е.

$$\lambda_{\alpha\beta}^* = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta(i)} = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta i} Q_{\alpha i} + \lambda_{\alpha i} Q_{\beta i}. \quad (4.8)$$

Согласно выражениям (4.1)–(4.7) поочередно выполняется исключение из расчетной схемы узлов первого и второго рангов (исходных и появляющихся в процессе преобразований). Процедура заканчивается в том случае, когда не остается более узлов ранга 1 и 2, либо исходная схема свернулась полностью.

### 4.3.3. Восстановление узлов ранга 2

Процедура восстановления узлов выполняется в порядке, обратном их исключению. Благодаря этому, на каждом шаге считаются известными все необходимые ПН узлов  $\alpha$  и  $\beta$ , смежных с восстанавливаемым узлом  $i$  (рис. 4.9):

- результирующие интенсивности ОТКЗ смежных узлов, на основе которых могут

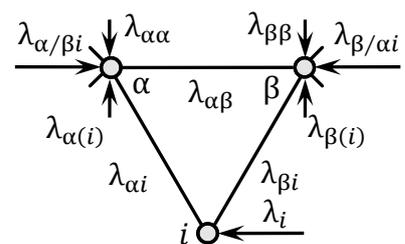


Рис. 4.9. Восстановление узла ранга 2

быть определены интенсивности  $\lambda_{\alpha/i\beta}$  (и  $\lambda_{\beta/i\alpha}$ ), внешних по отношению к рассматриваемому участку потоков КЗ узлов  $\alpha$  и  $\beta$ ;

- эквивалентные ПН связи  $\alpha - \beta$ , причем последние могут быть скорректированы без учета дополнительных составляющих из-за отказов элементов участка  $\alpha - i - \beta$ .

При восстановлении узлов необходимо иметь в виду, что одновременный отказ типа КЗ смежных узлов, характеризуемый интенсивностью собственных отказов эквивалентного выключателя, может происходить и по причине шунтирующего воздействия (напряжение в узле  $i$  равно нулю) потоков КЗ как ранее исключенных (шунтирование снизу), так и уже восстановленных (шунтирование сверху) узлов. Шунтирование сверху проявляется, например, в отказе секционного выключателя с двухполюсным КЗ или пропуске некоторым выключателем внешнего КЗ, в результате чего происходит одновременный отказ двух или более узлов, через которые осуществляется электроснабжение рассматриваемого участка схемы.

Отсюда на этапе восстановления узла  $i$ , связанного с узлами  $\alpha, \beta$ , необходимо считать известными исходные параметры выключателя  $\alpha - \beta$  ( $\lambda_{\alpha\beta}, \varrho_{\alpha\beta}, \varrho_{\beta\alpha}$ ), эквивалентных псевдовыключателей, шунтирующих узлы  $\alpha, \beta$  «снизу» ( $\lambda_{\alpha\beta}^*, \varrho_{\alpha\beta}^*, \varrho_{\beta\alpha}^*$ ) и «сверху» ( $\lambda_{\alpha\beta}^{**}, \varrho_{\alpha\beta}^{**}, \varrho_{\beta\alpha}^{**}$ ). Как правило, в программной реализации имеет смысл представлять результирующий псевдовыключатель, оказывающий суммарное шунтирующее воздействие с параметрами

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha\beta}^{\Sigma} &= \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta}^* + \lambda_{\alpha\beta}^{**}; \\ \varrho_{\alpha\beta}^{\Sigma} &= \varrho_{\alpha\beta} \oplus \varrho_{\alpha\beta}^* \oplus \varrho_{\alpha\beta}^{**}; \\ \varrho_{\beta\alpha}^{\Sigma} &= \varrho_{\beta\alpha} \oplus \varrho_{\beta\alpha}^* \oplus \varrho_{\beta\alpha}^{**}.\end{aligned}$$

Однако с целью снижения громоздкости математических выражений в дальнейшем изложении, по аналогии с процедурой исключения узлов, все результирующие ПН, полученные на предшествующих этапах восстановления узлов, будут записываться без индекса суммы, а новые значения, полученные на этапе восстановления рассматриваемого узла, будут идентифицироваться символом «\*»

**Интенсивности внешних потоков КЗ.** Для эквивалентной схемы, представленной на рис. 4.9, необходимо определить интенсивности  $\lambda_{\alpha/i\beta}, \lambda_{\beta/i\alpha}$ , которые соответствуют событиям  $C_{\alpha/i\beta}, C_{\beta/i\alpha}$ , рассматриваемым как независимые внешние потоки КЗ. Данные интенсивности определяются решением системы линейных уравнений, составленных исходя из результирующих интенсивностей  $L_{\alpha}, L_{\beta}$  отказов соответствующих узлов и ПН эквивалентного (на этапе восстановления узла  $i$ ) выключателя  $\alpha - \beta$ :

$$\begin{cases} L_{\alpha} = \lambda_{\alpha/i\beta} + \lambda_{\alpha(i)} + \lambda_{\alpha\beta} + \varrho_{\alpha\beta}(\lambda_{\beta(i)} + \lambda_{\beta\beta} + \lambda_{\beta/i\alpha}); \\ L_{\beta} = \lambda_{\beta/i\alpha} + \lambda_{\beta(i)} + \lambda_{\alpha\beta} + \varrho_{\beta\alpha}(\lambda_{\alpha(i)} + \lambda_{\alpha\alpha} + \lambda_{\alpha/i\beta}). \end{cases}$$

Отсюда формируется легко решаемая система двух уравнений относительно переменных  $\lambda_{\alpha/i\beta}$ ,  $\lambda_{\beta/i\alpha}$ :

$$\begin{cases} \lambda_{\alpha/i\beta} + \varrho_{\alpha\beta}\lambda_{\beta/i\alpha} = A = L_{\alpha} - \lambda_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha(i)} - \varrho_{\alpha\beta}(\lambda_{\beta(i)} + \lambda_{\beta\beta}); \\ \lambda_{\beta/i\alpha} + \varrho_{\beta\alpha}\lambda_{\alpha/i\beta} = B = L_{\beta} - \lambda_{\alpha\beta} - \lambda_{\beta(i)} - \varrho_{\beta\alpha}(\lambda_{\alpha(i)} + \lambda_{\alpha\alpha}). \end{cases}$$

Ее решение:

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha/i\beta} &= \frac{A - \varrho_{\alpha\beta}B}{1 - \varrho_{\beta\alpha}\varrho_{\alpha\beta}}; \\ \lambda_{\beta/i\alpha} &= \frac{B - \varrho_{\beta\alpha}A}{1 - \varrho_{\alpha\beta}\varrho_{\beta\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

### Коррекция интенсивности отказов эквивалентного КА

Согласно рис. 4.9 отказ узла  $i$  возможен при возникновении следующих событий: КЗ в одном из смежных узлов с последующим переходом КЗ в узел  $i$  из-за отказа инцидентного выключателя в отключении внешнего КЗ; шунтирования узлов  $\alpha$ ,  $\beta$  из-за внешнего КЗ с последующим отказом эквивалентного выключателя  $\alpha - \beta$ ; в результате воздействия ОТКЗ исключенных ранее узлов. При определении результирующей интенсивности ОТКЗ узла  $i$  необходимо учитывать, что ПН эквивалентной связи  $\alpha - \beta$  содержат составляющие, определяемые ранее исключенным и теперь восстанавливаемым узлом  $i$ . Следовательно, при расчетах ПН узла  $i$  эти составляющие должны быть изъяты:

$$\lambda_{\alpha\beta/i} = \lambda_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha\beta(i)}; \quad (4.10)$$

$$\varrho_{\alpha\beta/i} = \frac{\varrho_{\alpha\beta} - \varrho_{\alpha i}\varrho_{i\beta}}{1 - \varrho_{\alpha i}\varrho_{i\beta}}; \quad (4.11)$$

$$\varrho_{\beta\alpha/i} = \frac{\varrho_{\beta\alpha} - \varrho_{\beta i}\varrho_{i\alpha}}{1 - \varrho_{\beta i}\varrho_{i\alpha}}.$$

**Смежный узел – ИП.** Если питание схемы осуществляется через один из смежных узлов, например узел  $\alpha$ , то его расчетная результирующая интенсивность ОТКЗ определяется накопленной интенсивностью эквивалентных узловых потоков  $L_0 = \sum_{\forall k} \lambda_{0(k)}$ . Отсюда потоки внешних КЗ определяются только для второго смежного узла  $\beta$ , исходя из условия

$$L_{\beta} = L_{\alpha} + \lambda_{\beta/i} + \lambda_{\beta(i)} + \lambda_{\alpha\beta}.$$

Откуда

$$\lambda_{\beta/i} = L_{\beta} - (L_{\alpha} + \lambda_{\beta(i)} + \lambda_{\alpha\beta}). \quad (4.12)$$

Результирующая интенсивность отказов узла  $i$  в общем случае определяется выражением

$$L_i = \lambda_{\alpha\beta/i} + (\varrho_{\beta\alpha/i} \oplus \varrho_{i\alpha})\lambda_{\alpha}^{\Sigma} + (\varrho_{\alpha\beta/i} \oplus \varrho_{i\beta})\lambda_{\beta}^{\Sigma} + \lambda_{i\alpha} + \lambda_{i\beta} + \lambda_i^*, \quad (4.13)$$

где

$$\lambda_{\alpha}^{\Sigma} = \lambda_{\alpha\alpha} + \lambda_{\alpha/i\beta}; \quad \lambda_{\beta}^{\Sigma} = \lambda_{\beta\beta} + \lambda_{\beta/i\alpha}; \quad \lambda_i = \lambda_{ii} + \lambda_i^*$$

**Внешнее шунтирование.** Наряду с определением результирующих ПН узла  $i$  на этапе его восстановления с целью дальнейшего восстановления

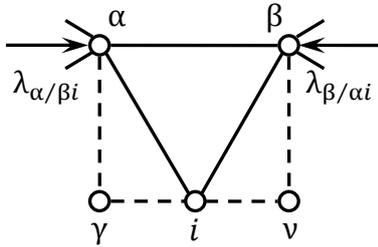


Рис. 4.10. Внешний шунт

других ( $\gamma, v$ ) ранее исключенных узлов ранга 2 (рис. 4.10) в параметрах псевдовыключателей  $\alpha - i, \beta - i$  необходимо учесть шунтирующее воздействие восстановленного участка схемы (шунтирование «сверху»). Согласно рис. 4.9 шунтирование «сверху» узлов  $\alpha, i$  (напряжение в узле  $i$  равно нулю) проявляется в пропуске внешнего КЗ через узел  $\beta$  или через отказы элементов схемы на участке  $\alpha - \beta - i$ .

Расчетные выражения для нового значения вероятности пропуска КЗ псевдовыключателя  $\alpha - i$  можно записать в виде:

$$Q_{\alpha i}^* = Q_{\alpha i} \oplus Q_{\alpha\beta/i}; \tag{4.14}$$

$$Q_{i\alpha}^* = Q_{i\alpha} \oplus Q_{i\beta} Q_{\beta\alpha/i}.$$

Здесь вероятности  $Q_{\alpha\beta/i}, Q_{\beta\alpha/i}$  определяются без учета воздействия узла  $i$ :

$$Q_{\alpha\beta/i} = (Q_{\alpha\beta} - Q_{\alpha i} Q_{i\beta}) / (1 - Q_{\alpha i} Q_{i\beta}); \tag{4.14}$$

$$Q_{\beta\alpha/i} = (Q_{\beta\alpha} - Q_{\beta i} Q_{i\alpha}) / (1 - Q_{\beta i} Q_{i\alpha}).$$

В первом выражении (4.14) второе слагаемое содержит однократный переход (не учитывается отказ выключателя  $\beta i$  в отключении внешнего КЗ), поскольку при отказе выключателя  $\alpha - \beta$  напряжение в узле  $i$  равно нулю и через этот узел ток не передается.

Новые значения интенсивности собственных отказов выключателя  $\alpha - i$ :

$$\lambda_{\alpha i}^* = \lambda_{\alpha i} + \lambda_{\beta\alpha/i} + \lambda_{\beta i} Q_{\beta\alpha/i} + Q_{\alpha\beta/i} (\lambda_{\beta\alpha/i} + \lambda_{\beta\beta}).$$

Аналогично определяются

$$Q_{\beta i}^* := Q_{\beta i} \oplus Q_{\beta\alpha/i}; \tag{4.16}$$

$$Q_{i\beta}^* := Q_{i\beta} \oplus (Q_{i\alpha} Q_{\alpha\beta/i});$$

$$\lambda_{\beta i}^* := \lambda_{\beta i} + \lambda_{\beta\alpha/i} + Q_{\beta\alpha/i} \lambda_{\alpha i} + \lambda_{\alpha\beta/i} Q_{\beta\alpha/i}. \tag{4.17}$$

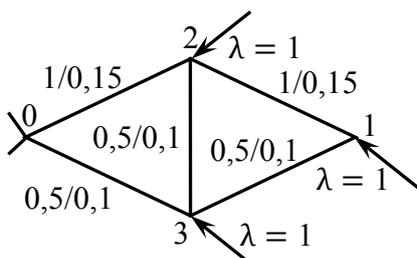


Рис. 4.11. Исходная схема

**Пример.** Выполнить расчет ПН ОТКЗ для схемы, представленной на рис. 4.11, где каждая связь идентифицирована интенсивностью отказов и симметричной вероятностью пропуска КЗ ( $\lambda_{ij} / q_{ij}$ ). Результаты исключения узла 1 представлены в табл. 4.4, 4.5 и на рис. 4.12. Результаты исключения узла 2 представлены в табл. 4.6, 4.7 и на рис. 4.13.

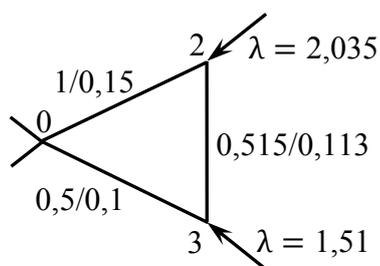


Рис. 4.12. Исключение узла 1

Таблица 4.4

Исключение узла 1.  
Эквивалентная связь

Связь	$\lambda$	$\rho$
1-2	1	0,15
1-3	0,5	0,1
2-3	0,5	0,1
2-3 (1)	0,015	0,015
2-3 экв	0,515	0,1135

Полученная при исключении узла 1 эквивалентная вероятность пропуска КЗ следующая:

$$\begin{aligned} \rho_{23}^* &= \rho_{32}^* = \rho_{23} + \rho_{21}\rho_{13} - \rho_{23}\rho_{21}\rho_{13} = \\ &= 0,1 + 0,15 \cdot 0,1 - 0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,1 = 0,1135. \end{aligned}$$

Интенсивность дополнительного потока КЗ в узле 2:

$$\lambda_{2(1)} = (\lambda_{12} + \rho_{21}\lambda_1)\bar{\rho}_{31} = (1 + 0,15 \cdot 1)(1 - 0,1) = 1,035.$$

Интенсивность дополнительного потока КЗ в узле 3:

$$\lambda_{3(1)} = (\lambda_{13} + \rho_{31}\lambda_1)\bar{\rho}_{21} = (0,5 + 0,1 \cdot 1)(1 - 0,15) = 0,51.$$

Таблица 4.6

Исключение узла 2.  
Эквивалентная связь

Связь	$\lambda$	$\rho$
0-2	1,0	0,15
2-3	0,69	0,1135
0-3	0,5	0,1
0-3 (2)	0,191	0,017
0-3 экв	0,691	0,115

Результирующие интенсивности потоков КЗ:

$$\lambda_2^* = \lambda_2 + \lambda_{2(1)} = 1 + 1,035 = 2,035;$$

$$\lambda_3^* = \lambda_3 + \lambda_{3(1)} = 1 + 0,51 = 1,51.$$

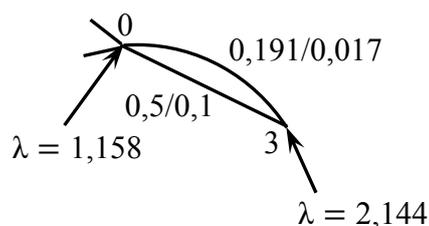


Рис. 4.13. Исключение узла 2

Таблица 4.5

Исключение узла 1.  
Эквивалентные потоки КЗ

Узел	$\lambda_{исх}$	$\lambda_{i(1)}$	$\lambda_{экв}$
1	1	—	—
2	1	1,035	2,035
3	1	0,51	1,51

Таблица 4.7

Исключение узла 2.  
Эквивалентные потоки КЗ

Узел	$\lambda_{исх}$	$\lambda_{i(2)}$	$\lambda_{экв}$
2	2,15	—	—
0	0	1,158	1,158
3	1,51	0,634	2,144

Эквивалентная интенсивность отказов связи 2–3 согласно (4.7):

$$\lambda_{23}^* = \lambda_{23} + q_{31}\lambda_{12} + q_{21}\lambda_{13} + \lambda_1 q_{12}q_{13} - (\lambda_{2(1)}q_{32}^* + \lambda_{3(1)}q_{23}^*) = \\ = 0,5 + 1 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,15 \cdot 0,1 - 1,035 \cdot 0,1135 - 0,51 \cdot 0,1135 = 0,515.$$

**Процедура исключения узла 2.** Специфика данного этапа заключается в том, что одним из смежных узлов является ИП. Отсюда переход КЗ от узла 2 в ИП является ОТКЗ для узла 3. Но большинство операций аналогично операциям при исключении узла 1. В частности, эквивалентная вероятность пропуска КЗ определяется выражением:

$$q_{03}^* = q_{30}^* = q_{03} + q_{02}q_{23} - q_{03}q_{02}q_{23} = \\ = 0,1 + 0,15 \cdot 0,113 - 0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,113 = 0,1155.$$

Дополнительные потоки КЗ в узлы 0 и 3:

$$\lambda_{0(2)} = (\lambda_{02} + q_{02}\lambda_2)\bar{q}_{32} = (1 + 0,15 \cdot 2,035)(1 - 0,113) = 1,158;$$

$$\lambda_{3(2)} = (\lambda_{32} + q_{32}\lambda_2)\bar{q}_{02} = (0,515 + 0,1135 \cdot 2,035)(1 - 0,15) = 0,634.$$

Результирующие интенсивности потоков КЗ следующие:

$$\lambda_2^* = \lambda_2 + \lambda_{2(1)} = 0 + 1,158 = 1,158;$$

$$\lambda_3^* = \lambda_3 + \lambda_{3(1)} = 1,51 + 0,634 = 2,144.$$

Эквивалентная интенсивность отказов связи 0–3 (именно здесь проявляется специфика смежного узла – ИП) согласно (4.8):

$$\lambda_{03}^* = \lambda_{03} + \lambda_{20}q_{32} + \lambda_{32}q_{20} = 0,5 + 1 \cdot 0,1135 + 0,515 \cdot 0,15 = 0,691.$$

Результирующие ПН узла 3 определяются по модели восстановления узла ранга 1. Поскольку связь 0–3 состоит из двух псевдовыключателей, то интенсивности их отказов включаются в результирующую интенсивность ОТКЗ:

$$L_3 = \lambda_{0(2)} + \lambda_{03}^* + \lambda_3^* - \lambda_{33} = 1,158 + 0,691 + 2,144 - 1 = 2,993.$$

Приближенные расчеты, позволяющие оценить полученные результаты, основаны на переборе возможных отказов элементов. Отказ (типа «КЗ») узла 3 произойдет, если произойдет отказ:

- любого из инцидентных выключателей (3–0, 3–1, 3–2, суммарная интенсивность этих событий равна  $3 \cdot 0,5 = 1,5$ );
- шунтирующего выключателя 0–2 (интенсивность 1);
- узла 2 или связи 1–2 с возможным переходом КЗ либо в узел 0, либо в узел 3 (интенсивность равна  $(1 + 1)(0,15 + 0,1) = 0,5$ );
- узла 1 с возможным переходом КЗ в узел 3 (интенсивность равна 0,1).

В результате  $L_3 = 1,5 + 1 + 2 \cdot 0,25 + 0,1 = 3,1$ .

Получены примерно одинаковые величины, что свидетельствует о правильности модели исключения узлов. Разница  $\Delta L_3 = 0,1$  объясняется грубым сложением вероятностей в приближенных расчетах.

Результирующие ПН узла 2 определяются в порядке восстановления узла ранга 2 согласно выражениям (4.13)–(4.17). Здесь следует отметить, что одним из смежных узлов является ИП. Отсюда интенсивность внешнего потока КЗ определяется согласно (4.12):

$$\lambda_{3/2} = L_3 - (L_0 + \lambda_{03} + \lambda_{3(2)}) = 2,993 - 1,158 - 0,691 - 0,783 = 0,361.$$

Скорректированные ПН эквивалентного выключателя (см. табл. 4.6):

$$\begin{aligned}\lambda_{03/2} &= \lambda_{03} - \lambda_{03(2)} = 0,691 - 0,191 = 0,5; \\ \varrho_{03/2} &= \frac{\varrho_{03} - \varrho_{03(2)}}{1 - \varrho_{03(2)}} = \frac{0,115 - 0,017}{1 - 0,017} = 0,0997.\end{aligned}$$

Результирующая интенсивность ОТКЗ узла 2:

$$\begin{aligned}L_2 &= \lambda_{03/2} + (\lambda_{33} + \lambda_{3/2})(\varrho_{03(2)} \oplus \varrho_{23}^*) + \lambda_{20} + \lambda_{23} + (\lambda_2 - \lambda_{22}) = \\ &= 0,5 + (1 + 0,361)(0,0997 + 0,1135 - 0,0997 \cdot 0,1135) + \\ &\quad + 1 + 0,69 + 2,15 - 1 = 3,615.\end{aligned}$$

Приближенное значение интенсивности ОТКЗ узла 2:

$$\begin{aligned}L_2 &\approx \lambda_{02} + \lambda_{03} + \lambda_{23} + \lambda_{21} + \lambda_{31}(\varrho_{21} + \varrho_{23}) + \lambda_{11}\varrho_{21} + \lambda_{33}(\varrho_{23} + \varrho_{03}) = \\ &= 3 + 0,5(0,1 + 0,1 + 0,15) + 1 \cdot 0,15 + 1 \cdot (0,1 + 0,1) = 3,53.\end{aligned}$$

Новые значения интенсивности собственных отказов выключателя 2–3:

$$\lambda_{32}^* = \lambda_{23}^* = \lambda_{32} + \lambda_{03/2} + \lambda_{20} = 0,69 + 0,5 + 1 = 2,19.$$

Эквивалентные вероятности пропуска КЗ связи 2–3:

$$\begin{aligned}\varrho_{32}^* &= \varrho_{32} \oplus \varrho_{03} = \varrho_{32} + \varrho_{03} - \varrho_{32}\varrho_{03} = 0,1135 + 0,1 - 0,1135 \cdot 0,1 = 0,202; \\ \varrho_{23}^* &= \varrho_{23} \oplus \varrho_{02} = \varrho_{23} + \varrho_{02} - \varrho_{23}\varrho_{02} = 0,1135 + 0,15 - 0,1135 \cdot 0,15 = 0,246.\end{aligned}$$

Заметим, что на данном этапе появляется несимметрия в вероятности пропуска КЗ эквивалентного выключателя. Действительно, если  $\varrho_{20} \neq \varrho_{30}$ , то  $\varrho_{23}^* \neq \varrho_{32}^*$ .

**Результирующая интенсивность ОТКЗ узла 1.** Интенсивности внешних потоков КЗ определяются согласно выражениям (4.6), где предварительно необходимо вычислить величины:

$$\begin{aligned}A &= L_2 - \lambda_{23} - \lambda_{2(1)} - \varrho_{23}(\lambda_{3(1)} + \lambda_{33}) = \\ &= 3,54 - 0,515 - 1,035 - 0,1135(0,51 + 1) = 1,82; \\ B &= L_3 - \lambda_{23} - \lambda_{3(1)} - \varrho_{32}(\lambda_{2(1)} + \lambda_{22}) = \\ &= 2,933 - 0,515 - 0,51 - 0,1135(1,035 + 1) = 1,68.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\lambda_{2/3,1} &= \frac{A - \varrho_{23}B}{1 - \varrho_{32}\varrho_{23}} = \frac{1,82 - 0,1135 \cdot 1,68}{1 - 0,1135 \cdot 0,1135} = 1,65; \\ \lambda_{3/2,1} &= \frac{B - \varrho_{32}A}{1 - \varrho_{23}\varrho_{32}} = \frac{1,68 - 0,1135 \cdot 1,82}{1 - 0,1135 \cdot 0,1135} = 1,49.\end{aligned}$$

Интенсивность отказов эквивалентного выключателя:

$$\lambda_{23/1} = \lambda_{23} - \lambda_{23(1)} = 2,19 - 0,015 = 2,17.$$

Вероятность пропуска КЗ эквивалентным выключателем:

$$q_{23/1} = \frac{q_{23} - q_{21}q_{13}}{1 - q_{21}q_{13}} = \frac{0,1135 - 0,15 \cdot 0,1}{1 - 0,15 \cdot 0,1} = 0,1;$$

$$q_{32/1} = \frac{q_{32} - q_{31}q_{12}}{1 - q_{31}q_{12}} = \frac{0,1135 - 0,1 \cdot 0,15}{1 - 0,1 \cdot 0,15} = 0,1.$$

Результирующая интенсивность ОТКЗ узла 1:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lambda_{23/1} + q_{23}\lambda_3^\Sigma + q_{32/1}\lambda_2^\Sigma + \lambda_{12} + \lambda_{13} = \\ &= 2,19 + 0,1135(1,231 + 1) + 0,1135(1,316 + 1) + 1 + 0,1 = 4,2. \end{aligned}$$

Приближенные расчеты:

$$\begin{aligned} L_1 &\approx \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{02} + \lambda_{03} + \lambda_{22}(q_{32} + q_{02}) + \lambda_{33}(q_{23} + q_{03}) = \\ &= 3,5 + 2(0,1 + 0,15) + 1(0,1 + 0,1) = 4,2, \end{aligned}$$

позволяющие оценить полученные результаты, основаны на переборе возможных отказов элементов. Отказ (типа «КЗ») узла 3 произойдет, если произойдет отказ:

- любого из инцидентных выключателей (3–0, 3–1, 3–2, суммарная интенсивность этих событий равна  $3 \cdot 0,5 = 1,5$ );
- шунтирующего выключателя 0–2 (интенсивность 1);
- узла 2 или связи 1–2 с возможным переходом КЗ или в узел 0, или в узел 3 (интенсивность равна  $(1 + 1)(0,15 + 0,1) = 0,5$ );
- узла 1 с возможным переходом КЗ в узел (интенсивность равна 0,1).

В результате  $L_3 = 1,5 + 1 + 2 \cdot 0,25 + 0,2 = 3,2$ .

#### 4.4. Узлы ранга 3

##### 4.4.1. Исключение узлов ранга 3

Процедура исключения узлов ранга 3 в модели ОТКЗ состоит из тех же основных этапов, что и аналогичная процедура для узлов второго ранга. Для узлов, ПН которых не являются значимыми в анализе надежности рассматриваемой системы электроснабжения потребителей и не входят в состав множества результирующих ПН, достаточно эффективным считается эквивалентное преобразование «звезда – треугольник» (рис. 4.14).

Относительные вероятности  $q_{\alpha\beta}^*$ ,  $q_{\alpha\gamma}^*$ ,  $q_{\beta\gamma}^*$ ,  $q_{\beta\alpha}^*$ ,  $q_{\gamma\alpha}^*$ ,  $q_{\gamma\beta}^*$  пропуска короткого замыкания для ветвей треугольника определяются из условия эквивалентности пропуска внешнего КЗ из одного узла треугольника в другой. Так, переход КЗ из узла  $\alpha$  в узел  $\beta$  в схеме звезды осуществляется через связи  $\alpha - i$ ,  $i - \beta$  и имеет вероятность  $R_{\alpha\beta} = q_{\alpha i}q_{i\beta}$ .

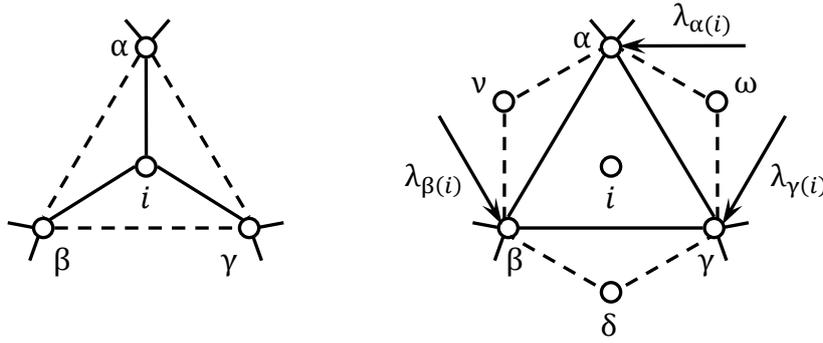


Рис. 4.14. Преобразование «звезда – треугольник»

В схеме треугольника переход возможен либо через эквивалентную связь  $\alpha - \beta$ , либо через два последовательно включенных эквивалентных выключателя  $\alpha - \gamma$ ,  $\gamma - \beta$ , что имеет вероятность  $R_{\alpha\beta} = \varrho_{\alpha\beta}^* \oplus \varrho_{\alpha\gamma}^* \varrho_{\gamma\beta}^*$ . Вероятности в исходной и эквивалентной схемах должны быть одинаковыми ( $\varrho_{\alpha\beta}^* \oplus \varrho_{\alpha\gamma}^* \varrho_{\gamma\beta}^* = \varrho_{\alpha i} \varrho_{i\beta}$ ), что определяет одно из уравнений эквивалентности. Аналогичные рассуждения характерны для остальных пар узлов. В результате формируется следующая система шести уравнений с шестью неизвестными  $\varrho_{\alpha\beta}^*$ ,  $\varrho_{\beta\alpha}^*$ ,  $\varrho_{\alpha\gamma}^*$ ,  $\varrho_{\gamma\alpha}^*$ ,  $\varrho_{\beta\gamma}^*$ ,  $\varrho_{\gamma\beta}^*$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho_{\alpha\beta}^* \oplus \varrho_{\alpha\gamma}^* \varrho_{\gamma\beta}^* = R_{\alpha\beta} = \varrho_{\alpha i} \varrho_{i\beta}; \\ \varrho_{\alpha\gamma}^* \oplus \varrho_{\alpha\beta}^* \varrho_{\beta\gamma}^* = R_{\alpha\gamma} = \varrho_{\alpha i} \varrho_{i\gamma}; \\ \varrho_{\beta\alpha}^* \oplus \varrho_{\beta\gamma}^* \varrho_{\gamma\alpha}^* = R_{\beta\alpha} = \varrho_{\beta i} \varrho_{i\alpha}; \\ \varrho_{\beta\gamma}^* \oplus \varrho_{\beta\alpha}^* \varrho_{\alpha\gamma}^* = R_{\beta\gamma} = \varrho_{\beta i} \varrho_{i\gamma}; \\ \varrho_{\gamma\alpha}^* \oplus \varrho_{\gamma\beta}^* \varrho_{\beta\alpha}^* = R_{\gamma\alpha} = \varrho_{\gamma i} \varrho_{i\alpha}; \\ \varrho_{\gamma\beta}^* \oplus \varrho_{\gamma\alpha}^* \varrho_{\alpha\beta}^* = R_{\gamma\beta} = \varrho_{\gamma i} \varrho_{i\beta}. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Данная система уравнений имеет ярко выраженный нелинейный характер. Для ее решения может быть использован любой итерационный метод с начальным приближением  $\varrho_{kj}^{*(0)} = R_{kj}$ ;  $k, j \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ,  $k \neq j$ .

Второй частью процедуры исключения узла ранга 3 в модели ОТКЗ является определение интенсивностей собственных отказов эквивалентных связей, приводящих к одновременному появлению КЗ в двух смежных узлах при условии отсутствия перехода КЗ в третий узел. Так, одновременный отказ (КЗ) узлов  $\alpha$  и  $\beta$  наблюдается, если при отказе (с КЗ) связи  $\alpha - i$  происходит переход КЗ через связь  $i - \beta$ , или при отказе связи  $\beta - i$  происходит переход КЗ через связь  $i - \alpha$ , или при отказе (с КЗ) узла  $i$  происходит одновременный переход КЗ через связи  $i - \alpha$  и  $i - \beta$ . Аналогичные рассуждения характерны для остальных пар узлов. При этом

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\alpha\beta}^* = \lambda_{\beta\alpha}^* = (\lambda_{\alpha i} \varrho_{i\beta} + \lambda_{\beta i} \varrho_{i\alpha} + \lambda_i \varrho_{i\alpha} \varrho_{i\beta}) \bar{\varrho}_{i\gamma}; \\ \lambda_{\alpha\gamma}^* = \lambda_{\gamma\alpha}^* = (\lambda_{\alpha i} \varrho_{i\gamma} + \lambda_{\gamma i} \varrho_{i\alpha} + \lambda_i \varrho_{i\alpha} \varrho_{i\gamma}) \bar{\varrho}_{i\beta}; \\ \lambda_{\beta\gamma}^* = \lambda_{\gamma\beta}^* = (\lambda_{\beta i} \varrho_{i\gamma} + \lambda_{\gamma i} \varrho_{i\beta} + \lambda_i \varrho_{i\beta} \varrho_{i\gamma}) \bar{\varrho}_{i\alpha}. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Эквивалентные дополнительные потоки КЗ в узлах треугольника связаны сложной корреляционной связью, поскольку отказ любого элемента звезды оказывает воздействие на дополнительные потоки всех узлов. Для определения их интенсивностей предлагается расширить эквивалентную расчетную схему (см. рис. 4.14) внешними узлами  $v$ ,  $\omega$ ,  $\delta$ , которые связаны с рассматриваемым участком ветвями односторонней направленности. Односторонняя (в сторону дополнительных узлов) направленность требуется для исключения возможности воздействия дополнительных узлов на реальное распределение потоков КЗ. Для этого необходимо, чтобы

$$q_{\beta v} = q_{\alpha v} = q_{\alpha \omega} = q_{\gamma \omega} = q_{\beta \delta} = q_{\gamma \delta} = 1;$$

$$q_{v\beta} = q_{v\alpha} = q_{\omega\alpha} = q_{\omega\gamma} = q_{\delta\beta} = q_{\delta\gamma} = 0;$$

$$\lambda_{jk} = 0; \quad j \in \{v, \omega, \delta\}; \quad k \in \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Дополнительные узлы  $v$ ,  $\omega$ ,  $\delta$  моделируют парные отказы типа «ИЛИ» соответствующих вершин треугольника. В частности, нулевое напряжение в узле  $v$  наблюдается, если в схеме треугольника происходит или отказ (типа КЗ) любой из сторон (суммарная интенсивность  $\lambda_{\Sigma}^* = \lambda_{\alpha\beta}^* + \lambda_{\alpha\gamma}^* + \lambda_{\beta\gamma}^*$ ), или появление КЗ в одном из смежных узлов ( $\alpha$  или  $\beta$ ) (интенсивность  $\lambda_{\alpha(i)} + \lambda_{\beta(i)}$ ), или появление КЗ в удаленном узле  $\gamma$  с пропуском КЗ в смежный узел (или  $\alpha$ , или  $\beta$ ). С другой стороны, в схеме звезды отказ узла  $v$  имеет место, если происходит отказ любого из связанного со смежным узлом выключателя ( $\alpha - i$ ,  $i - \beta$ ), или третьего выключателя с последующим переходом КЗ в смежный узел (интенсивность  $\lambda_{\gamma i}(q_{i\alpha} \oplus q_{i\beta})$ ), или исключаемого узла  $i$  с последующим переходом КЗ в смежный узел (интенсивность  $\lambda_i(q_{i\alpha} \oplus q_{i\beta})$ ). Аналогичные условия эквивалентности могут быть представлены для других дополнительных узлов. В результате формируется система линейных уравнений относительно  $\lambda_{\alpha(i)}$ ,  $\lambda_{\beta(i)}$ ,  $\lambda_{\gamma(i)}$ :

$$\begin{cases} \lambda_{\alpha(i)} + \lambda_{\beta(i)} + \lambda_{\gamma(i)}(q_{\gamma\alpha} \oplus q_{\gamma\beta}) + \lambda_{\Sigma}^* = \lambda_{\alpha i} + \lambda_{\beta i} + (\lambda_{\gamma i} + \lambda_i)(q_{i\alpha} \oplus q_{i\beta}); \\ \lambda_{\alpha(i)} + \lambda_{\beta(i)}(q_{\beta\alpha} \oplus q_{\beta\gamma}) + \lambda_{\gamma(i)} + \lambda_{\Sigma}^* = \lambda_{\alpha i} + \lambda_{\gamma i} + (\lambda_{\beta i} + \lambda_i)(q_{i\alpha} \oplus q_{i\gamma}); \\ \lambda_{\alpha(i)}(q_{\alpha\gamma} \oplus q_{\alpha\beta}) + \lambda_{\beta(i)} + \lambda_{\gamma(i)} + \lambda_{\Sigma}^* = \lambda_{\gamma i} + \lambda_{\beta i} + (\lambda_{\alpha i} + \lambda_i)(q_{i\gamma} \oplus q_{i\beta}). \end{cases} \quad (4.20)$$

Решение данной системы уравнений не представляет проблем.

#### 4.4.2. Восстановление узла ранга 3

На этапе восстановления узла  $i$  ранга 3 в модели ОТКЗ считаются известными результирующие ПН узлов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , результирующие интенсивности  $\lambda_{\alpha\beta}$ ,  $\lambda_{\beta\gamma}$ ,  $\lambda_{\alpha\gamma}$  отказов сторон  $\alpha - \beta$ ,  $\beta - \gamma$ ,  $\alpha - \gamma$  треугольника, полученные с учетом шунтирования как «снизу», так и «сверху», а также полученные на этапе исключения узла  $i$  эквивалентные добавки интенсивностей отказов  $\lambda_{\alpha(i)}$ ,  $\lambda_{\beta(i)}$ ,  $\lambda_{\gamma(i)}$  (решение системы уравнений (4.20)),  $\lambda_{\alpha\beta(i)}$ ,  $\lambda_{\beta\gamma(i)}$ ,  $\lambda_{\alpha\gamma(i)}$

(решение (4.19)) и эквивалентных вероятностей пропуска КЗ  $q_{\alpha\beta(i)}$ ,  $q_{\beta\alpha(i)}$ ,  $q_{\alpha\gamma(i)}$ ,  $q_{\gamma\alpha(i)}$ ,  $q_{\beta\gamma(i)}$ ,  $q_{\gamma\beta(i)}$ , полученных при решении (4.18).

Для определения результирующей интенсивности отказов узла  $i$  по аналогии с процедурой восстановления узлов ранга 2 показатели надежности всех окружающих узел  $i$  элементов должны быть скорректированы путем изъятия полученных на этапе исключения узла  $i$  составляющих. Для всех выключателей  $j - k$ ,  $j, k \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\lambda_{jk/i} = \lambda_{jk} - \lambda_{jk(i)};$$

$$q_{jk/i} = q_{jk} \ominus q_{jk(i)} = \frac{q_{jk} - q_{jk(i)}}{1 - q_{jk(i)}}.$$

Каждый из смежных узлов  $\alpha, \beta, \gamma$  должен быть представлен потоком внешних КЗ  $\lambda_{\alpha/i,\beta,\gamma}$ ,  $\lambda_{\beta/i,\alpha,\gamma}$ ,  $\lambda_{\gamma/i,\alpha,\beta}$  без учета воздействия элементов звезды  $\{i, \alpha, \beta, \gamma\}$  и треугольника  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Так, в результирующей интенсивности ОТКЗ узла  $\alpha$  присутствуют составляющие, вызванные отказами: элементов звезды ( $\lambda_{\alpha(i)}$ ); смежных выключателей ( $\lambda_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha\gamma}$ ); выключателя  $\beta - \gamma$  с переходом КЗ в узел  $\alpha$  ( $\lambda_{\beta\gamma} (q_{\beta\alpha} \oplus q_{\gamma\alpha})$ ), а также внешними потоками КЗ, приходящими в узлы  $\beta, \gamma$ , с последующим переходом КЗ в узел  $\alpha$ , т. е.:

$$\left( \lambda_{\beta/i,\alpha,\gamma} (q_{\beta\alpha} \oplus q_{\beta\gamma} q_{\gamma\alpha}) + \lambda_{\gamma/i,\alpha,\beta} (q_{\gamma\alpha} \oplus q_{\gamma\beta} q_{\beta\alpha}) \right).$$

Аналогичную структуру составляющих можно указать для узлов  $\beta, \gamma$ . В результате формируется система линейных уравнений относительно искомым  $\lambda_{\alpha/i,\beta,\gamma}$ ,  $\lambda_{\beta/i,\alpha,\gamma}$ ,  $\lambda_{\gamma/i,\alpha,\beta}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha: \lambda_{\alpha/i,\beta,\gamma} + \lambda_{\beta/i,\alpha,\gamma} (q_{\beta\alpha} \oplus q_{\beta\gamma} q_{\gamma\alpha}) + \lambda_{\gamma/i,\alpha,\beta} (q_{\gamma\alpha} \oplus q_{\gamma\beta} q_{\beta\alpha}) = \\ \quad = L_{\alpha} - \lambda_{\alpha(i)} - \lambda_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha\gamma} - \lambda_{\beta\gamma} (q_{\beta\alpha} \oplus q_{\gamma\alpha}); \\ \beta: \lambda_{\alpha/i,\beta,\gamma} (q_{\alpha\beta} \oplus q_{\alpha\gamma} q_{\gamma\beta}) + \lambda_{\beta/i,\alpha,\gamma} + \lambda_{\gamma/i,\alpha,\beta} (q_{\gamma\beta} \oplus q_{\gamma\alpha} q_{\alpha\beta}) = \\ \quad = L_{\beta} - \lambda_{\beta(i)} - \lambda_{\alpha\beta} - \lambda_{\beta\gamma} - \lambda_{\alpha\gamma} (q_{\alpha\beta} \oplus q_{\gamma\beta}); \\ \gamma: \lambda_{\alpha/i,\beta,\gamma} (q_{\alpha\gamma} \oplus q_{\alpha\beta} q_{\beta\gamma}) + \lambda_{\beta/i,\alpha,\gamma} (q_{\beta\gamma} \oplus q_{\beta\alpha} q_{\alpha\gamma}) + \lambda_{\gamma/i,\alpha,\beta} = \\ \quad = L_{\gamma} - \lambda_{\gamma(i)} - \lambda_{\alpha\gamma} - \lambda_{\beta\gamma} - \lambda_{\alpha\beta} (q_{\beta\gamma} \oplus q_{\alpha\gamma}). \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Результирующая интенсивность отказа узла  $i$  определяется из возможности перехода КЗ из смежного узла и шунтирующего воздействия смежных выключателей:

$$L_i = (\lambda_{\alpha/i,\beta,\gamma} + \lambda_{\alpha\alpha}) q_{\alpha i} + (\lambda_{\beta/i,\alpha,\gamma} + \lambda_{\beta\beta}) q_{\beta i} + (\lambda_{\gamma/i,\alpha,\beta} + \lambda_{\gamma\gamma}) q_{\gamma i} + \\ + \lambda_{\alpha\beta} (q_{\beta i} \oplus q_{\alpha i}) + \lambda_{\alpha\gamma} (q_{\alpha i} \oplus q_{\gamma i}) + \lambda_{\beta\gamma} (q_{\beta i} \oplus q_{\gamma i}) + \lambda_i^*, \quad (4.22)$$

где  $\lambda_i^*$  – интенсивность потока КЗ от ранее (по отношению к узлу  $i$ ) исключенных узлов.

Для последующих расчетов (восстановление остальных, еще не восстановленных узлов) необходимо учесть шунтирующее воздействие восста-

новленных узлов (шунтирование «сверху»), проявляющееся в коррекции ПН выключателей  $\alpha - i$ ,  $\beta - i$ ,  $\gamma - i$ . В частности, одновременный отказ узлов  $\alpha$ ,  $i$ , проявляющийся в интенсивности отказов эквивалентного выключателя  $\alpha - i$ , наблюдается, если происходит непосредственный отказ выключателя  $\alpha - i$ , или при условии отсутствия воздействия элементов звезды происходит отказ связей  $\alpha - \beta$ ,  $\alpha - \gamma$ ,  $\beta - \gamma$  с последующим переходом КЗ в узел  $i$  (интенсивности соответственно  $\lambda_{\alpha\beta/i}(q_{\beta i} \oplus q_{\beta\gamma/i}q_{\gamma i})$ ,  $\lambda_{\alpha\gamma/i}(q_{\gamma i} \oplus q_{\gamma\beta/i}q_{\beta i})$ ,  $\lambda_{\beta\gamma/i}(q_{\beta i} q_{\gamma\alpha/i} \oplus q_{\beta\alpha/i}q_{\gamma i})$ ), или возникает КЗ в одном из узлов треугольника с последующим переходом КЗ в узлы  $\alpha$ ,  $i$ . В результате

$$\lambda_{\alpha i}^* \approx \lambda_{\alpha i} + \lambda_{\alpha\beta/i}(q_{i\beta} \oplus q_{\gamma\beta/i}) + \lambda_{\alpha\gamma/i}(q_{i\gamma} \oplus q_{\beta\gamma/i}) + \lambda_{\beta\gamma/i}(q_{\alpha\gamma/i} \oplus q_{\alpha\beta/i}) + \\ + \lambda_{\gamma/i,\alpha,\beta}q_{i\gamma}q_{\alpha\gamma} + \lambda_{\alpha/i,\beta,\gamma}(q_{i\beta}q_{\beta\alpha/i} \oplus q_{i\gamma}q_{\gamma\alpha/i}) + \lambda_{\beta/i,\alpha,\gamma}q_{i\beta}q_{\alpha\beta}.$$

Знак приближенного равенства поставлен, поскольку здесь игнорируются дополнительные переходы КЗ с вероятностями второго порядка малости. По аналогии корректируются интенсивности  $\lambda_{\beta i}^*$ ,  $\lambda_{\gamma i}^*$ .

#### 4.5. Проверочные расчеты

Для апробирования предложенных методов и алгоритмов были выполнены расчеты тестовой схемы ВНИИЭ [10], которая и на настоящий момент не потеряла своей актуальности. Результаты (программист О. М. Котов) сопоставлялись с данными, рассматриваемыми в [10] как «наиболее близкие к контрольным». Результаты, полученные по разработанному на основе вероятностного эквивалентирования ПК «Струна», не уступают по точности сопоставляемым методам и лучше других по максимальной погрешности интенсивности отказов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математический аппарат расчета показателей структурной надежности является основополагающим при анализе надежности сложных ЭЭС. Он базируется на классических понятиях и процедурах. Однако в чистом виде эти процедуры не приемлемы для многоузловых и многоконтурных расчетных схем. Необходимо отметить, что электротехническая система в отличие от технической требует расширения понятия отказа. Здесь наряду с отказами типа «обрыв», широко используемых в технических системах, рассматриваются отказы типа «короткое замыкание». При этом требуется совершенно новый математический аппарат, связанный с каскадным развитием аварий. Для определения показателей надежности систем с отказами элементов типа «обрыв» достаточно перспективными являются методы, основанные на принципе вероятностного эквивалентирования. Основанный на процедуре свертки – развертки структурных схем метод двухэтапного вероятностного эквивалентирования позволяет в рамках единой процедуры рассчитать ПН системы электроснабжения всех узлов сложнозамкнутой электрической сети.

Метод вероятностного эквивалентирования применим для расчетных схем, представленных в виде как неориентированных, так и частично ориентированных графов. Здесь достаточно успешно могут использоваться процедуры преобразования схем типа «звезда–треугольник», «треугольник–звезда», что позволяет продолжить процесс преобразования расчетной схемы.

Изначально рассматриваемая как приближенная, оценочная, основанная на большом числе допущений и ограничений итерационная процедура показала свою практическую состоятельность при сравнительном анализе большого числа расчетов реальных электрических схем. В основу рассмотренного метода двухэтапного вероятностного эквивалентирования положено преобразование последовательно-параллельных структурных схем. При этом на промежуточных этапах используются классические методы расчета показателей надежности, такие как логико-аналитические, диаграмм состояний и др. В отличие от большинства существующих методов, где расчеты ориентированы на последовательный принцип расчета (эквивалентирование схемы к виду ИП – заданный узел), алгоритмическая процедура свертка – развертка значительно сокращает время расчетов на ЭВМ, т. к. весь процесс эквивалентирования выполняется в два этапа без фиксации узлов, относительно которых выполняется расчет. За счет адаптации вычислительной процедуры расчеты структурной надежности ЭЭС с отказами элементов типа «короткое замыкание» можно выполнять по той же расчетной схеме, что и с отказами типа «обрыв». С целью унификации расчетов элементы электрической сети представляются в виде эквивалентных коммутационных аппаратов.

Математический алгоритм в модели ОТКЗ должен учитывать шунтирующее воздействие КЗ на отдельные подсистемы электрической сети. На этапе восстановления узлов второго ранга в ОТКЗ необходимо моделирова-

ние эквивалента восстановленной части расчетной схемы через одновременные отказы смежных узлов. Определение эквивалентных параметров при этом сводится к процедуре исключения уже восстановленных узлов. Отсюда прямой и обратный ходы преобразований в методе вероятностного эквивалентирования могут быть описаны единой методологией. В модели ОТКЗ необходимо учитывать возможность совместных отказов типа «обрыв» и «КЗ». При этом отказы элементов, приводящие к отказу системы на время, большее длительности оперативных переключений, учитываются в модели ОТО и не учитываются в модели ОТКЗ.

Направленная структурная схема и наличие источников отказов в модели ОТКЗ позволяют моделировать множественные отказы (РЗА, ошибки при оперативных переключениях и др.) дифференцированно по длительности отказа (вплоть до долей секунды). Это существенно расширяет сферу использования аппарата структурной надежности. Увеличение быстродействия программных комплексов, основанных на принципах вероятностного эквивалентирования, достигается применением предварительной структуризации расчетной схемы (районирование) и промежуточного эквивалентирования, суть которого сводится к исключению без последующего восстановления узлов, показатели надежности которых определять не требуется. Разработанные расчетные процедуры позволяют преодолеть недостаток методов эквивалентирования, связанный с трудностью учета отказов, имеющих общую причину. Достигается это формированием и соответствующей обработкой матрицы, коллекций или списков одновременных отказов элементов расчетной схемы.

Приоритетной сферой анализа структурной надежности является проектирование и эксплуатация систем электроснабжения, где более значимыми являются полные отключения электроприемников. В магистральных и распределительных электрических сетях на первый план выходят расчеты показателей режимной и балансовой надежности, где более значимыми являются отклонения за пределы допустимого диапазона параметров электрического режима.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В данном приложении приведен в кратком виде материал наиболее важных сведений из области теории вероятностей, а также базисные определения и теоремы, которые применяются в теории надежности и, следовательно, необходимы для более глубокого понимания рассматриваемых проблем. Излагая эти сведения, попытаемся представить их настолько строго, насколько это возможно в книге, основная задача которой состоит в том, чтобы не объяснять, а применять теорию вероятностей. Поскольку эти приложения не могут служить учебником по теории вероятностей, большинство выводов и доказательств опущено. Для тех, кто желает более детально ознакомиться с теорией вероятностей и связанными с ней вопросами, существует большое количество превосходных учебников. Для студентов инженерных факультетов обычно рекомендуются [52–55].

**Множества.** Вероятность является свойством событий. События, в свою очередь, представляются в виде множеств. Множество представляет собой некоторый набор определенных реальных или вымышленных элементов (в том числе и математических абстракций), в общем случае неупорядоченных и не образующих последовательности. Множество может иметь конечное или бесконечное число элементов или не иметь ни одного элемента (пустое множество). Например, множество нечетных чисел состоит из элементов 1, 3, 5 и т. д. (бесконечное множество); множество игральных карт в колоде состоит из карт с обозначениями 2, 3, ..., В, Д, К, Т (конечное множество), нагрузка в узле изменяется в диапазоне от 0 до 100 МВт (бесконечное, непрерывное множество), совокупность выключателей, находящихся в ремонте, состоит из многообразия их возможных сочетаний и т. д. Если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – члены (или элементы) множества  $A$ , то обычно принято обозначать это следующим образом:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

и если  $x$  является членом множества  $A$ , то это обозначается  $x \in A$ .

Соотношение между двумя множествами зависит от того, имеют эти множества общие элементы или нет. Для двух множеств  $A$  и  $B$  существуют следующие возможности:

а)  $A$  и  $B$  имеют общие элементы, но каждое из множеств имеет также элементы, которые не принадлежат к другому множеству. В этом случае говорят, что множества пересекаются. Например, множество нечетных чисел и множество квадратов целых чисел являются пересекающимися множествами ( $3^2 = 9$  – нечетное число, но нет такого целого числа, чтобы его квадрат был равен 3); один и тот же выключатель может быть установлен в разнотипные комплектные распределительные устройства (КРУ), т. е. является общим элементом множеств выключателей КРУ. Графически пересечение множеств можно проиллюстрировать так, как это изображено на рис. П.1.1, а. Такие иллюстрации называют *диаграммами Вьенна*;

б)  $A$  и  $B$  не имеют общих элементов. В этом случае множества называют взаимно исключающими или непересекающимися. Например, множество людей с двумя голубыми глазами и множество людей с двумя карими глазами являются взаимно исключающими. Диаграмма Вьенна для взаимно исключающих множеств показана на рис. П.1.1, б;

в) одно из множеств целиком включает в себя другое множество. Если, например,  $A$  включает в себя  $B$ , то каждый элемент  $B$  является в то же время элементом  $A$ ; кроме того,  $A$  может иметь элементы, не входящие в  $B$ . В этом случае говорят, что множество  $B$  является подмножеством множества  $A$ , и используют обозначение  $B \subset A$ . Это соотношение между множествами изображено графически на рис. П.1.1, в.

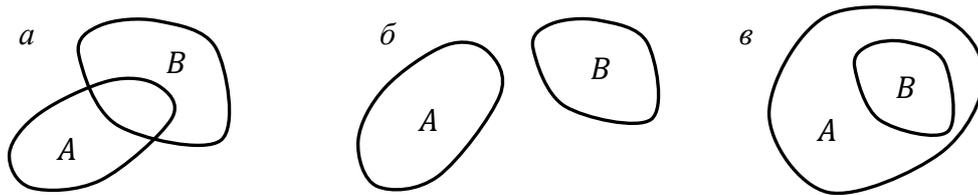


Рис. П.1.1. Соотношение между множествами

Определим несколько операций с множествами. Эти операции иллюстрируются также с помощью диаграмм Вьенна на рис. П.1.2:

а) объединением двух множеств называют множество, которое содержит все элементы составляющих его множеств. Объединение множеств  $A$  и  $B$  обозначают  $A \cup B$  или в некоторых случаях  $A + B$  (не рекомендуется);

б) пересечением двух множеств называют множество, которое содержит все элементы, являющиеся общими для обоих множеств. Пересечение множеств  $A$  и  $B$  обозначают  $A \cap B$ , или иногда  $A \cdot B$  или  $AB$  (не рекомендуется). Отметим, что если  $A$  и  $B$  непересекающиеся множества, то  $A \cap B = 0$ ;

в) разностью  $A - B$  двух множеств называют множество, состоящее из тех элементов множества  $A$ , которые в то же время не являются элементами множества  $B$ . Отметим, что  $(A - B) + B = A + B$ , а не просто  $A$  (в этом заключается одна из причин того, почему следует избегать обозначений «+» и т. п., поскольку они могут привести к недоразумениям, как в данном примере);

г) определим множество  $S$  как множество всех возможных элементов. Отсюда каждое другое множество из тех же элементов будет являться подмножеством множества  $S$ . Дополнением  $\bar{A}$  множества  $A$  называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые не входят в  $A$ . Следовательно,  $\bar{\bar{A}} = S - A$ , или  $A \cup \bar{A} = S$  и  $A \cap \bar{A} = 0$ .

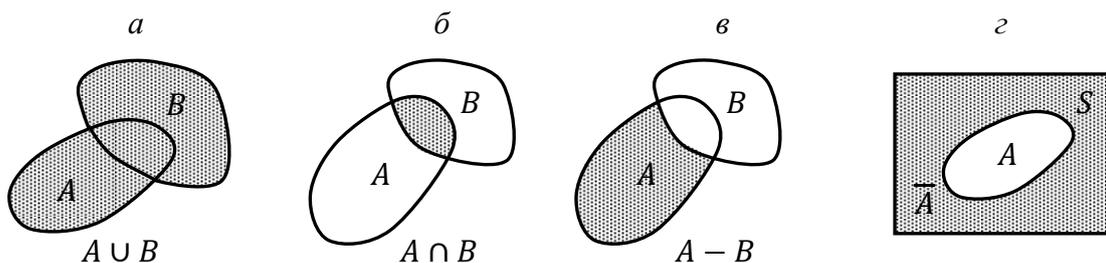


Рис. П.1.2. Операции с множествами

С помощью этих операций можно построить целую алгебру множеств. Нетрудно убедиться в том, что справедливы следующие, часто используемые формулы:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C); \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C); \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \\ A \cap B &= \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}; \quad A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}). \end{aligned}$$

**События.** Обычно под событием понимается нечто, что может произойти или не произойти, например, отказ выключателя в отключении КЗ. Понятие события в том смысле, в каком оно используется в теории вероятностей, обычно связывается с исходами многократно повторяемых экспериментов. Рассмотрим некоторый эксперимент, например бросание двух игральных кубиков. Каждое действие, или испытание, в ходе эксперимента приводит к некоторому исходу (две шестерки), который может оказаться неодинаковым для различных испытаний. Множество всех возможных исходов составляет пространство элементарных событий  $Q$ . Однако событием может быть не только элемент  $Q$ , но и некоторое подмножество  $Q$ , включающее в себя все исходы, которые удовлетворяют некоторому критерию или требованию, например сумма цифр, выпавших при бросании двух кубиков, составляет 9. При каждом испытании событие либо происходит, либо не происходит в соответствии с тем, удовлетворяется или не удовлетворяется заданный критерий. Подобно тому, как это делалось для множеств, можно определить следующие операции над событиями. В частности, объединение  $E_A \cup E_B$  есть событие, состоящее в том, что происходит либо событие  $E_A$ , либо событие  $E_B$ , либо оба события вместе. Два события  $E_A$  и  $E_B$  считаются несовместными, если может произойти либо то, либо другое, но невозможно появление и того, и другого одновременно:  $E_A \cap E_B = \Theta$ , где  $\Theta$  – невозможное событие.

**Вероятность.** Вероятность – мера, связанная с событиями. Более точно вероятность есть действительная функция, определенная в пространстве событий, что просто означает, что каждому событию соответствует некоторое значение вероятности. Значения вероятностей ограничены таким образом, что они могут находиться на отрезке от 0 до 1, причем значение 1 соответствует достоверному (обязательно произойдет) событию, а значение 0 – невозможному событию. Таким образом, вероятность некоторого события  $E$  –  $P[E]$  – должна удовлетворять следующим требованиям:

$$0 \leq P[E] \leq 1; \tag{П.1.1}$$

$$P[\Omega] = 1, \tag{П.1.2}$$

где  $\Omega$  – достоверное событие.

Кроме того, для двух несовместимых событий  $E_A$  и  $E_B$ :

$$P[E_A \cup E_B] = P[E_A] + P[E_B]; \quad P[E_A \cap E_B] = 0. \tag{П.1.3}$$

Три утверждения (П.1.1), (П.1.2) и (П.1.3) называют аксиомами вероятности (они постулируются, но не доказываются). На основе этих аксиом строится вся теория вероятностей. Совершенно очевидно, что приведенные аксиомы не могут помочь определить значение вероятности данного конкретного события. Эти аксиомы позволяют только определить правила оперирования с вероятностями. Реальные численные значения вероятностей необходимо находить на основе опыта или рассуждений. Соответственно те способы, с помощью которых можно численно оценить значения вероятностей, подразделяются на два класса, первый из которых основан на экспериментальных данных (апостериорные вероятности), а второй основан на предварительных суждениях (априорные вероятности).

Подход, основанный на экспериментальных данных, называют методом относительной частоты. В этом методе некий эксперимент повторяют  $n$  раз, и если из  $n$  испытаний было  $n_E$  таких, когда произошло событие  $E$ , то вероятность возникновения события  $E$  оценивается как  $n_E/n$ . Это приближение улучшается по мере роста  $n$ , и точное значение  $P[E]$  дается формулой:

$$P[E] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_E}{n}. \quad (\text{П.1.4})$$

Вероятности, полученные с помощью (П.1.4), удовлетворяют аксиомам (точнее, аксиомы определены так, чтобы соответствовать вероятностям, полученным методом относительных частот). До того как были сформулированы аксиомы Колмогорова, понятие вероятности определялось только с помощью соотношения (П.1.4). Это определение вызывает некоторую неудовлетворенность, поскольку математическое понятие определяется через предел последовательности экспериментальных данных (при этом неявно подразумевается, что такой предел вообще существует). Однако в практике интерпретация вероятности как относительной частоты все же остается наиболее надежным способом для получения численных значений вероятностей.

Из априорных подходов, прежде всего, необходимо отметить подход, основанный на понятии равновероятных исходов. Это понятие называют иногда *классическим определением вероятности*. Можно утверждать, что если все исходы некоторого эксперимента равновероятны, то вероятность события определяется соотношением числа благоприятных исходов эксперимента к общему числу возможных исходов. Например, при бросании игрального кубика можно полагать все шесть возможных исходов равновероятными. Тогда вероятность того, что на кубике выпадает число 3, равна  $1/6$ , а вероятность выпадания числа не меньше трех равна отношению числа благоприятных исходов (четыре исхода) к общему числу исходов, т. е.  $4/6$ . Этот результат можно получить без всяких экспериментов. Такой подход также дает численные значения вероятностей, которые удовлетворяют перечисленным выше аксиомам.

Другой априорный подход основан на мнении или рассуждении. Этот подход не лишен смысла, и в действительности часто случается, что можно «угадать» вероятности исходов в проводимом или планируемом эксперимен-

те. Так, основываясь на знаниях об уровне мастерства игроков, можно приписать некоторую вероятность событию, что данный игрок выиграет игру, даже если игроки встречаются в первый раз. Этот подход иногда применяют в инженерном деле, но если первоначально возможно использование таких оценок вероятностей, то в дальнейшем, как только будет накоплено достаточное количество экспериментальных данных, желательно корректировать их оценками, основанными на относительных частотах.

**Условная вероятность.** Часто случается так, что вероятность события  $A$  зависит от того, произошло или не произошло некоторое другое событие  $B$ . В таких случаях вероятность является условной и для ее обозначения используют формулу  $P[A|B]$ , означающую вероятность события  $A$  при условии, что  $B$  произошло. Например, вероятность появления дефицита мощности в ЭЭС зависит от того, включен или отключен генератор 500 МВт.

Зная условные вероятности и вероятности определяющих событий, можно определить безусловную вероятность рассматриваемого события. Событие  $A$  происходит при условии, что событие  $B$  либо произошло (вероятность  $P[B]$ ), либо не произошло (вероятность  $P[\bar{B}]$ ). Отсюда

$$P[A] = P[A|B] P[B] + P[A|\bar{B}] P[\bar{B}].$$

Обобщая, можно сказать, если  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  образуют полную группу несовместных событий

$$\sum_{i=1}^n P[B_i] = 1; \quad P[B_i \cap B_j] = 0, \quad i \neq j,$$

то

$$P[A] = \sum_{i=1}^n P[A|B_i] \cdot P[B_i]. \quad (\text{П.1.5})$$

Данная формула носит название *формулы полной вероятности*.

Два события  $A$  и  $B$  являются независимыми, если  $P[A|B] = P[A]$ .

Если произошло событие  $B$ , а затем событие  $A$ , то это означает, что имеет место одновременное наступление двух событий  $A$  и  $B$  (событие  $P[A \cap B]$ ). Отсюда

$$P[A \cap B] = P[A|B] \cdot P[B]. \quad (\text{П.1.6})$$

Но одновременное наступление двух событий  $A$  и  $B$  возможно и в том случае, если первым наступило событие  $A$ . Тогда

$$P[A \cap B] = P[A|B] \cdot P[B] = P[B|A] \cdot P[A].$$

Следствием этого уравнения является теорема Байеса:

$$P[A|B] = P[B|A] \cdot \frac{P[A]}{P[B]}. \quad (\text{П.1.7})$$

Это уравнение позволяет вводить поправки в априорные значения вероятностей  $P[A]$  на основе некоторых экспериментальных данных, представ-

ленных в виде  $P[A|B]$  и  $P[B]$ . Кроме того, если события  $A$  и  $B$  являются независимыми ( $P[A|B] = P[A]$ ), то  $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$ .

С учетом (П.1.6) формула полной вероятности принимает вид:

$$P[A] = \sum_{i=1}^n P[A \cap B_i].$$

Вероятность объединения двух событий

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B].$$

Если события  $A$  и  $B$  являются независимыми, то

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B].$$

Рассмотрим в качестве примера систему электроснабжения, состоящую из двух независимых элементов – линии электропередачи (элемент  $L$ ) с вероятностью отказа  $q_L$  и трансформатора (элемент  $T$ ) с вероятностью отказа  $q_T$ . Работоспособность системы возможна лишь при работоспособном состоянии обоих элементов  $S = L \cap T$ . При этом соответствующая вероятность

$$P[S] = P[L \cap T] = P[L] \cdot P[T] = p_L p_T,$$

где  $p_L = 1 - q_L$ ;  $p_T = 1 - q_T$ .

Вероятность отказа системы электроснабжения

$$P[\bar{S}] = P[\overline{L \cap T}] = P[\bar{L} \cup \bar{T}] = P[\bar{L}] + P[\bar{T}] - P[\bar{L}] \cdot P[\bar{T}] = q_L + q_T - q_L q_T.$$

**Случайные величины.** Случайная величина – это величина, которая принимает в результате опыта одно из совокупности возможных значений, причем появление того или иного значения этой величины до ее измерения нельзя точно предсказать. Случайные величины могут принимать дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные значения. Соответственно случайные величины классифицируют на дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные (смешанные).

**Примеры:** число генераторов, которые в следующем месяце будут находиться в состоянии аварийного восстановления, – дискретная случайная величина; рост главного диспетчера, длительность периода между двумя отказами выключателя, нагрузка энергосистемы – все это примеры непрерывных случайных величин; зарплата рабочего на сдельной работе при условии, что она не меньше минимально допустимой; переток мощности по линии электропередачи с ограниченной пропускной способностью – это примеры смешанных случайных величин.

Случайная величина может быть как одномерной, например суммарная нагрузка ЭЭС, так и многомерной, где представлена целая система одномерных взаимосвязанных случайных величин, например нагрузка ЭЭС как вектор, состоящий из нагрузок отдельных узлов ЭЭС.

Результаты опытов могут характеризовать не только отдельные элементарные исходы в схеме испытаний, но и некоторые сопутствующие (функциональные) числовые характеристики, которые вслед за случайным

исходом принимают случайные значения. В качестве примера здесь может служить ущерб от недоотпуска электроэнергии потребителям, зависящий от момента возникновения аварии, глубины ограничения нагрузки, длительности аварийного восстановления.

**Методы описания случайных величин.** Описать случайную величину можно с помощью функции распределения  $F(x)$ , которая определяет вероятность того, что значение случайной величины строго меньше вещественного числа  $x$ . Из этого, в частности, следует, что вероятность попадания значения случайной величины в интервал  $[a, b)$  равна  $F(b) - F(a)$ .

Функция распределения произвольной случайной величины обладает следующими свойствами:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;
- $F(x)$  монотонно не убывает, т. е., если  $x_1 < x_2$ , то  $F(x_1) \leq F(x_2)$ ;
- $F(x)$  непрерывна слева.

Если случайная величина  $\xi$  дискретна, то полное и однозначное математическое описание ее распределения определяется указанием вероятностей  $p_k = P(\xi = x_k)$  всех возможных значений этой случайной величины.

Функция распределения дискретной случайной величины

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

Преимущество использования функции распределения заключается в том, что с ее помощью удастся достичь единообразного математического описания дискретных, непрерывных и дискретно-непрерывных случайных величин. Каждая случайная величина имеет свою функцию распределения. Однако одна и та же функция распределения может описывать разные случайные величины.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория надежности является развитием теории вероятности и математической статистики. Она наследует их основные понятия, определения и функциональные закономерности. Имеет смысл конспективно упомянуть те вероятностные функции, которые используются при расчетах балансовой надежности ЭЭС. К их числу относятся: функция распределения  $F(t)$ , дополнительная функция (часто называемая функцией надежности)  $R(t) = 1 - F(t)$ , плотность распределения  $f(t)$  и функция интенсивности  $\lambda(t) = f(t)/R(t)$ . Взаимосвязь между этими функциями представлена в табл. П.2.1.

Таблица П.2.1

Взаимосвязь между вероятностными функциями

Функция	Определяющее соотношение	$F(t)$	$R(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$F(t)$	$\int_0^t f(t) dt$	—	$1 - R(t)$	$\int_0^t f(t) dt$	$1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right)$
$R(t)$	$1 - F(t)$	$1 - F(t)$	—	$\int_t^\infty f(t) dt$	$\exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right)$
$f(t)$	$\frac{d}{dt}F(t)$	$\frac{d}{dt}F(t)$	$-\frac{d}{dt}R(t)$	—	$\lambda(t) \exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right)$
$\lambda(t)$	$-\frac{f(x)}{R(x)}$	$\frac{F'(t)}{1 - F(t)}$	$-\frac{d}{dt}[\ln R(t)]$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(t) dt}$	—

### Распределения дискретных случайных величин

**Биномиальное распределение.** Наиболее широкое применение для описания дискретных случайных величин, в частности числа аварийно отключенных генераторов, получило биномиальное распределение. Вероятность  $q(n, k)$  совместного отказа  $k = 0, 1, \dots, n$  элементов в группе из  $n$  элементов при одинаковой вероятности  $q$  независимого отказа одного элемента выражается формулой:

$$q(n, k) = C_n^k q^k p^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} q^k p^{n-k},$$

где  $p = 1 - q$  – вероятность безотказной работы элемента;  $C_n^k$  – число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ .

Представленное выражение является отражением общего члена биномиального разложения по степеням  $q$ , т. е.:

$$(q + p)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k q^k p^{n-k} = 1. \quad (\text{П.2.1})$$

Обычно для определения вероятностей биномиального распределения используется рекуррентное соотношение:

$$q(n, k) = q(n, k - 1) \frac{n - k + 1}{k} \frac{q}{1 - q}.$$

Математическое ожидание случайной величины, описываемой биномиальным распределением,  $M = nq$ . Дисперсия:  $D = npq$ . В качестве примера в табл. П.2.2 приведены вероятности  $q(n, k)$  аварийного отключения  $k$  блоков в системе из четырех агрегатов мощностью 50 МВт с  $q = 0,04$  и  $q = 0,1$ . Функцию распределения характеризует накопленная вероятность  $Q(n, k) = \sum_{i=1}^k q(n, i)$  – вероятность того, что число отказавших блоков не больше  $k$ .

Таблица П.2.2

Биномиальное распределение

Число отказов	Потеря мощности, МВт	$q = 0,04$		$q = 0,1$	
		$q(n, k)$	$Q(n, k)$	$q(n, k)$	$Q(n, k)$
0	0	0,8443	0,8493	0,6561	0,6561
1	50	0,1416	0,9909	0,2916	0,9477
2	100	$8,847 \cdot 10^{-3}$	0,9997	0,0486	0,9963
3	150	$2,458 \cdot 10^{-4}$	0,999998	$3,6 \cdot 10^{-3}$	0,9999
4	200	$2,56 \cdot 10^{-6}$	1,0	$1 \cdot 10^{-4}$	1,0

В частности, для  $k = 1, q = 0,04$  имеем  $q(4, 1) = 4 \cdot 0,04 \cdot 0,96^3 = 0,1416$ .

При  $k = 2: q(4, 2) = 6 \cdot 0,04^2 \cdot 0,96^2 = 0,0088$ .

Из табл. П.2.2 видно, что  $q(n, k)$  убывает экспоненциально. Однако для больших  $n$  форма графика меняется и становится колоколообразной (рис. П.2.1). В теории вероятности доказано, что биномиальное распределение при  $n \rightarrow \infty$  является асимптотически нормальным с математическим ожиданием  $M = nq$  и дисперсией  $D = npq$  (предельная теорема Муавра-Лапласа). Замена биномиального распределения нормальным не приводит к большой погрешности, если  $D \geq 9$ .

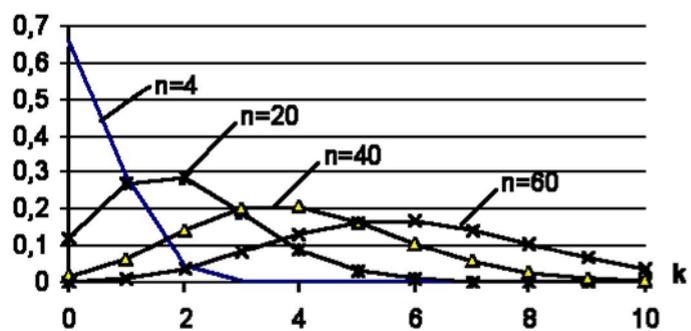


Рис. П.2.1. Биномиальное распределение

Для практических целей часто желательно знать наиболее вероятное число отключенных блоков  $K_M$ . Вероятность биномиального распределения

имеет наибольшее значение, когда  $K_M$  равно целой части выражения  $(n + 1)q$ . Если это выражение является целым, то максимум вероятности наблюдается и для предыдущего целого значения  $k$ . В приведенном на рис. П.2.1 примере при  $n = 20$  и  $q = 0,1$  наиболее вероятное число отключенных блоков  $K_M = \text{int}(21 \cdot 0,1) = 2$ , а при  $n = 40$   $K_M = 4$ . Отличие от нуля наиболее вероятной величины определяет необходимость учета кратных отказов элементов ЭЭС. Сверх того, только такие отказы и представляют интерес в теории надежности ЭЭС, поскольку энергосистема проектируется таким образом, что любой единичный отказ, как правило, не приводит к нарушению ее функционирования (критерий « $n - 1$ »).

Биномиальное распределение обладает еще одним интересным с практической точки зрения свойством. Если  $q > n/(n + 1)$ , то последовательность  $q(n, k)$  является монотонно возрастающей, а при  $q < 1/(n + 1)$  она монотонно убывает (в рассмотренном выше примере  $q = 0,04 < 1/5$ ). Приведенные соотношения могут служить ориентиром при выборе аппроксимирующего распределения.

Биномиальное распределение нескольких групп элементов строится исходя из соотношения, подобного (П.2.1):

$$\prod_{i=1}^N (p_i + q_i)^{n_i} = \prod_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n_i} C_{n_i}^k q_i^k p_i^{n_i-k} = 1. \quad (\text{П.2.2})$$

Отсюда комбинированная вероятность того, что в группе  $i = 1, \dots, N$  произошел отказ  $k_i$  элементов:

$$Q = \prod_{i=1}^N C_{n_i}^{k_i} q_i^{k_i} p_i^{n_i-k_i}.$$

**Пример.** Пусть на электростанции ЭС1 установлено 5 генераторов мощностью по 100 МВт с вероятностью отказа  $q_1 = 0,1$ , а на электростанции ЭС2 – 4 генератора мощностью по 200 МВт с вероятностью отказа  $q_1 = 0,08$ . Определить вероятность отключения генерации мощностью 300 МВт.

**Решение.** Отключение заданной генерации возможно при отключении либо трех генераторов на ЭС1, либо одного генератора на ЭС1 и одного на ЭС2. При этом

$$\begin{aligned} Q &= C_5^3 q_1^3 p_1^2 + C_5^1 q_1 p_1^4 \cdot C_4^1 q_2 p_2^3 = \\ &= 10 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^2 + (5 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4) \cdot (4 \cdot 0,08 \cdot 0,92^3) = 0,0898. \end{aligned}$$

**Распределение Пуассона.** При малых вероятностях  $q$  биномиальное распределение, как правило, аппроксимируется однопараметрическим распределением Пуассона. Здесь вероятность появления случайной величины  $x$  определяется по относительно простой, не требующей вычисления числа сочетаний, формуле:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона определяются параметром  $\lambda$ :  $M = D = \lambda$ . Условие равенства (с допустимой погрешностью) МО и дисперсии может служить критерием для правомочности замены биномиального распределения распределением Пуассона.

Приравнивая математические ожидания распределений Пуассона и биномиального, получаем условие для аппроксимации:

$$\lambda = nq.$$

При этом

$$q(n, k) \approx \frac{(nq)^k}{k!} e^{-nq}.$$

Для сопоставления в табл. П.2.3 приведены распределения: биномиальное и Пуассона ( $n = 20$ ,  $q = 0,001$  и  $0,1$ ).

Таблица П.2.3

Сопоставление распределений: биномиального и Пуассона

$k$	$q = 0,001$			$q = 0,1$		
	Биномиальное	Пуассона	Ошибка, %	Биномиальное	Пуассона	Ошибка, %
0	0,980	0,980	0	0,121	0,135	-11
1	0,020	0,020	0	0,270	0,271	0
2	$1,87 \cdot 10^{-4}$	$1,96 \cdot 10^{-4}$	-5	0,285	0,271	5
3	$1,12 \cdot 10^{-6}$	$1,31 \cdot 10^{-6}$	-17	0,190	0,1801	5
4	$4,77 \cdot 10^{-9}$	$6,53 \cdot 10^{-9}$	-37	0,09	0,090	0
5	$1,53 \cdot 10^{-11}$	$2,61 \cdot 10^{-11}$	-71	0,032	0,0361	-13
6	$3,82 \cdot 10^{-14}$	$8,71 \cdot 10^{-14}$	-128	0,009	0,0121	-36

Нетрудно увидеть, что рассматриваемые распределения практически совпадают. В то же время при больших  $k$  относительная погрешность становится столь значительной (при  $k = 20$  это  $1,6 \cdot 10^7 \%$ ), что если интерес представляет именно область малых вероятностей, то аппроксимация становится просто недопустимой. Здесь следует отметить, что реально нас интересуют вероятности не ниже  $10^{-6}$ , а в этом диапазоне погрешность относительно невелика.

Представляет интерес поведение ошибки аппроксимации (рис. П.2.2). Нетрудно видеть, что она подчинена некоторой функциональной зависимости и, если известна ее аналитическая структура (например полином или лучше экспонента), то возможна дополнительная коррекция аппроксимирующей функции.

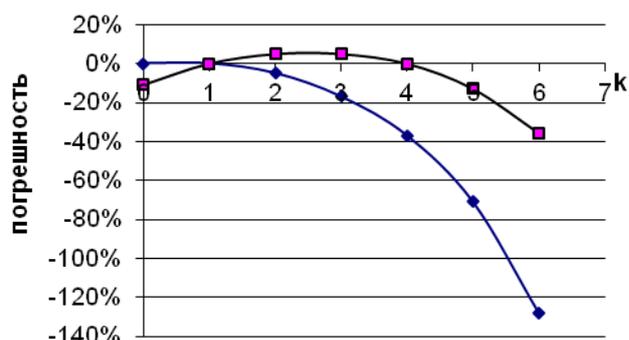


Рис. П.2.2. Ошибка аппроксимации

Как правило, распределение Пуассона описывает закономерности появления внезапных отказов в сложных системах. Оно используется также при моделировании функции распределения нескольких групп генераторов с отличающимися параметрами. Так, для  $L$  групп генераторов с параметрами  $\{n_j, q_j, P_j, \dots, \lambda_j = n_j q_j, j = 1, \dots, L\}$ , где  $P_j$  – мощность генератора группы  $j$ , функция распределения отключенной мощности может быть представлена в виде формулы, часто называемой формулой сложной суммы:

$$F(x) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_L} \frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!} \frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!} \dots \frac{\lambda_L^{k_L}}{k_L!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_L)}, \quad \sum_{j=1}^L k_j P_j < x. \quad (\text{П.2.3})$$

Здесь вероятность отказа  $k_i$  генераторов группы  $i$  моделируется распределением Пуассона. Несмотря на то что формула называется сложной, расчеты по ней существенно проще, нежели расчеты с использованием (П.2.2). Однако снижение трудоемкости связано с увеличением погрешности, особенно в области маловероятных событий.

Для сопоставления распределений рассмотрим приведенный выше пример. Согласно условиям  $\lambda_1 = n_1 q_1 = 5 \cdot 0,1 = 0,5$ ,  $\lambda_2 = n_2 q_2 = 4 \cdot 0,08 = 0,32$ . Применяя распределение Пуассона, получаем

$$Q = \frac{0,5^3}{3!} e^{-0,5} + \frac{0,5^3}{1!} e^{-0,5} \cdot \frac{0,32^3}{1!} e^{-0,32} = e^{-0,5} \left( \frac{0,5^3}{6} + 0,5 \cdot 0,32 e^{-0,32} \right) = 0,083,$$

что близко к результату  $Q = 0,0898$  (погрешность 7,5 %). Реально вероятности отказов элементов ЭЭС значительно меньше, что дает основание рекомендовать распределение Пуассона для практического использования.

### Распределения непрерывных случайных величин

Наиболее часто используемые в расчетах надежности ЭЭС распределения непрерывных случайных величин представлены в табл. П.2.4. Непоказанные в таблице аналитические выражения имеют громоздкую структуру и вычисляются либо через показанные функции (с использованием табл. П.2.4.), либо путем их интегрирования или дифференцирования согласно определению рассматриваемой величины.

**Нормальное распределение.** Большинство случайных величин (например, мощность нагрузки энергосистемы) описывается нормальным распределением (НР). Как правило, данное распределение применяется к таким случайным величинам, которые зависят от большого числа случайных факторов или представляют сумму некоторого числа случайных величин. В теории вероятности показано (центральная предельная теорема Ляпунова), что независимо от вида распределений составных событий распределение результирующего события будет асимптотически приближаться к нормальному по мере увеличения числа составных событий. С другой стороны, НР является асимптотически предельным для большинства непрерывных распределений (гамма-, Стьюдента и др.).

Таблица П.2.4

## Функции распределения

Распределение	$F(x), R(x)$	$f(x)$	$\lambda(x)$	МО	Дисперсия	Примечание
Нормальное	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	–	$m$	$\sigma^2$	Для $\forall x$
Экспоненциальное	$R(x) = \exp(-\lambda x)$	$\lambda \exp(-\lambda x)$	$\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$x \geq 0$
Вейбулла	$R(x) = \exp(-(\beta x)^\alpha)$	$\alpha\beta(\beta x)^{\alpha-1} \exp(-(\beta x)^\alpha)$	$\alpha\beta(\beta x)^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$		$x \geq 0$
Гамма	$F(x) = \gamma(\beta x, \alpha)$	$\frac{\beta(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}$	–	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$x \geq 0$
Эрланга	$R(x) = \sum_{r=0}^{a-1} \frac{(\beta x)^r}{r!} e^{-\beta x}$	$\frac{\beta(\beta x)^{a-1}}{(a-1)!} e^{-\beta x}$	$\frac{(\beta x)^{a-1}}{(a-1)! \sum_{r=0}^{a-1} \frac{(\beta x)^r}{r!}}$	$\frac{a}{\beta}$	$\frac{a}{\beta^2}$	$a$ – целое $a > 0$

В приведенных выражениях  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$  – гамма-функция;  $\gamma(t, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} e^{-u} du$  – неполная гамма-функция.

Широко известен порожденный НР критерий «трех или двух сигм», согласно которому случайная величина практически не отклоняется от своего математического ожидания на величину, большую трех среднеквадратичных отклонений  $\sigma$ . При использовании критерия «две сигмы» вероятность отклонения на величину, большую  $2\sigma$ , составляет 4,6 %, чем часто можно пренебречь. В инженерной практике значимость НР несколько преувеличена. Часто его используют там, где более уместным было бы применение иного распределения. Следует тщательно, по известным из теории вероятности критериям, проверять допустимость использования НР для описания рассматриваемых случайных величин. Функция интенсивности нормального распределения имеет возрастающий характер, следовательно, данным распределением можно описывать длительность безотказной работы стареющих элементов. Экспоненциальное (показательное) распределение играет ключевую роль в теории надежности. Большинство математических моделей, относящихся к СН ЭЭС, основано на предположении об экспоненциальном характере функции распределения. Согласно табл. П.2.4 функция надежности

$$R(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right).$$

**Экспоненциальное распределение** отражает частный случай, когда  $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ . При этом  $R(t) = e^{-\lambda t}$ . Основные значения экспоненциальной функции представлены в табл. П.2.5

**Распределение Вейбулла.** Для реальных объектов функция интенсивности отказов имеет не постоянный, как у экспоненциального распределения, а корытообразный характер, где определяются три интервала: период отрицательного старения, где  $\lambda(t)$  имеет ниспадающий характер, период  $\lambda(t) \approx \text{const}$  и период положительного старения, где  $\lambda(t)$  возрастает во времени.

Дополнительная функция в распределении Вейбулла имеет вид  $R(x) = \exp(-(\beta x)^\alpha)$ . Изменением параметра  $\alpha$  это распределение позволяет описать специфику всех трех периодов. При  $\alpha = 1$  элемент не стареет, при  $\alpha < 1$  имеет место отрицательное, а при  $\alpha > 1$  положительное старение.

В теории вероятности распределение Вейбулла известно как предельное распределение минимальной из совокупности случайных величин с одним и тем же распределением.

**Распределения гамма и Эрланга.** В теории надежности показано, что если длительность одной стадии многостадийного процесса описывается экспоненциальным распределением с параметром  $\beta$ , то длительность стадийного процесса описывается распределением Эрланга с параметрами  $\beta$  и  $a$ , основные функции которого представлены в табл. П.2.4.

Таблица значений функции  $y = e^{-x}$ 

$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
0	1,0	0,4	0,6703	0,8	0,4493	3,0	0,0498
0,01	0,99	0,41	0,6637	0,81	0,4449	3,1	0,045
0,02	0,9802	0,42	0,657	0,82	0,4404	3,2	0,0408
0,03	0,9704	0,43	0,6505	0,83	0,436	3,3	0,0369
0,04	0,9608	0,44	0,644	0,84	0,4317	3,4	0,0334
0,05	0,9512	0,45	0,6376	0,85	0,4274	3,5	0,0302
0,06	0,9418	0,46	0,6313	0,86	0,4232	3,6	0,0273
0,07	0,9324	0,47	0,625	0,87	0,419	3,7	0,0247
0,08	0,9231	0,48	0,6188	0,88	0,4148	3,8	0,0224
0,09	0,9139	0,49	0,6126	0,89	0,4107	3,9	0,0202
0,1	0,9048	0,5	0,6065	0,9	0,4066	4,0	0,0183
0,11	0,8958	0,51	0,6005	0,91	0,4025	4,1	0,0166
0,12	0,8869	0,52	0,5945	0,92	0,3985	4,2	0,015
0,13	0,8781	0,53	0,5886	0,93	0,3946	4,3	0,0136
0,14	0,8694	0,54	0,5827	0,94	0,3906	4,4	0,0123
0,15	0,8607	0,55	0,5769	0,95	0,3867	4,5	0,0111
0,16	0,8521	0,56	0,5712	0,96	0,3829	4,6	0,0101
0,17	0,8437	0,57	0,5655	0,97	0,3791	4,7	0,0091
0,18	0,8353	0,58	0,5599	0,98	0,3753	4,8	0,0082
0,19	0,827	0,59	0,5543	0,99	0,3716	4,9	0,0074
0,2	0,8187	0,6	0,5488	1,0	0,3679	5,0	0,0067
0,21	0,8106	0,61	0,5434	1,1	0,3329	5,1	0,0061
0,22	0,8025	0,62	0,5379	1,2	0,3012	5,2	0,0055
0,23	0,7945	0,63	0,5326	1,3	0,2725	5,3	0,005
0,24	0,7866	0,64	0,5273	1,4	0,2466	5,4	0,0045
0,25	0,7788	0,65	0,522	1,5	0,2231	5,5	0,0041
0,26	0,7711	0,66	0,5169	1,6	0,2019	5,6	0,0037
0,27	0,7634	0,67	0,5117	1,7	0,1827	5,7	0,0033
0,28	0,7558	0,68	0,5066	1,8	0,1653	5,8	0,003
0,29	0,7483	0,69	0,5016	1,9	0,1496	5,9	0,0027
0,3	0,7408	0,7	0,4966	2,0	0,1353	6,0	0,0025
0,31	0,7334	0,71	0,4916	2,1	0,1225	6,1	0,0022
0,32	0,7261	0,72	0,4868	2,2	0,1108	6,2	0,002
0,33	0,7189	0,73	0,4819	2,3	0,1003	6,3	0,0018
0,34	0,7118	0,74	0,4771	2,4	0,0907	6,4	0,0017
0,35	0,7047	0,75	0,4724	2,5	0,0821	6,5	0,0015
0,36	0,6977	0,76	0,4677	2,6	0,0743	6,6	0,0014
0,37	0,6907	0,77	0,463	2,7	0,0672	6,7	0,0012
0,38	0,6839	0,78	0,4584	2,8	0,0608	6,8	0,0011
0,39	0,6771	0,79	0,4538	2,9	0,055	6,9	0,001
0,4	0,6703	0,8	0,4493	3,0	0,0498	7,0	0,0009

Поскольку МО длительности одной стадии составляет  $M = 1/\beta$ , а дисперсия  $D = 1/\beta^2$  (экспоненциальное распределение), то понятно, что в силу стадийности процесса для распределения Эрланга эти величины должны быть в  $a$  раз больше. Важность этого класса распределений вытекает из двух тесно связанных фактов. Первым является связь с экспоненциальным распределением, которое является частным случаем при  $a = 1$ , вторым – простота преобразования Лапласа, о котором здесь не говорится, но которое в теории надежности и теории восстановления играет исключительно важную роль. Обладая математическим аппаратом преобразования Лапласа, можно достаточно просто получить решение многих задач надежности. В частности, преобразование Лапласа плотности экспоненциального распределения с параметром  $\beta$ :

$$f_e^*(s) = \frac{\beta}{\beta + s},$$

а плотности распределения Эрланга:

$$f_{\text{Э}}^*(s) = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^a = (f_e^*(s))^a.$$

Гамма-распределение отличается от распределения Эрланга тем, что параметр  $\alpha$  здесь может принимать произвольные, а не только целочисленные значения. Учитывая свойства гамма-функций, нетрудно показать, что при целых  $\alpha$  гамма-распределение совпадает с распределением Эрланга. Гамма-распределение является асимметричным, меняясь от экспоненциального при  $\alpha = 1$  до нормального при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Асимметричность гамма-распределения определяет его универсальный характер. Подбирая  $\alpha$  и  $\beta$ , с его помощью можно достаточно точно описать реальный случайный процесс. В справочной литературе имеются таблицы гамма-распределения, однако возможность простой алгоритмической реализации распределения Эрланга позволяет выполнять расчеты функций гамма-распределения путем интерполяции распределения Эрланга по параметру  $\alpha$ .

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АБУ – абсолютный базовый узел.  
АВР – автоматический ввод резерва.  
АПВ – автоматическое повторное включение.  
БР – базисный разрез.  
БУ – базовый узел.  
ВПКЗ – вероятность пропуска КЗ.  
ИО – интенсивность отказов.  
ИП – источник питания.  
КЗ – короткое замыкание.  
КРУ – комплектное распределительное устройство.  
ЛЭП – линия электропередачи.  
МБМ – монобазовая модель.  
МО – математическое ожидание.  
МОО – матрица одновременных отказов.  
МП – минимальный путь.  
МС – минимальное сечение.  
НР – нормальное распределение.  
ОТКЗ– отказы типа «КЗ».  
ОТО – отказы типа «обрыв».  
ПН – показатели надежности.  
ПС – пропускная способность.  
ПСН – показатели структурной надежности.  
РЗА – релейная защита и автоматика.  
СВ – секционный выключатель.  
СДУ – система дифференциальных уравнений.  
СН – структурная надежность.  
ТР – токовое реле.  
УБУ – условный базовый узел.  
УВ – унифицированная ветвь.  
ФР – функция работоспособности.  
ЭЭС – электроэнергетическая система.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арзамасцев Д. А. Расчет показателей структурной надежности энергосистем / Д. А. Арзамасцев, В. П. Обоскалов. Свердловск : Изд-во УПИ, 1986.
2. Дулесов А. С. Оценка показателей структурной надежности электрических сетей на основе эквивалентных преобразований : дис. ... канд. техн. наук / А. С. Дулесов. Свердловск : Изд-во УПИ, 1985.
3. Котов О. М. Применение метода обобщенного эквивалентирования для анализа структурной надежности электрических сетей : дис. ... канд. техн. наук / О. М. Котов. Свердловск : Изд-во УПИ, 1989.
4. Обоскалов В. П. Надежность обеспечения баланса мощности электроэнергетических систем / В. П. Обоскалов. Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 2002.
5. Обоскалов В. П. Резервы мощности в электроэнергетических системах / В. П. Обоскалов. Свердловск : Изд-во УПИ, 1989.
6. Китушин В. Г. Надежность энергетических систем. Теоретические основы : учеб. пособ. / В. Г. Китушин. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003.
7. Гук Ю. Б. Теория надежности в электроэнергетике : учеб. пособ. для вузов / Ю. Б. Гук. Л. : Энергоатомиздат, 1990.
8. Фокин Ю. А. Надежность и эффективность сетей электрических систем / Ю. А. Фокин. М. : Высш. шк., 1989.
9. Трубицын В. И. Надежность электростанций : учеб. пособ. / В. И. Трубицын. М. : Энергоатомиздат, 1997.
10. Розанов М. Н. Надежность электроэнергетических систем / М. Н. Розанов. М. : Энергоатомиздат, 1984.
11. Гнеденко Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. М. : Наука, 1965.
12. Руденко Ю. Н. Надежность и резервирование в энергосистемах / Ю. Н. Руденко, М. Б. Чельцов. Новосибирск : Наука, 1974.
13. Фокин Ю. А. Оценка надежности систем электроснабжения / Ю. А. Фокин, В. А. Туфанов. М. : Энергоиздат, 1981.
14. Руденко Ю. Н. Надежность систем энергетики / Ю. Н. Руденко, И. А. Ушаков. М. : Наука, 1986.
15. Надежность систем электроснабжения / В. В. Зорин [и др.]. Киев : Вища школа, 1984.
16. Рябинин И. А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем / И. А. Рябинин. Л. : Судостроение, 1971.
17. Гук Ю. Б. Теория и расчет надежности систем электроснабжения / Ю. Б. Гук, Н. А. Козак, А. В. Мясников. М. : Энергия, 1970.
18. Непомнящий В. А. Учет надежности при проектировании энергосистем / В. А. Непомнящий. М. : Энергия, 1978.
19. Михайлов В. В. Надежность электроснабжения промышленных предприятий / В. В. Михайлов. М. : Энергоиздат, 1982.
20. Синчугов Ф. И. Надежность электрических сетей энергосистем / Ф. И. Синчугов. М. : ЭНАС, 1998.

21. Фокин Ю. А. Вероятностно-статистические методы в расчетах систем электроснабжения / Ю. А. Фокин. М. : Энергоатомиздат, 1985.
22. Абраменкова Н. А. Структурный анализ электроэнергетических систем / Н. И. Воропай, Т. Б. Заславская. Новосибирск : Наука, 1990.
23. Волков Г. А. Оптимизация надежности электроэнергетических систем / Г. А. Волков. М. : Наука, 1986.
24. Манов Н. А. Оценка надежности электроэнергетической системы / Н. А. Манов, Ю. В. Слободян, И. Ф. Кузнецова. Сыктывкар : Коми ФАН СССР, 1980.
25. Надежность систем энергетики и их оборудования. Справочник. В 4 т. Т. 1: Справочник по общим моделям анализа и синтеза надежности систем энергетики / Под редакцией Ю. Н. Руденко. М. : Энергоатомиздат, 1994.
26. Надежность систем энергетики и их оборудования. Справочник. В 4 т. Т. 2: Надежность электроэнергетических систем / Под общ. редакцией Ю. Н. Руденко. М. : Энергоатомиздат, 2000.
27. Справочник по общим моделям анализа и синтеза надежности систем энергетики / под общей ред. Ю. Н. Руденко. М. : Энергоатомиздат 1994.
28. Козлов Б. А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики / Б. А. Козлов, И. А. Ушаков. М. : Сов. Радио. 1975.
29. Эндрэни Дж. Моделирование при расчетах надежности в электроэнергетических системах : пер с англ. / Дж. Эндрэни. М. : Энергоатомиздат, 1983.
30. Бартоломей П. И. Логические основы теории дискретных автоматов : учеб. пособие / П. И. Бартоломей. Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 2001.
31. Биллингтон Р. Оценка надежности электроэнергетических систем : пер. с англ. / Р. Биллингтон, Р. Аллан. М. : Энергоатомиздат, 1988.
32. Барлоу Р. Математическая теория надежности / Р. Барлоу, Ф. Прошан. М. : Советское радио, 1969.
33. Райншке К. Оценка надежности систем с использованием графов / К. Райншке, И.А. Ушаков. М. : Радио и связь, 1988.
34. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. М. : Мир, 1984.
35. Кокс Д. Р. Теория восстановления / Д. Р. Кокс, В. Л. Смит. М. : Сов. радио. 1967.
36. Грудинский П. Г. Схемы коммутации электрических станций и подстанций / П. Г. Грудинский. М. : Госэнергоиздат, 1948.
37. Кирпикова И. Л. Математические задачи энергетики / И. Л. Кирпикова В. П. Обоскалов. Екатеринбург : Изд-во УГТУ–УПИ, 2006.
38. Туфанов В. А. Параллельный принцип организации алгоритма расчетов надежности систем электроснабжения, реализуемый на базе базисных сечений / В. А. Труфанов // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 4. Иркутск : СЭИ, 1975. С. 36–41.
39. Горский Л. К. Статистические методы исследования надежности / Л. К. Горский. М. : Наука, 1970.
40. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем / Н. П. Бусленко. М. : Наука, 1978.

41. Зорин В. В. Особенности расчета показателей надежности схем электрических сетей / В. В. Зорин, В. В. Тисленко // Изв. вузов. Энергетика. 1973. № 6. С. 15–21.
42. Руденко Ю. Н. Основные понятия, определяющие свойство «надежность» систем энергетики / Ю. Н. Руденко, Ф. И. Синьчугов, Э. П. Смирнов. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1981. № 2. С. 3–17.
43. Мясников А. В. Определение вероятностных критериев надежности схем электрических соединений станций и подстанций / А. В. Мясников, В. А. Непомнящий. // Тр. ВНИИЭ. 1970. Вып. 37. С. 201–221.
44. Розанов М. Н. Надежность электроэнергетических систем / М. Н. Розанов. М. : Энергия, 1974.
45. Кирпикова И. Л. Использование метода базисных разрезов для оценки показателей надежности ЭЭС / И. Л. Кирпикова, О. М. Котов, В. П. Обоскалов. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1989. № 2. С. 27–33.
46. Максимович Н. Г. Методы топологического анализа электрических сетей / Н. Г. Максимович. Львов : Изд-во Львовского университета, 1970.
47. Котов О. М. Учет направленности расчетного графа при определении показателей структурной надежности систем электроснабжения / О. М. Котов, В. П. Обоскалов. // Надежность при управлении развитием и функционированием ЭЭС. Иркутск : Изд-во СЭИ, 1989. С. 155–162.
48. Фокин Ю. А. Расчет надежности систем электроснабжения / Ю. А. Фокин, А. М. Харченко // Электричество. 1982. N 8. С. 5–10.
49. Гук Ю. Б. Применение логических мер надежности при обосновании схем и графиков ремонтов открытого распреустройства 330 кВ действующей АЭС / Ю. Б. Гук, А. А. Жакупов. // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 23. Иркутск : Изд-во СЭИ, 1981. С. 118–131.
50. Лосев Э. А. Основные положения расчета надежности систем электроснабжения промышленных предприятий / Э. А. Лосев // Изв. вузов. Электромеханика. 1985. № 7. С. 55–60.
51. Смирнов Э. П. Влияние профилактического контроля на надежность релейной защиты / Э. П. Смирнов // Электричество. 1968. №4. С. 10–15.
52. Венцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Венцель. М. : Наука, 1969
53. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. М. : Высш. шк. 2002.
54. Гнеденко В. В. Курс теории вероятностей / В. В. Гнеденко. М. : Наука, 1969.
55. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. М. : Мир, 1964.
56. Литвак Е. И. Обобщенное преобразование треугольник-звезда при исследовании свойств сложных сетей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1981. № 1. С. 183–187.
57. Михайлов В. В. Учет профилактических ремонтов в расчетах надежности электроснабжения / В. В. Михайлов, В. И. Эдельман // Электрические станции, 1970. № 2. С. 43–46.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Введение .....	5
1. Методы расчета показателей структурной надежности .....	8
1.1. Случайный процесс состояний ЭЭС .....	8
1.2. Показатели структурной надежности .....	10
1.3. Метод пространства состояний .....	15
1.3.1. Марковские процессы .....	16
1.3.2. Система дифференциальных уравнений .....	20
1.3.3. Стационарные состояния .....	26
1.3.4. Последовательное соединение элементов .....	27
1.3.5. Параллельное соединение элементов .....	31
1.3.6. Радиальная структура диаграммы состояний .....	34
1.3.7. Структура $m/n$ состояний .....	36
1.3.8. Кольцевая структура состояний .....	39
1.3.9. Формула полной вероятности .....	39
1.3.10. Метод декомпозиции .....	41
1.4. Логико-вероятностные методы .....	45
1.4.1. Монотонные структуры .....	47
1.4.2. Метод минимальных путей и сечений .....	48
1.4.3. Базисные разрезы .....	54
1.5. Вероятностные переходы .....	61
2. Вероятностное эквивалентирование при моделировании отказов типа «обрыв» .....	68
2.1. Расчетная схема .....	69
2.2. Неориентированный граф расчетной схемы .....	72
2.2.1. Исключение и восстановление узлов ранга 1 .....	72
2.2.2. Исключение и восстановление узлов ранга 2 .....	74
2.2.3. Эквивалентирование «звезда – треугольник», «треугольник – звезда» .....	87
3. Расчет показателей надежности сложных структур .....	96
3.1. Районирование .....	97
3.2. Декомпозиция схем с собственными отказами узлов .....	99
3.2.1. Итерационные процедуры .....	100
3.2.2. Монобазовая модель .....	101
3.2.3. Полибазовая модель .....	112
3.2.4. Дополнительные расчетные процедуры .....	115
3.3. Расчет ориентированных графов .....	118
3.4. Плановые отключения элементов ЭЭС .....	128
3.4.1. Последовательная организация учета плановых ремонтов .....	130
3.4.2. Параллельная организация учета плановых ремонтов .....	138
3.5. Одновременный отказ ветвей расчетной схемы .....	142
4. Вероятностные модели отказов типа «КЗ» .....	145
4.1. Расчетная схема, основные допущения .....	146
4.1.1. Унифицированная ветвь расчетной схемы .....	147
4.1.2. Математические модели элементов ЭЭС .....	148
4.1.3. Моделирование одновременного отказа узлов .....	149
4.1.4. Отказы устройств релейной защиты .....	149
4.2. Упрощенный расчет интенсивности ОТКЗ .....	150
4.3. Эквивалентирование ОТКЗ для узлов ранга 1, 2 .....	154
4.3.1. Исключение и восстановление узлов первого ранга .....	155
4.3.2. Исключение узлов второго ранга .....	157
4.3.3. Восстановление узлов ранга 2 .....	159
4.4. Узлы ранга 3 .....	166
4.4.1. Исключение узлов ранга 3 .....	166
4.4.2. Восстановление узла ранга 3 .....	168
4.5. Проверочные расчеты .....	170
Заключение .....	171
Приложение 1. Элементы теории вероятностей .....	173
Приложение 2. Функции распределения .....	180
Список сокращений .....	189
Библиографический список .....	190

*Учебное издание*

**Обоскалов Владислав Петрович**

**СТРУКТУРНАЯ НАДЕЖНОСТЬ  
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Редактор *Н. В. Рощина*

Компьютерная верстка *В. П. Обоскалова, Е. В. Осиповой, Е. В. Суховой*

Подписано в печать . . . 2012. Формат 60×841/16

Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 11,33.

Уч.-изд. л. 12,3. Тираж 200 экз. Заказ № П 08-12

Редакционно-издательский отдел УрФУ  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19  
E-mail: [rio@ustu.ru](mailto:rio@ustu.ru)

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра УрФУ  
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4  
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13  
Факс: +7 (343) 358-93-06  
E-mail: [press.info@usu.ru](mailto:press.info@usu.ru)